المملكة العربية السعودية
وزارة التربية والتعليم
التطوير التربوي

● قررت وزارة التربية والتعليم تدريس
● هـذا الكتاب وطبعه على نفقتها

وزارة التربية والتعليم
MINISTRY OF EDUCATION

الرِّياضيَّات

للصف الثاني الثانوي

الفصل الدراسي الأول

قسم العلوم الإدارية والاجتماعية

(بنين)

تأليف
مجموعة من المختصين

طبعة ١٤٢٨هـ ـ ١٤٢٩هـ
٢٠٠٧م ـ ٢٠٠٨م

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
السعودية، وزارة التربية والتعليم
الرياضيات : للصف الثاني الثانوي : قسم العلوم الإدارية والاجتماعية
- الفصل الدراسي الأول - ط ٥ - الرياض.
٢٠٠ ص ؛ ٢١x٢٣ سم
ردمك : ٩ - ٢١٩ - ١٩ - ٩٩٦٠ (مجموعة)
٢ - ٢٢٠ - ١٩ - ٩٩٦٠ (ج١)
١ ـ الرياضيـات ـ كتب دراسية
٢ ـ السعوديـة - التعليم الثـانـوي ـ كتب دراسيـة. أ ـ العنوان
ديوي ٧١٢، ٥١٠ ١٩ / ٢١٨٧

رقم الإيداع : ٢١٨٧ / ١٩
ردمك : ٩ - ٢١٩ - ١٩ - ٩٩٦٠ (مجموعة)
٢ - ٢٢٠ - ١٩ - ٩٩٦٠ (ج١)

لهذا الكتاب قيمة مهمّة وفائدة كبيرة فلنحافظ عليه ولنجعل نظافته تشهد على حسن سلوكنا معه...

إذا لم نحتفظ بهذا الكتاب في مكتبتنا الخاصة في آخر العام للاستفادة فلنجعل مكتبة مدرستنا تحتفظ به...

موقع الوزارة
www.moe.gov.sa

موقع الإدارة العامة للمناهج
www.moe.gov.sa/curriculum/index.htm

البريد الإلكتروني للإدارة العامة للمناهج
curriculum@moe.gov.sa

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

الحمد للّه رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد وآله وصحبه.

أما بعد، فهذا هو كتاب الرياضيات للصف الثاني الثانوي تم تأليفه لينسجم مع الخطة الدراسية لقسم العلوم الإدارية والاجتماعية.

يشمل هذا الكتاب خمسة أبواب هي :

الباب الأول: الهندسة التحليلية.

الباب الثاني : البرمجة الخطية.

الباب الثالث : المصفوفات.

الباب الرابع : جمع البيانات والدلالات الإحصائية.

الباب الخامس : مقاييس التشتت.

نسأل اللّه تعالى أن يجعل من هذا الكتاب عونًا للمعلم والطالب.

وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين.

المؤلفون

الفهـــــرس

الباب الأول

الـهنـدسـة التحليليـة

١ ـ ١ المستوى الإحداثي.

١ ـ ٢ طول قطعة مستقيمة.

١ ـ ٣ معادلة مستقيم من المستوى الإحداثي.

١ ـ ٤ المستقيمان المتعامدان.

١ ـ ٥ معادلة مستقيم ذي ميل معين ويمر بنقطة محددة.

١ ـ ٦ بعد نقطة عن مستقيم.

١ ـ ٧ الأوضاع المختلفة لمستقيمين في المستوى.

١ ـ ٨ الأوضاع المختلفة لمستقيمن في المستوى.

١ ـ ٩ الدوال الحقيقية ورسم خطوطها البيانية.

١ ـ ١٠ دراسة تغير دالة.

الباب الأول

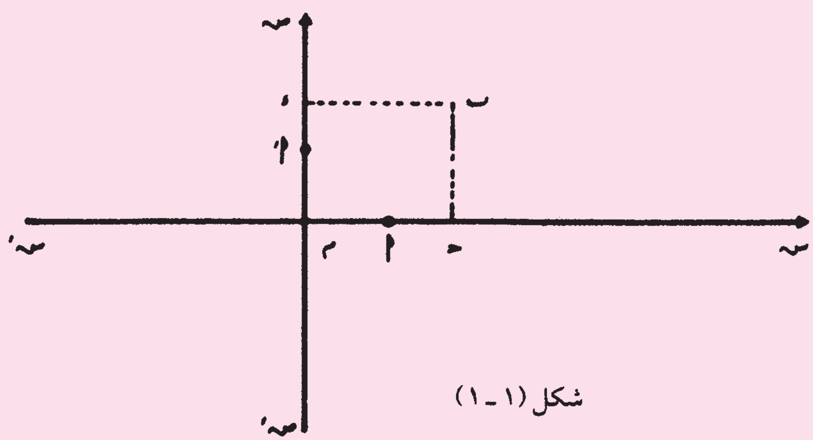
الهندسة التحليلية

١ ـ ١ المستوى الإحداثي

إذا رسمنا في مستوٍ ى محورين متعامدين م أ ، م أ′ حيث نفرض:

| م أ | = | م أ′ | = ١

فإننا نقول إننا كوّنا مستوياً إحداثياً أو نظاماً إحداثياً قائماً ذا بعدين. يسمى عادة المحور م أ بالمحور الإحداثي الأفقي ويمثل بمستقيم أفقي س′ م س موجه من اليسار



شكل (١ ـ ١)

إلى اليمين. أما المحور الثاني م أ′ فيسمى بالمحور الإحداثي **الرأسي** ويمثل بمستقيم متعامد مع سہ′ م سہ في النقطة م ونرمز له بالرمز صہ′ م صہ وهو محور موجه من الأسفل الى الأعلى. كثيراً ما نسمي المحور الأول محور سہ أو **محور السينيات** ونسمي الثاني محور صہ أو **محور الصادات**. انظر الشكل (١ ـ ١).

من الممكن أن لا يكون المحوران سہ′ م سہ ، صہ′ م صہ متعامدين وأن لا يكون الأول منهما أفقياً والآخر رأسياً ولكننا سنقتصر هنا على محورين متعامدين كما بينا ذلك أعلاه.

إذا كانت ب نقطة من المستوى الإحداثي وكانت حـ مسقط العمود المنشأ من ب على محور سہ وكانت ء مسقط العمود المنشأ من ب على محور صہ فإننا نسمي حـ **بالمسقط القائم** للنقطة ب على محور سہ . ونسمي ء **بالمسقط القائم** للنقطة ب على محور صہ . وإذا فرضنا أن س إحداثي حـ على المحور سہ′ م سہ و ص إحداثي ء على المحور صہ′ م صہ فإننا نسمي العددين س ، ص ، على الترتيب، بالاحداثي السيني والإحداثي الصادي للنقطة ب. نختصر عادة هذا القول ونقول س النقطة ب و ص النقطة ب ونكتب

ب (س ، ص) أو ب = (س ، ص)

من الواضح أنه يقابل كل نقطة ب من المستوى الإحداثي عددان حقيقيان س ، ص هما إحداثيا هذه النقطة كما يعين كل زوج مرتب (س ، ص) من الأعداد الحقيقية نقطة وحيدة في المستوي الإحداثي، لذا نقول إن هناك تقابلاً بين نقاط المستوي الإحداثي ے وبين عناصر المجموعة ح × ح.

١ ـ ٢ طـــول قطعـــة مستقيمـــة

تعريف (١ ـ ١)

إذا كانت ب ، حـ نقطتين من المستوى الإحداثي فإننا نسمي مجموعة النقاط

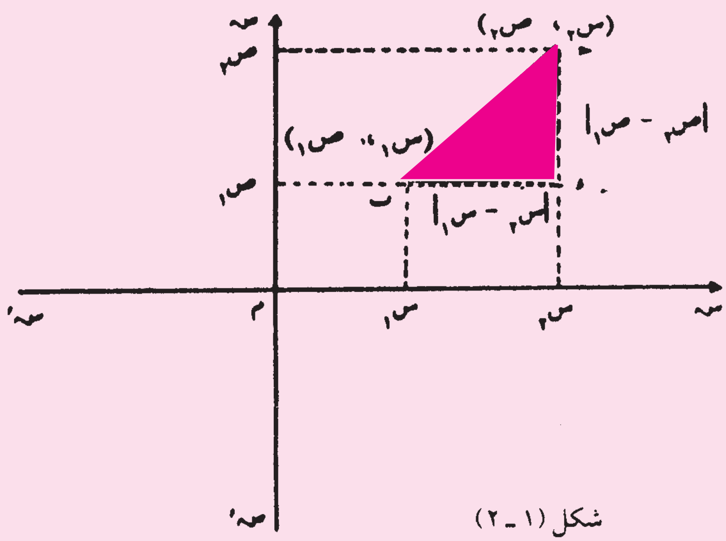
[ب حـ ∩ [حـ ب

قطعة مستقيمة. نرمز لهذه القطعة، كما فعلنا من قبل، بالرمز : [ب حـ]

ونكتب:

[ب حـ] = [ب حـ ∩ [حـ ب

الشكل (١ ـ ٢) يساعدنا من أجل حساب طول القطعة المستقيمة [ب حـ] حيث فرضنا :



شكل (١ ـ ٢)

ب = (س١ ، ص١) ، حـ = (س٢ ، ص٢)

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث ب ء حـ ، القائم في ء، نجد:

$$|ب حـ|^٢ = |ب ء|^٢ + |ء حـ|^٢$$

$$\Leftrightarrow |ب حـ|^٢ = (س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢$$

أي:

$$\boxed{|ب حـ| = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}}$$

مثال (١-١)

أ ب حـ مثلث في المستوى الإحداثي. إحداثيات رؤوسه هي:

أ = (١ ، - ٢) ، ب = (٣ ، - ٦) ، حـ = (٠ ، ٥)

أحسب أطوال أضلاعه.

الحـــل :

بتطبيق القانون الذي يعطي طول قطعة مستقيمة والوارد أعلاه نجد:

$$|أب| = \sqrt{(١ - ٣)^{٢} + (-٢ + ٦)^{٢}} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$$

$$|أحـ| = \sqrt{(١ - ٠)^{٢} + (-٢ - ٥)^{٢}} = \sqrt{٥٠} = ٥\sqrt{٢}$$

$$|بحـ| = \sqrt{(٣ - ٠)^{٢} + (-٦ - ٥)^{٢}} = \sqrt{١٣٠}$$

١ ـ ٣ معــادلة مستقيم من المستوى الإحــداثــي

نعتبر المستقيم مجموعة جزئيـة من المستوي الاحـداثي تتعين بخـاصة مميـزة. تعطى هـذه الخاصـة عادة، بعـلاقة تـربط س نقـطة متغـيرة من هـذا المستقيم بصـادهـا من الشكل:

ص = د (س)

تعريف (١ ـ ٢)

إذا عينا مجموعة جزئية من المستوي الاحداثي بعلاقة تربط س كـل نقطة من هـذه المجموعة بصـادها، فـإننا نسمي هـذه العلاقـة «معادلة المجموعة الجزئية» ونسمي المجموعة الجزئية المذكورة بيان هذه العلاقة.

عندما نريد تعيين مجموعة نقاط جزئية ع من المستوي الاحداثي بخاصة مميزة علينا أن نبرهن أن:

(أ) كل نقطة ب ∋ ع تحقق هذه الخاصة

(ب) كل نقطة حـ تنتمي الى المستوي الاحداثي وتحقق هذه الخاصة تنتمي الى ع.

يبرهن أن معادلة أي مستقيم من المستوي الإحداثي هي معادلة من الدرجة الأولى

في س و ص من الشكل:

$$ا س + ب ص + حـ = ٠$$

ملاحظة (١ ـ ١):

يمكن كتابة معادلة المستقيم:

$$ا س + ب ص + حـ = ٠$$

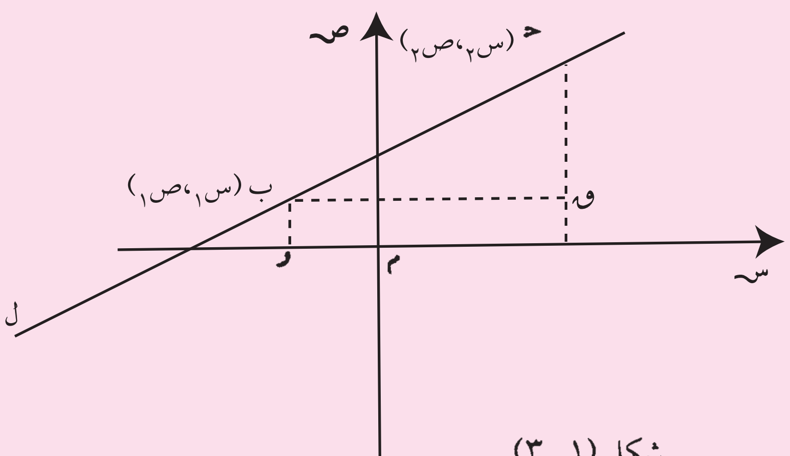
على الصورة:

$$ص = \frac{-ا}{ب} س - \frac{حـ}{ب}$$

فإذا فرضنا $- \frac{ا}{ب} = م$ ، $\frac{-حـ}{ب} = ء$

فإن معادلة المستقيم تأخذ الشكل:

$$ص = م س + ء$$



شكل (١ ـ ٣)

إذا نظرنا إلى الشكل (١ ـ ٣) حيث المستقيم ل الذي معادلته .

$$ص = م س + د$$

نجد أن النقطتين:

$$ب = (س_1 ، ص_1) ، حـ = (س_2 ، ص_2)$$

واقعتان على المستقيم ل فهما إذن تحققان معادلته أي:

$$ص_1 = م س_1 + د \quad ، \quad ص_2 = م س_2 + د$$

إذا طرحنا المعادلة الأولى من المعادلة الثانية، طرفاً من طرف، نجد:

$$ص_2 - ص_1 = م (س_2 - س_1)$$

بالقسمة على $س_2 - س_1$ حيث $س_2 - س_1 \neq 0$ نجد:

$$م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

نسمي العدد م هذا ميل المستقيم ل الذي معادلته:

$$ص = م س + د$$

والذي يمر بالنقطتين $(س_1 ، ص_1)$ ، $(س_2 ، ص_2)$.

إذن: إذا كانت ب ، حـ نقطتين من المستقيم ل فإن العدد:

$$م = \frac{ص_{حـ} - ص_{ب}}{س_{حـ} - س_{ب}}$$

عدد ثابت لا يتغير عندما يتغير موضعا النقطتين ب ، حـ على المستقيم ل.

نتيجة (١ ـ ١) **المستقيمان المتوازيان**

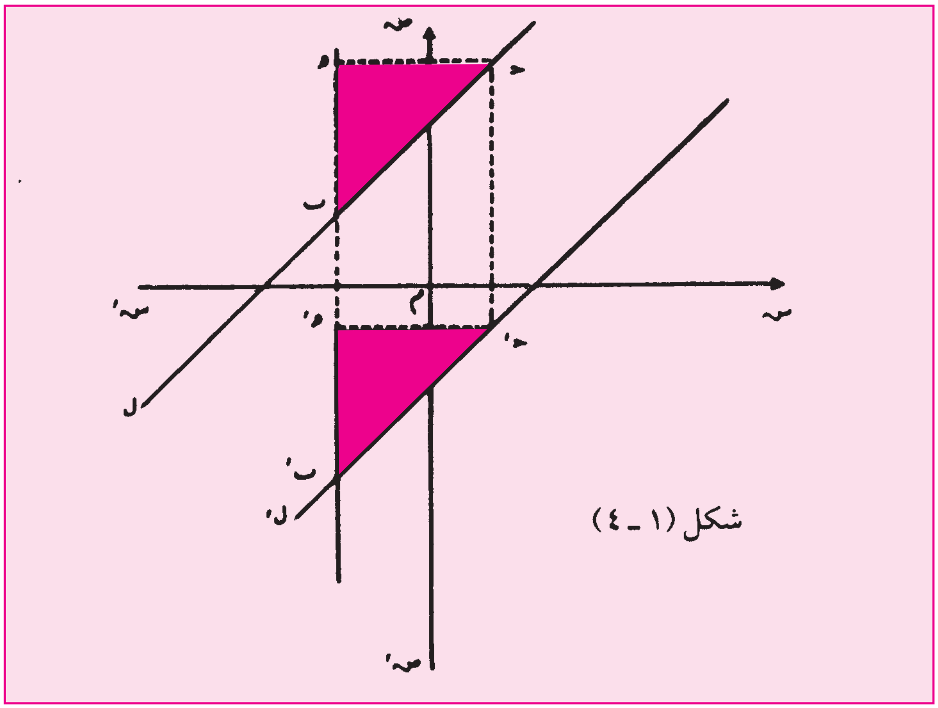
لنفرض أن ل مستقيم معادلته :

ص = م س + ء

وأن ل′ مستقيم يوازي ل ومعادلته :

ص = م′ س + ء′

لنرسم مستقيمين يوازيان محور ص فيقطع أحدهما المستقيمين ل ، ل′، على الترتيب في النقطتين ب ، ب′ ويقطع الثاني منهما ل ، ل′ في حـ ، حـ′ كما هو ظاهر في الشكل (١-٤)



شكل (١ ـ ٤)

لنرسم من حـ ، حـ′ موازيين لمحور س فيقطعان ب ب′ بالنقطتين هـ ، هـ′.

نلاحظ كما هو واضح على الشكل (١ ـ ٤) أن :

$\overline{هـب} = ص_ب - ص_حـ$ ، $\overline{هـ'ب'} = ص_{ب'} - ص_{حـ'}$

$\overline{حـهـ} = س_ب - س_حـ$ ، $\overline{حـ'هـ'} = س_{ب'} - س_{حـ'}$

وهكذا نجد:

$$م = \frac{\overline{هـب}}{\overline{حـهـ}} ، م' = \frac{\overline{هـ'ب'}}{\overline{حـ'هـ'}}$$

المثلثان حـ هـ ب ، حـ' هـ' ب' قائمان ومتشابهان لذا فإنهما يحققان التناسب:

$$\frac{\overline{هـب}}{\overline{هـ'ب'}} = \frac{\overline{حـهـ}}{\overline{حـ'هـ'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{هـب}}{\overline{حـهـ}} = \frac{\overline{هـ'ب'}}{\overline{حـ'هـ'}} \Leftrightarrow م = م'$$

ينتج مما سبق:

إذا كان المستقيمان ل ، ل' متوازيين وكانت معادلتاهما، على الترتيب،

ص = م س + ى ، ص' = م' س + ى'

فإن: م = م'

يبرهن بالانتقال بشكل معاكس لما فعلناه أعلاه أن:

$$م = م' \Leftrightarrow \frac{\overline{هـب}}{\overline{حـهـ}} = \frac{\overline{هـ'ب'}}{\overline{حـ'هـ'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{هـب}}{\overline{هـ'ب'}} = \frac{\overline{حـهـ}}{\overline{حـ'هـ'}}$$

وهـذا يؤدي إلى أن المثلثين القـائمين حـ هـ ب ، حـ' هـ' ب' متشـابهـان وأن

المستقيمين ل ، ل' متوازيان.

إذا كان المستقيمان ل ، ل' معرفين بالمعادلتين:

$$أ س + ب ص + جـ = ٠ \quad ، \quad أ' س + ب' ص + جـ' = ٠$$

فإن: $م = - \frac{أ}{ب}$ ، $م' = - \frac{أ'}{ب'}$ ونجد:

$$م = م' \Leftrightarrow - \frac{أ}{ب} = - \frac{أ'}{ب'} \Leftrightarrow \frac{أ}{ب} = \frac{أ'}{ب'} \Leftrightarrow \frac{أ}{أ'} = \frac{ب}{ب'}$$

وذلك بفرض أنه لا يساوي أي حرف من الحروف أ ، ب ، أ' ، ب' الصفر.

ينتج عما سبق:

يكون المستقيمان ل ، ل' متوازيين إذا وإذا فقط كان:

$$\frac{أ}{أ'} = \frac{ب}{ب'}$$

مثال (١-٢)

نلاحظ أن المستقيمين ل ، ل' الممثلين بالمعادلتين:

$$٤ ص = ٦ س - ٣ \quad ، \quad ٩ س = ٦ ص - ١$$

متوازيان لأنه يمكن كتابة هاتين المعادلتين على الصورة:

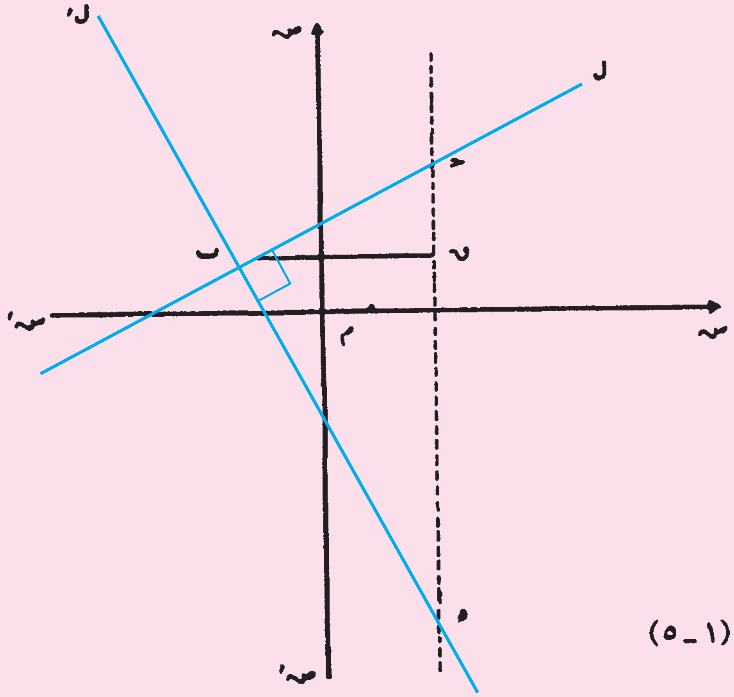
$$٦ س - ٤ ص - ٣ = ٠ \quad ، \quad ٩ س - ٦ ص + ١ = ٠$$

ونجد أن:

$$\frac{٦}{٩} = \frac{-٤}{-٦} \Leftrightarrow م = م'$$

١ ـ ٤ المستقيمات المتعامدان

ل ، ل′ مستقيمان متعامدان ومتقاطعان في النقطة ب . نرسم مستقيماً موازياً لمحور ص ويبعد عن ب بعداً يساوي وحدة الأطوال فيقطع ل في حـ وَ ل′ في هـ كما هو ظاهر في الشكل (١ ـ ٥)



شكل (١ ـ ٥)

نرسم [ب و] ارتفاع المثلث القائم حـ ب هـ فنجد:

$$\overline{\text{ب و}}^{\,2} = \overline{\text{هـ و}} \cdot \overline{\text{و حـ}} = ١ \qquad (١ - ١)$$

وذلك استناداً إلى النظرية التي تقول:

«مربع طول الارتفاع في مثلث قائم الزاوية يساوي حاصل ضرب طولي القطعتين المحددتين بهذا الارتفاع على الوتر»

ولكن:

$$\overline{\text{ب ن}} = \text{س}_{\text{ن}} - \text{س}_{\text{ب}} = \text{س}_{\text{هـ}} - \text{س}_{\text{ب}} \text{ ،}$$

$$\overline{\text{هـ ن}} = \text{ص}_{\text{ن}} - \text{ص}_{\text{هـ}} = \text{ص}_{\text{ب}} - \text{ص}_{\text{هـ}}$$

$$\text{ن جـ} = \text{ص}_{\text{جـ}} - \text{ص}_{\text{ن}} = \text{ص}_{\text{جـ}} - \text{ص}_{\text{ب}} \text{.}$$

ينتج عن العلاقة (١ ـ ١) بعد أخذ العلاقات السابقة بالاعتبار:

$$\text{١} = \overline{\text{ب ن}}^{\,\text{٢}} = (\text{ص}_{\text{ب}} - \text{ص}_{\text{هـ}})(\text{ص}_{\text{جـ}} - \text{ص}_{\text{ب}}) \qquad \text{(١ ـ ٢)}$$

وبما أن:

$$\text{س}_{\text{هـ}} - \text{س}_{\text{ب}} = \text{س}_{\text{جـ}} - \text{س}_{\text{ب}} = \text{١}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{١} = (\text{س}_{\text{هـ}} - \text{س}_{\text{ب}})(\text{س}_{\text{جـ}} - \text{س}_{\text{ب}}) \qquad \text{(١ ـ ٣)}$$

بقسمـة العلاقة (١ ـ ٢) على العلاقة (١ ـ ٣) طرفاً على طرف نجد:

$$\text{١} = \frac{\text{ص}_{\text{ب}} - \text{ص}_{\text{هـ}}}{\text{س}_{\text{هـ}} - \text{س}_{\text{ب}}} \cdot \frac{\text{ص}_{\text{جـ}} - \text{ص}_{\text{ب}}}{\text{س}_{\text{جـ}} - \text{س}_{\text{ب}}} \qquad \text{(١ ـ ٤)}$$

ولكن إذا فرضنا أن م هـو ميل المستقيم ل وأن م′ هـو ميل المستقيم ل′ ولاحـظنا أن:

$$\frac{\text{ص}_{\text{ب}} - \text{ص}_{\text{هـ}}}{\text{س}_{\text{هـ}} - \text{س}_{\text{ب}}} = - \frac{\text{ص}_{\text{هـ}} - \text{ص}_{\text{ب}}}{\text{س}_{\text{هـ}} - \text{س}_{\text{ب}}} = -\text{م}' \text{ ،} \quad \frac{\text{ص}_{\text{جـ}} - \text{ص}_{\text{ب}}}{\text{س}_{\text{جـ}} - \text{س}_{\text{ب}}} = \text{م}$$

فإن العلاقة (١ ـ ٤) تأخذ الشكل:

$$م . م' = -١ \Leftrightarrow م' . م = -١$$

نذكر المساواة الأخيرة بقولنا:

«إذا كان المستقيمان:

$$ل : ص = م س + ء \quad ، \quad ل' : ص = م' س + ء'$$

متعامدين فإنه يكون:

$$م . م' = -١ \Leftrightarrow م' = \frac{-١}{م}$$

يبرهن باتباع طريق معاكس لما فعلناه أعلاه أنه إذا كان $م . م' = -١$

فإن المستقيمين:

$$ل : ص = م س + ء \quad ، \quad ل' : ص = م' س + ء'$$

متعامدان

مثال (١-٣)

نلاحظ أن المستقيمين:

$$ل : ٢ س + ٣ ص = ٥ \quad ، \quad ل' : ٩ س = ٦ ص - ١$$

متعامدان لأنه يمكن كتابة معادلتيهما بالشكل:

$$ص = \frac{-٢}{٣} س + \frac{٥}{٣} \quad ، \quad ص = \frac{٩}{٦} س + \frac{١}{٦}$$

حيث يظهر أن:

$$م = \frac{-٢}{٣} \quad ، \quad م' = \frac{٩}{٦} \quad \Leftarrow \quad م . م' = \frac{-٢}{٣} \times \frac{٩}{٦} = -١$$

١ ـ ٥ معادلة مستقيم ذي ميل معين ويمرّ بنقطة محددة

إذا كان م ميل المستقيم ل فإن معادلته من الشكل :

$$ص = م\ س + ء \qquad (١ - ٥)$$

وإذا مر هذا المستقيم بالنقطة ب = ($س_٠$ ، $ص_٠$) فإن هذه النقطة تحقق معادلة المستقيم أي :

$$ص_٠ = م\ س_٠ + ء \Leftrightarrow ء = ص_٠ - م\ س_٠ \qquad (١ - ٦)$$

من العلاقتين (١ ـ ٥) وَ (١ ـ ٦) نستنتج معادلة المستقيم ل :

$$ص = م\ س + ص_٠ - م\ س_٠ \Leftrightarrow ص - ص_٠ = م\ (س - س_٠)$$

١ ـ ٦ معادلة مستقيم مارّ بنقطتين

إذا كان المستقيم ل الذي معادلته :

$$أ\ س + ب\ ص + جـ = ٠ \quad ، \quad أ \neq ٠ \text{ أو } ب \neq ٠ \qquad (١ - ٧)$$

ماراً بالنقطتين :

$$ء = (س_١ ، ص_١) \quad ، \quad هـ = (س_٢ ، ص_٢)$$

فإن هاتين النقطتين تحققان معادلة المستقيم أي :

$$\begin{cases} أ\,س_{١} + ب\,ص_{١} + حـ = ٠ \\ أ\,س_{٢} + ب\,ص_{٢} + حـ = ٠ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} س_{١} + \frac{ب}{أ}\,ص_{١} + \frac{حـ}{أ} = ٠ \\ س_{٢} + \frac{ب}{أ}\,ص_{٢} + \frac{حـ}{أ} = ٠ \end{matrix} \qquad (١ ـ ٨)$$

وذلك بفرض $أ \neq ٠$

بطرح المعادلة الأولى من الثانية نجد:

$$س_{٢} - س_{١} + \frac{ب}{أ}\,ص_{٢} - \frac{ب}{أ}\,ص_{١} = ٠$$

$$س_{٢} - س_{١} + \frac{ب}{أ}\left(ص_{٢} - ص_{١}\right) = ٠ \Leftrightarrow \frac{ب}{أ} = -\frac{س_{٢} - س_{١}}{ص_{٢} - ص_{١}}$$

نعوض في المعادلة الأولى من (١ ـ ٨) فنجد:

$$س_{١} - \frac{س_{٢} - س_{١}}{ص_{٢} - ص_{١}}\,ص_{١} + \frac{حـ}{أ} = ٠ \Leftrightarrow \frac{حـ}{أ} = \frac{س_{٢} - س_{١}}{ص_{٢} - ص_{١}}\,ص_{١} - س_{١}$$

لنعوض في المعادلة (١ ـ ٧) بعد تقسيم طرفيها على $أ$:

$$س - \frac{س_{٢} - س_{١}}{ص_{٢} - ص_{١}}\,ص + \frac{س_{٢} - س_{١}}{ص_{٢} - ص_{١}}\,ص_{١} - س_{١} = ٠$$

أو

$$س - س_{١} = \frac{س_{٢} - س_{١}}{ص_{٢} - ص_{١}}\left(ص - ص_{١}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{ص - ص_{١}}{س - س_{١}} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} \qquad (١ ـ ٩)$$

إن المعادلة الأخيرة هي معادلة المستقيم المار بالنقطتين:

$$(س_{١} ، ص_{١}) ، (س_{٢} ، ص_{٢})$$

مثال (١-٤)

أوجد معادلة المستقيم المار من النقطتين:

$$ب = (١ ، ٢) ، \quad حـ = (-٢ ، ٣)$$

الحـــل:

باستخدام المعادلة (١ - ٩) وبفرض:

$$ب = (س_١ ، ص_١) = (١ ، ٢) ،$$

$$حـ = (س_٢ ، ص_٢) = (-٢ ، ٣)$$

نجد:

$$\frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{٢ - ٣}{١ + ٢} = \frac{-١}{٣} \Leftrightarrow -٣ص - ٦ = -س + ١$$

$$\Leftrightarrow \quad س + ٣ص - ٧ = ٠$$

مثال (١-٥)

أوجد ميل المستقيم الذي معادلته:

$$٣ص = ٢س - ٦$$

الحـــل:

يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل:

$$ص = \frac{٢}{٣} س - ٢$$

ويكون الميل المطلوب $م = \frac{٢}{٣}$

مثال (١-٦)

أوجد معادلة المستقيم ل الذي يمر من النقطة (١ ، ٣) ويوازي المستقيم ل′ الذي معادلته:

$$٣ س + ص - ٥ = ٠$$

الحـــل :

يمكن كتابة معادلة المستقيم ل′ بالشكل ؛

$$ص = - ٣ س + ٥$$

حيث يظهر أن ميل ل′ هو م = - ٣. وبما أن المستقيم ل يوازي المستقيم ل′ فإن ميل ل يساوي أيضاً - ٣ وتكون معادلته من الشكل:

$$ص = - ٣ س + ء$$

نعين قيمة ء بأن نكتب أن النقطة (١ ، ٣) الواقعة على المستقيم ل تحقق هذه المعادلة أي:

$$٣ = - ٣ \times ١ + ء \Leftarrow ء = ٦$$

وهكذا تكون المعادلة المطلوبة هي :

$$ص = - ٣ س + ٦$$

مثال (١-٧)

أوجد معادلة المستقيم ل الذي يمر من النقطة (٠ ، ٤) ويتعامد مع المستقيم ل′ الذي معادلته:

س + ٢ ص + ١١ = ٠

الحـــل :

لنكتب معادلة ل′ بالشكل:

$$ص = -\frac{١}{٢}\,س - \frac{١١}{٢}$$

فنلاحظ أن ميل ل′ يساوي $-\frac{١}{٢}$ ويتنج عن ذلك أن ميل ل يساوي

$$م = \frac{-١}{-\frac{١}{٢}} = ٢$$

فتكون معادلة ل من الشكل:

ص = ٢ س + د

وبما أن النقطة (٠ ، ٤) واقعة على المستقيم ل فهي تحقق المعادلة الأخيرة أي

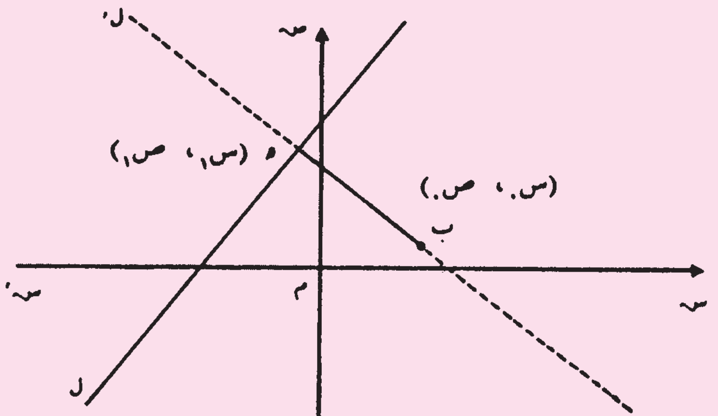
٤ = ٢ × ٠ + د ⟸ د = ٤

وهكذا نجد المعادلة المطلوبة وهي :

ص = ٢ س + ٤

١ ـ ٧ بعد نقطة عن مستقيم

من المعروف أن بعد النقطة ب عن المستقيم ل هو طول العمود النازل من ب على ل ، لذا لإيجاد بعد النقطة ب = ($س_٠$ ، $ص_٠$) عن المستقيم ل نوجد معادلة المستقيم ل′ المار من النقطة ب والعمودي على المستقيم ل ثم نوجد نقطة تقاطع ل′ مع ل ولتكن النقطة هـ = ($س_١$ ، $ص_١$) فيكون بعد ب



شكل (١ ـ ٦)

عن ل هو طول القطعة المستقيمة [ب م] . إذا مثلنا هذا البعد بالحرف ع فإنه يكون:

$$ع = \sqrt{(س_١ - س_٠)^٢ + (ص_١ - ص_٠)^٢}$$

مثال (١-٨)

أوجد بعد النقطة (٢ ، -١) عن المستقيم

ل : ٣ س + ٤ ص - ٥ = ٠

الحل :

$$ل : ٣ س + ٤ ص - ٥ = ٠ \Leftrightarrow ص = \frac{-٣}{٤} س + \frac{٥}{٤}$$

إن معادلة المستقيم ل′ المتعامد مع هذا المستقيم والمار من النقطة (٢ ، - ١) هي :

$$ص + ١ = \frac{٤}{٣} (س - ٢) \Leftrightarrow ص = \frac{٤}{٣} س - \frac{١١}{٣}$$

يتقاطع هذان المستقيمان في النقطة:

$$و = \left(\frac{٥٩}{٢٥} ، \frac{-١٣}{٢٥} \right)$$

لذا يكون:

$$ع = \sqrt{\left(\frac{٥٩}{٢٥} - ٢\right)^٢ + \left(\frac{-١٣}{٢٥} + ١\right)^٢} = \sqrt{\left(\frac{٩}{٢٥}\right)^٢ + \left(\frac{١٢}{٢٥}\right)^٢}$$

$$ع = \sqrt{\frac{٢٢٥}{(٢٥)^٢}} = \frac{١٥}{٢٥} = \frac{٣}{٥}$$

نظرية (١ ـ ١)

نفرض أن النقطة المعلومة هي م(س. ، ص.) والمستقيم المعلوم

$أس + ب ص + حـ = ٠$

سنقبل بدون برهان

بعد النقطة م عن المستقيم المعلوم $= \frac{|أس_٠ + ب ص_٠ + حـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$

مثال (١-٩)

أوجد بعد النقطة (٢ , ٤) عن المستقيم س + ٣ص -١ = ٠

الحــل :

$س_٠ = ٢$ ، $ص_٠ = ٤$ ، أ = ١ ، ب = ٣، حـ = -١

$$\therefore \text{البعد} = \frac{|أس_٠ + ب ص_٠ + حـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$

$$= \frac{|١ \times ٢ + ٣ \times ٤ + (-١)|}{\sqrt{١^٢ + ٣^٢}} = \frac{|٢ + ١٢ - ١|}{\sqrt{١٠}} = \frac{١٣}{\sqrt{١٠}} \text{ وحدة الطول}$$

تمارين (١ - ١)

١ - أ ب حـ ء شكل رباعي فيه:

أ = (-٤ ، ٥) ، ب = (٤ ، ٥) ، حـ = (٨ ، -٥)

ء = (-٨ ، -٧).

إذا كانت هـ ، و ، ر ، ح منتصفات الأضلاع [أ ب] ، [ب حـ] ، [حـ ء] ، [ء أ] على الترتيب فقم بما يلي:

(أ) ارسم هذه النقط على شكل بياني،

(ب) أوجد طول محيط الشكل هـ و ر ح ،

(حـ) أثبت أن الشكل هـ و ر ح متوازي أضلاع.

٢ - عين المستقيمات المتوازية أو المتعامدة بين المستقيمات التالية:

(أ) ٢ س + ٣ ص = ٥ ، (ب) ٤ ص = ٦ س - ٣

(حـ) ٧ - ٦ ص = ٤ س ، (ء) ١٢ س = ٩ ص - ١

(هـ) ص = $\frac{١}{٢}$ (٣ س - ٤) ، (و) ص + ٢ = $\frac{-٢}{٣}$ س

٣ - أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٢ ، ٣) ويوازي المستقيم

٣ س + ص + ٥ = ٠

٤ ـ أوجد معادلة المستقيم الذي يمر من النقطة (٣ ، ٤) ويكون عموداً على المستقيم :

٥ س + ٢ ص + ١١ = ٠

٥ ـ أوجد معادلة المستقيم المنصف للقطعة [ب حـ] والعمودي عليها وكذلك معادلة المستقيم المنصف للقطعة [ء هـ] والعمودي عليها وذلك إذا علمت أن :

ب = (٣ ، ٤) . حـ = (٥ ، ـ ١) . ء = (٢ ، ـ ١)

هـ = (ـ ٣.٠ ، ١)

٦ ـ إذا كانت معادلة المستقيم ل هي س + ٢ ص ـ ٥ = ٠ وكان المستقيم $ل_١$ متعامداً مع ل ويمر من النقطة أ = (١ ، ٢) فأوجد :

(أ) ميل المستقيم $ل_١$ ، (ب) نقطة تقاطع ل ، $ل_١$.

(حـ) البعد بين النقطة أ ونقطة تقاطع المستقيمين ل ، $ل_١$.

٧ ـ أوجد طول العمود النازل من النقطة (١ ، ٢) على المستقيم :

٥ س ـ ص ـ ٢٣ = ٠

٨ ـ إذا كانت أ = (٢ ، ٤) ، ب = (ـ ٢ ، ١) فأوجد :

(أ) معادلة المستقيم أ ب

(ب) معادلة المستقيم العمودي على أ ب والمار بالنقطة أ.

(حـ) معادلة المستقيم الذي يوازي أ ب ويمر بالنقطة (٣ ، ـ ١).

٩ ـ إذا كانت:

$$\text{ﺃ} = (٣ ، ٢) \quad، \quad \text{ب} = (-٢ ، ٣) \quad، \quad \text{ﺣ} = (-٤ ، ٥) \quad،$$

$$\text{ء} = (٠ ، ٥)$$

فأثبت أن الشكل ﺃ ب ﺣ ء متوازي أضلاع.

١٠ ـ نفرض:

$$\text{ﺃ} = (٣ ، ٢) \quad، \quad \text{ب} = (-٢ ، ٣) \quad، \quad \text{ﺣ} = (-٤ ، ٥) \quad،$$

$$\text{ء} = (\text{س}_{١} ، \text{ص}_{١})$$

إذا كان الشكل ﺃ ب ﺣ ء متوازي أضلاع فأوجد:

(ﺃ) إحداثي منتصف [ﺃ ﺣ] ، (ب) قيمتي $\text{س}_{١}$ وَ $\text{ص}_{١}$

١١ ـ يقطع المستقيم س = ٥ المحور السيني في النقطة (ﺃ) ويقطع المستقيم ص = ٣ المحور الصادي في النقطة (ب). أوجد:

(ﺃ) إحداثي كل من النقطتين (ﺃ) وَ (ب) ،

(ب) معادلة المستقيم ﺃ ب ،

(ﺣ) معادلة المستقيم العمودي على ﺃ ب والمار من نقطة الأصل.

١ ـ ٨ الأوضاع المختلفة لمستقيمين في المستوى

إذا كان $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمين من المستوى الإحداثي فإنه يمكننا أن نتصور الحالات المختلفة التالية لأوضاعهما النسبية.

(١) المستقيمان منطبقان أي $ل_١ = ل_٢$

(٢) المستقيمان متقاطعان في نقطة ب أي:

$$ل_١ \cap ل_٢ = \{ب\}$$

(٣) المستقيمان غير متقاطعين:

$$ل_١ \cap ل_٢ = \varnothing$$

وسندرس هذه الحالات على التوالي بشكل تحليلي.

(١) يكون المستقيمان:

$$ل_١ : أ س + ب ص + حـ = ٠ ، ل_٢ : أ' س + ب' ص + حـ' = ٠ \quad (١ - ١٣)$$

منطبقين إذا كانت معادلتاهما متكافئتين أي إذا نتجت إحداهما عن الأخرى بضربها بعدد ثابت م ≠ . مثلاً، ويكون عندها

$$أ' س + ب' ص + حـ' = م (أ س + ب ص + حـ) = ٠ ،$$

$$\forall \, س ، ص \in ح$$

وهذه العلاقة تكافىء:

$$\frac{أ'}{أ} = \frac{ب'}{ب} = \frac{حـ'}{حـ} = م$$

وهذا هو شرط انطباق المستقيمين $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$.

(٢) يكون المستقيمان $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ متوازيين وغير منطبقين إذا كان ميلاهما متساويين

أي إذا كان :

$$\frac{-أ}{ب} = \frac{-أ'}{ب'} \Leftrightarrow \frac{أ}{ب} = \frac{أ'}{ب'} \Leftrightarrow \frac{أ}{أ'} = \frac{ب}{ب'}$$

وإذا لم يتحقق شرط الانطباق أي :

$$\frac{أ}{أ'} = \frac{ب}{ب'} \neq \frac{ح}{ح'}$$

(٣) يتقاطع المستقيمان $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ إذا لم يكونا متوازيين، أي :

$$\frac{أ}{أ'} \neq \frac{ب}{ب'} \Leftrightarrow أ'ب \neq أب' \Leftrightarrow أ'ب - أب' \neq ٠$$

وهذا هو الشرط اللازم والكافي ليكون لنظام المعادلتين (١ ـ ١٣) حل وحيد.

مثال (١-١٠)

عين قيمتي الثابتين ح ، ء ليكون المستقيمان :

$$٣س - ٢ص + ٥ = ٠ \quad ، \quad ٢س + حص + ء = ٠$$

منطبقين.

الحـــل :

إن شرط الانطباق هو: $\frac{أ'}{أ} = \frac{ب'}{ب} = \frac{ح'}{ح} = م \Leftrightarrow$

$$\frac{٢}{٣} = \frac{ح}{-٢} = \frac{ء}{٥} \Leftarrow ح = \frac{٢\times-٢}{٣} = -\frac{٤}{٣} \quad ، \quad ء = \frac{١٠}{٣}$$

مثال (١-١١)

عين الوسيط م لتكون المستقيمات الثلاثة :

$(ل_{١})$: ٣ س - ٤ ص + ١٥ = ٠ ،

$(ل_{٢})$: ٥ س + ٢ ص - ١ = ٠

$(ل_{٣})$: م س - (٢ م - ١) ص + ٩ م - ١٣ = ٠

متلاقية في نقطة واحدة.

الحـــل :

إذا كانت هذه المستقيمات متلاقية في نقطة فإن هذه النقطة هي نقطة تـلاقي المستقيمين $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$. إذا قمنا بحل معادلتي المستقيمين $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ فإننـا نجـد أنهما يتقـاطعـان في النقطة (- ١ ، ٣). لنكتب أن هذه النقطة تقع على $ل_{٣}$ أي تحقق معادلته :

- م - ٣ (٢ م - ١) + ٩ م - ١٣ = ٠ ⇔ م = ٥

وهي قيمة الوسيط م المطلوبة

تماريـن (١ - ٢)

١ - برهن أن المستقيمات الثلاثة $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ ، $ل_{٣}$ المعينة بالمعادلات :

$ل_{١}$: ٣ س - ٢ ص - ١٤ = ٠ ، $ل_{٢}$: ٥ س - ٤ ص - ٢٦ = ٠

$ل_{٣}$: س - ٧ ص - ٣٠ = ٠

متلاقية في نقطة واحدة.

٢ ـ عين احداثيات رؤوس المثلث الذي تقع أضلاعه على المستقيمات:

س + ٢ ص = ١ ، ٢ س - ص = ٣ ، - ٤ س + ٥ ص - ٧ = ٠

٣ ـ اكتب معادلة تمثل كل المستقيمات الموازية للمستقيم:

س - ٣ ص + ٧ = ٠

٤ ـ اكتب معادلة المستقيم المار من النقطة (٢ ، - ٤) ومن نقطة تقاطع المستقيمين:

٣ س - ٤ ص + ١ = ٠ ، ٢ س - ٦ ص + ٣ = ٠

٥ ـ عين قيمتي م ، ن ليكون المستقيمان:

م س - ٢ ص + ١١ = ٠ ، س + ن ص = ١١

متوازيين.

٦ ـ أعط للحروف أ ، ب ، حـ قيماً ليكون المستقيم:

أ س + ب ص + حـ = ٠

موازياً للمستقيم:

س + ٢ ص - ٥ = ٠

وغير منطبق عليه.

١ ـ ٩ الدوال الحقيقية ورسم خطوطها البيانية

يسمى التطبيق من مجموعة جزئية من ح إلى مجموعة جزئية من ح دالة حقيقية يرمز عادة لقاعدة دالة بمساواة بين رمز الصورة وبين ناتج عمليات متتابعة نجريها على متغير مجال الدالة. لقد جرت العادة أن يكون الحرف ص رمزاً للصورة والحرف س رمزاً لمتغير الدالة. إذا لم نرد إظهار العمليات الداخلية في قاعدة الدالة د رمزنا لهذه القاعدة بالشكل:

$$ص = د\,(س)$$

لو عرفنا مثلاً الدالة د بالقاعدة:

$$ص = ٥\,س^{٢} - ٣$$

فإن هذا يعني أنه لايجاد صورة العدد س وفق الدالة د، علينا أن نربع س ونضرب الناتج بالعدد (٥) ثم نطرح من الناتج الأخير العدد (٣).

نعتبر مجال دالة حقيقية، لم نذكر مجاله، أوسع مجموعة جزئية من ح يمكننا أن نجري على كل عنصر منها جميع العمليات الداخلة في تعريف قاعدة الدالة. نسمي هذه المجموعة مجموعة تعريف الدالة د.

من الواضح أن مجموعة تعريف الدالة التي قاعدتها:

$$ص = \frac{٢\,س - ٥}{س - ٣}$$

هي المجموعة ح - {٣} لأنه يمكن إجراء العمليات الداخلة في قاعدة هذه الدالة على كل قيمة للمتغير س إلا عندما يكون س = ٣ لأن علينا عندئذ أن نقسم على الصفر.

أما مجموعة تعريف الدالة التي قاعدتها:

$$ص = \sqrt{١ - س^٢}$$

فهي المجموعة الجزئية من ح والمكونة من جميع الأعداد التي تجعل قيمة التركيب $١ - س^٢$ غير سالب وذلك لأنه لا يمكن إجراء الجذر التربيعي على العدد السالب.

من المعلوم أن:

$$١ - س^٢ \geqslant ٠ \Leftrightarrow -١ \leqslant س \leqslant ١$$

لذا فإن مجموعة تعريف الدالة المذكورة هي الفترة المغلقة [- ١ ، + ١].

١ ـ ١٠ دراسة تغيّر دالة

نعني بدراسة تغير دالة معرفة متى تكون قيمها متزايدة مع تزايد س ومتى تتناقص هذه القيم عندما تزداد قيم المتغير س ومعرفة متى تتحول قيمها من متزايدة إلى متناقصة والعكس وذلك بفرض أن قيم المتغير س متزايدة دائماً.

سنوضح هذه الأمور بالتعريف التالي:

تعريف (١ ـ ٣)

إذا كانت (هـ) دالة معرفة على مجموعة جزئية ن من ح فإننا نقول:

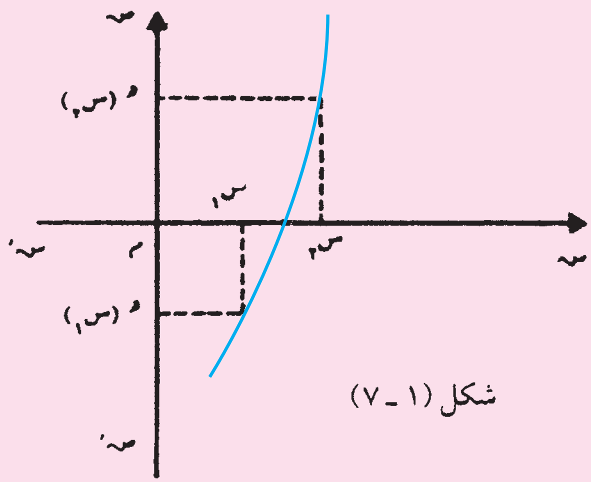
(١) إن هـ تزايدية على ن إذا وإذا فقط تحقق ما يلي:

$$س_١ < س_٢ \Leftarrow هـ(س_١) \leqslant هـ(س_٢) \quad \forall س_١ ، س_٢ \in ن$$

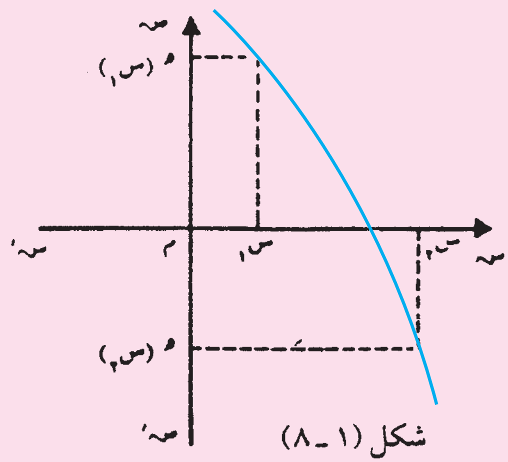
(٢) إن هـ تناقصية على ن إذا وإذا فقط تحقق ما يلي:

$$س_١ < س_٢ \Leftarrow هـ(س_١) \geqslant هـ(س_٢) \quad \forall س_١ ، س_٢ \in ن$$

(٣) إذا كانت الدالة د تناقصية على مجموعة تعريفها أو كانت تزايدية على هذه المجموعة فإننا نسميها دالة رتيبة (مطردة)



شكل (١ ـ ٧)



شكل (١ ـ ٨)

مثال (١-١٢)

إن الدالة هـ حيث:

$$ص = هـ(س) = ٢ س + ٣$$

دالة تزايدية لأن:

$$س_١ < س_٢ \Leftarrow ٢ س_١ < ٢ س_٢ \Leftarrow ٢ س_١ + ٣ < ٢ س_٢ + ٣$$

أي: $س_١ < س_٢ \Leftarrow هـ(س_١) < هـ(س_٢)$

أما الدالة ى حيث:

$$ص = ى(س) = -٢ س + ٣$$

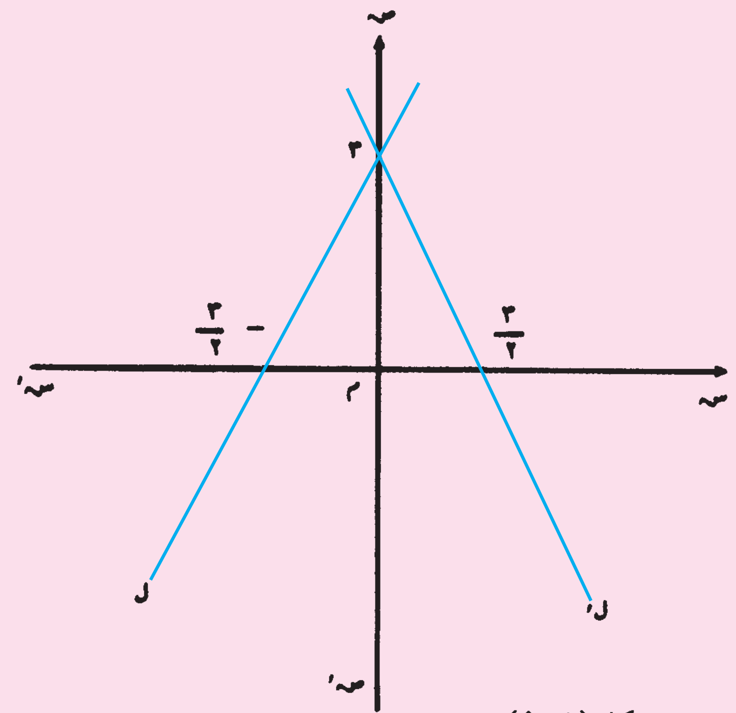
فإنها دالة تناقصية لأن:

$$س_١ < س_٢ \Leftarrow -٢ س_١ > -٢ س_٢$$

$$\Leftarrow -٢ س_١ + ٣ > -٢ س_٢ + ٣$$

أي: $س_١ < س_٢ \Leftarrow ى(س_١) > ى(س_٢)$

في الشكل (١ - ٩) المستقيم ل هو بيان الدالة هـ والمستقيم ل′ هو بيان الدالة ى.



شكل (١ ـ ٩)

نتيجـة (١ ـ ٢)

ينتج عن التعريف (١ ـ ٣) أن الدالة (د) تكون تزايدية على المجموعة (ى) إذا كان من أجل كل عنصرين مختلفين $س_١$ ، $س_٢$ من (ى):

$$\frac{د(س_١) - د(س_٢)}{س_١ - س_٢} \geqslant ٠$$

وتكون الدالة هـ تناقصية على (ى) إذا كان لكل عنصرين مختلفين $س_١$ ، $س_٢$ من (ى):

$$\frac{هـ(س_١) - هـ(س_٢)}{س_١ - س_٢} \leqslant ٠$$

القيم العظمى والقيم الصغرى لدالـة

تعريف (١ ـ ٤)

إذا كانت د دالة معرفة على ن ⊂ ح فإننا نقول:

(١) إن لهذه الدالة قيمة عظمى ك عند ب فيما إذا كان:

لكل س ∈ ن ، د (س) ≤ د (ب) = ك

(٢) إن للدالة د قيمة عظمى محلية (نهاية عظمى) ل عند حـ فيما إذا وجد عـددان أ ، ب بحيث يكـون [أ ، ب] ⊂ ن وَ حـ ∈]أ ، ب[وَلكـل س ∈ [أ ، ب] ، د (س) ≤ د (حـ) = ل.

(٣) إن للدالة د قيمة صغرى عند ء فيما إذا كان

لكل س ∈ ن ، د (س) ≥ د (ء)

(٤) إن للدالة د قيمة صغرى محلية (نهاية صغرى) عند ء فيما إذا أمكن ايجاد عددين أ ، ب بحيث يكون [أ ، ب] ⊂ ن ، ء ∈]أ ، ب[و

لكل س ∈ [أ ، ب] ، د (س) ≥ د (ء)

مثال (١–١٣)

لتكن د دالة معرفة على ح بالقاعدة التالية:

د (س) = ٢ |س + ٢| - ٣ |س + ١| +٤ |س - ١|

نلاحظ أن المقادير س - ١ ، س + ١ ، س + ٢ تغير إشاراتها على الترتيب عند س = ١ ، س = - ١ ، س = - ٢ لذا سندرس هذه الدالة على الفترات

]- ∞ ، - ٢] ، [- ٢ ، - ١] ، [- ١ ، + ١] ، [+ ١ ، + ∞[

(١) إذا كان س ∈]- ∞ ، - ٢] أي إذا كان س ≤ - ٢ فإنه يكون

س - ١ < ٠ ، س + ١ < ٠ ، س + ٢ ≤ ٠

ويكون عندها :

ه (س) = - ٢ (س + ٢) + ٣ (س + ١) - ٤ (س - ١)

= - ٣ س + ٣

(٢) إذا كان س ∈ [- ٢ ، - ١] أي - ٢ ≤ س ≤ - ١ فإنه يكون :

س - ١ < ٠ ، س + ١ ≤ ٠ ، س + ٢ ≥ ٠

ويكون عندها:

ه (س) = ٢ (س + ٢) + ٣ (س + ١) - ٤ (س - ١)

= س + ١١

(٣) إذا كان س ∈ [- ١ ، + ١] أي - ١ ≤ س ≤ ١ فإنه يكون :

س - ١ ≤ ٠ ، س + ١ ≥ ٠ ، س + ٢ > ٠

ويكون عندها:

ه (س) = ٢ (س + ٢) - ٣ (س + ١) - ٤ (س - ١)

= - ٥ س + ٥

(٤) إذا كان س ∋ [١ ، + ∞ [أي إذا كان س ⩾ ١ فإنه يكون :

س − ١ ⩾ ٠ ، س + ١ > ٠ ، س + ٢ > ٠

ويكون عندها :

هـ (س) = ٢ (س + ٢) − ٣ (س + ١) + ٤ (س − ١) = ٣ س − ٣

نلاحظ أن الدالة هـ تناقصية على] − ∞ ، − ٢] وتزايدية على [− ٢ ، − ١] وتناقصية على [− ١ ، ١] وتزايدية على [١ ، + ∞ [. نوضح ما سبق بالجدول التالي (١ ـ ١) :

س	− ∞		− ٢		− ١		١		+ ∞
هـ(س)	+ ∞	↙	٩	↖	١٠	↙	٠	↖	+ ∞

جدول (١ ـ ١)

حيث السهم الهابط ↙ يدل على تناقص الدالة والسهم الصاعد ↖ يدل على تزايدها .

نتيجة (١ ـ ٣)

تكون الدالة د في قيمة عظمى محلية عند ب إذا انقلبت من تزايدية إلى تناقصية عندما يمر المتغير س من ب متزايداً .

وتكون الدالة د في قيمة صغرى محلية عند حـ إذا انقلبت هذه الدالة من تناقصية إلى تزايدية عندما يمر المتغير س من حـ متزايداً .

المنحني البياني لـدالـة

إذا كانت الدالة د معرفة بالمعادلة :

$$ص = د(س) \quad ، \quad س \in ح$$

فإن كل زوج مرتب (س ، ص) من مجموعة حل هـذه المعادلـة يعين نقـطة في المستوى الاحداثي . نسمي مجموعة الأزواج المرتبة :

$$ن = \{ (س ، ص) ، س \in ح ، ص = د(س) \}$$

بيان هذه الدالة ونسمي النقاط الممثلة لأزواج البيان، المنحني البياني للدالة .

لقد رأينا أن بيان الدالة المعرفة بمعادلة من الدرجة الأولى في المتغيرين س ، ص :

$$أ س + ب ص + جـ = ٠$$

هـو مجموعـة الأزواج المرتبـة (س ، ص) التي تمثل نقـاط مستقيم لـذا نقـول إن الخط البياني لهذه الدالة مستقيم .

لن نتعرض هنا الى الطريقة الكاملة والدقيقـة لرسم خط بيـاني بل سنقـدم طريقـة مبسطة تدعى «الطريقة النقطية» . تقوم هذه الطريقة عـلى تعيين عـدد كافٍ من نقـاط خط بياني ثم الوصل بين هذه النقاط بـأقواس من منحنٍ ممهـد . تصلح هذه الـطريقة لرسم بعض المنحنيات البسيطة بغية الحصـول على معلومـات تقريبيـة عن الدوال التي تمثلها .

نقوم عادة من أجل رسم منحني دالة بالخطوات التالية :

(١) نعين مجموعة تعريف الدالة والقيم التي لا تكون فيها الدالة معرفة .

(٢) نعين الفترات التي تكون عليها الدالة تزايدية والفترات التي تكون عليها هذه الدالة تناقصية .

(٣) نعين النهايات العظمى المحلية والنهايات الصغرى المحلية .

(٤) ندرس قيم الدالة في جوار النقط التي لا تكون فيها الدالة معرفة .

(٥) ندرس سلوك قيم الدالة عندما تزداد قيم متغيرها س دون توقف أو عندما تتناقص هذه القيم دون توقف .

(٦) نضع نتائج هذه الدراسة في جدول وفي المستوي الاحداثي ثم نتمم رسم الخط البياني .

سنوضح ما سبق بالأمثلة التالية :

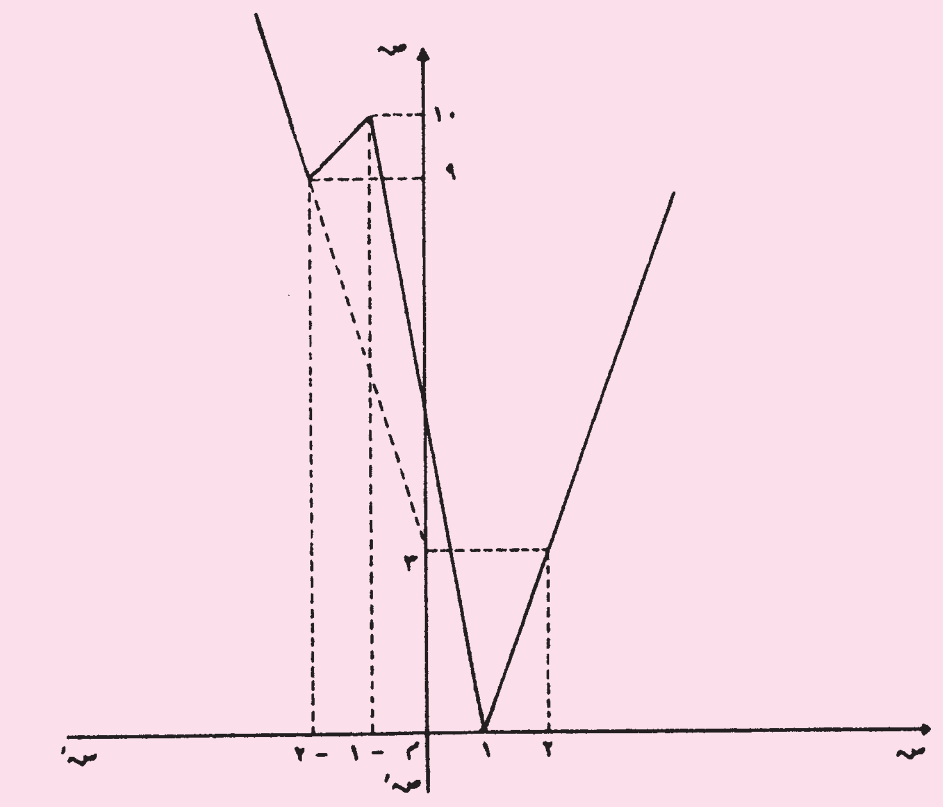
مثال (١-١٤)

لرسم الخط البياني للدالة (هـ) الواردة في المثال (١ ـ ١٣) نعيد كتابة الجدول (١ ـ ١)

س	- ∞		- ٢		- ١		١		+ ∞
ص	+ ∞	↙	٩	↖	١٠	↙	٠	↖	+ ∞
			ن.ص		ن.ع		ن.ص		

ن.ص و ن.ع الرمزان الواردان في هذا الجدول يعنيان على الترتيب نهاية صغرى ونهاية عظمى .

إذا عدنا إلى دراسة هذا المثال فإننا نلاحظ أن المعادلة المفروضة تأخذ شكل معادلة من الدرجة الأولى من الفترات الأربعة التي ذكرناها، وهذا يعني أن بيان الدالة الواردة في هذا المثال أجزاء من مستقيمات متلاحقة وهذا ما هو ظاهر في الشكل (١ ـ ١٠).



شكل (١ ـ ١٠)

مثال (١–١٥)

لدراسة تغيرات الدالة د المعرفة بالمعادلة:

$$ص = س^{٢}$$

ورسم خطها البياني نلاحظ ما يلي:

(١) مجموعة تعريف الدالة د هي ح

(٢) إذا أعطينا للمتغير س قيمتين متناظرتين فإننا نحصل على قيمة واحدة للمتغير ص مثل:

$$\text{س} = ٣ \quad \text{أو} \quad \text{س} = -٣ \Leftarrow \text{ص} = ٩$$

وهذا يعني أن نقاط المنحنى البياني لهذه الدالة متناظرة بالنسبة لمحور ص.

(٣) إذا كان $\text{س}_١$ ، $\text{س}_٢$ موجبين فإن:

$$\frac{\text{د}(\text{س}_١) - \text{د}(\text{س}_٢)}{\text{س}_١ - \text{س}_٢} = \frac{\text{س}_١^٢ - \text{س}_٢^٢}{\text{س}_١ - \text{س}_٢} = \text{س}_١ + \text{س}_٢ \geqslant ٠.$$

أي أن هذه الدالة متزايدة على الفترة $[٠ ، + \infty [$

أما إذا كان $\text{س}_١$ ، $\text{س}_٢$ سالبين فإن:

$$\frac{\text{د}(\text{س}_١) - \text{د}(\text{س}_٢)}{\text{س}_١ - \text{س}_٢} = \text{س}_١ + \text{س}_٢ \leqslant ٠.$$

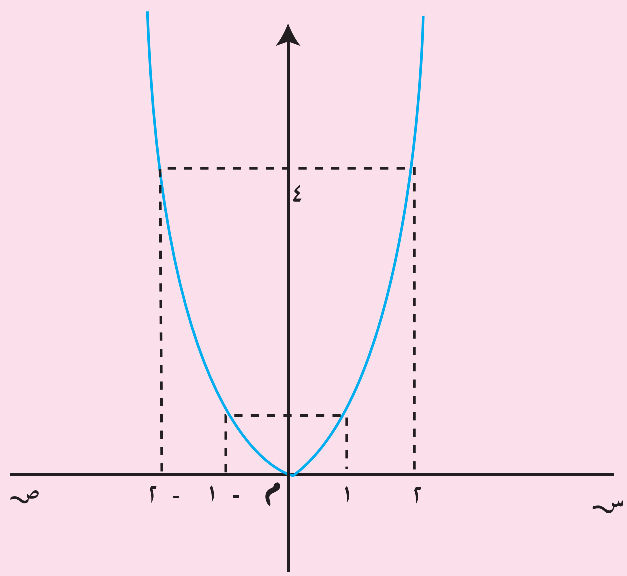
وهذا يعني أن الدالة د تناقصية على الفترة $] - \infty ، ٠]$

(٤) نلاحظ أنه عندما تمر قيم س من الصفر متزايدة فإن د تنقلب من تناقصية إلى تزايدية وهذا يعني أن الدالة د تمر بقيمة صغرى محلية عند س = ٠

(٥) يمكننا بعد ما تقدم تكوين الجدول التالي:

س	- ∞		- ٢		- ١		٠		+ ١		+ ٢		+ ∞
ص	+ ∞	↙	٤	↙	١	↙	٠	↖	١	↖	٤	↖	+ ∞

(٦) الشكل (١ ـ ١١) يمثل الخط البياني لهذه الدالة.



شكل (١ ـ ١١)

مثال (١-١٦)

لدراسة تغير الدالة التي قاعدتها

$$ص = د(س) = س^٣$$

نلاحظ ما يلي:

(١) مجموعة تعريف د هي ح كاملة،

(٢) $\dfrac{س_١^٣ - س_٢^٣}{س_١ - س_٢} = س_١^٢ + س_١ س_٢ + س_٢^٢$

إذا كان كل من $س_1$ ، $س_2$ موجباً فإن:

$$س_1^2 + س_1 س_2 + س_2^2 > 0$$

أي أن الدالة هـ تزايدية على [٠ ، + ∞ [

وإذا كان كل من $س_1$ ، $س_2$ سالباً فإنه يكون أيضاً:

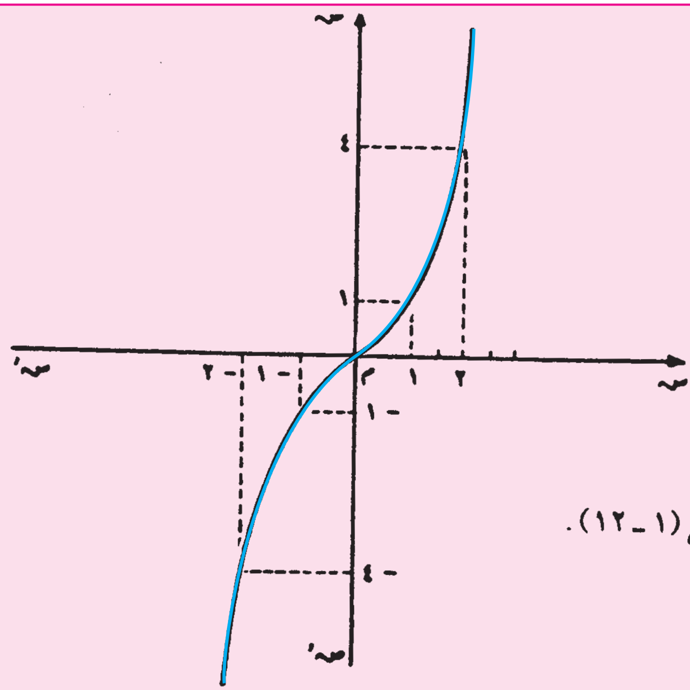
$$س_1^2 + س_1 س_2 + س_2^2 > 0$$

وهذا يعني أن الدالة هـ تزايدية أيضاً على الفترة] - ∞ ، ٠] أي أن الدالة هـ دالة تزايدية.

(٤) الجدول التالي يلخص ما سبق:

س	- ∞		- ٢		- ١		٠		١		٢		+ ∞
ص	- ∞	↗	- ٨	↗	- ١	↗	٠	↗	١	↗	٨	↗	+ ∞

(٥) المنحنى الظاهر في الشكل (١ ـ ١٢) هو منحنى هذه الدالة.



شكل (١ ـ ١٢).

تمارين (١ – ٣)

عين في كل من التمارين (١ ـ ١٠) مجموعة تعريف الدالة الواردة فيه والمعرفة بقاعدتها:

(١) $\text{ص} = \dfrac{١}{\text{س}}$ ، (٢) $\text{ص} = \dfrac{\text{س}}{٢\,\text{س} + ٣}$

(٣) $\text{ص} = \dfrac{\text{س} - ١}{٣\,\text{س} + ٢}$ ، (٤) $\text{ص} = ٢\,\text{س}^{٢} - ١ + \dfrac{٣}{\text{س} - ١}$

(٥) $\text{ص} = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} - ١٠}$ ، (٦) $\text{ص} = \dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\sqrt{(\text{س} - ١)^{٢}}}$

(٧) $\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س} + ٢}$ ، (٨) $\text{ص} = \dfrac{١}{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س} + ٢}}$

(٩) $\text{ص} = \dfrac{\text{س}}{\text{س} + |\text{س}|}$ ، (١٠) $\text{ص} = \dfrac{١ - |\text{س}|}{١ + \text{س}}$

أدرس تغيرات كل من الدوال الواردة في التمارين (١١ ـ ١٤) وارسم خطها البياني:

(١١) $\text{ص} = \left|\dfrac{١}{٣}\,\text{س}\right| - ٣$ ، (١٢) $\text{ص} = ٢\,\text{س} - |١ - \text{س}|$

(١٣) $\text{ص} = \text{س} - \sqrt{\text{س}^{٢}}$ ، (١٤) $\text{ص} = ٢\,|\text{س} - ١| + ٣\,|\text{س} + ٢| - ١$

(١٥) **ادرس تغيرات الدالة المعرفة بالقاعدة:**

$$\text{ص} = (\text{س} - ١)(٢ - \text{س})$$

وارسم خطها البياني.

الخــلاصـــة

لقد قدمنا في هذا الباب:

١ - ذكرنا بأن معادلة مستقيم في المستوي الإحداثي هي معادلة من الدرجـة الأولى في المتغيرين س ، ص وهي من الشكل:

$$\text{ﺃ س} + \text{ب ص} + \text{ﺣ} = 0$$

٢ - أوجدنا معادلة مستقيم علم ميله ويمـر من نقطة معينـة،ومعادلـة مستقيم يمر من نقطتين،ومعادلة مستقيم يمر من نقطة معينة ويتعامد مع مستقيم آخر.

٣ - أعطينا طريقة لحساب بعد نقطة عن مستقيم معين.

٤ - درسنـا الأوضاع المختلفـة لمستقيمين في المستـوي الإحـداثي وعيّنا متى يكـون هذان المستقيمان متوازيين غير منطبقين ومتى يكونان منطبقين أو متقاطعين.

٥ - درسنا أخيراً الدالة الحقيقية وهي الدالـة التي مجالهـا ومجالهـا المقابـل مجموعتـان جزئيتان من ح وبيًّنا كيف يمكن رسم بيان مثل هذه الدوال بشكل تقريبي.

تـمـاريــن عـــامـــة

١ - إذا علمت أن:

$$\text{ب} = (-11 ، 5) ، \text{ﺟ} = (6 ، 7) ، \text{ء} = (1 ، -5)$$

فارسم في المستوى الإحـداثي المثلث ب ﺟ ء وأحسب أطوال أضـلاعه واكتب معادلات المستقيمات الحاملة لخطوطه المتوسطة وارتفاعاته.

٢ - في التمرين السابق أوجد ميل كل مستقيم يحمل ضلعاً من أضلاع المثلث.

٣ - نفرض أن النقاط الأربع:

ب = (٧ ، ٢) ، حـ = (- ٣ ، ٥) ، ء = (- ٢ ، - ٣) ،

هـ = (٥ ، - ٢)

نقاط من المستوي الإحداثي. أوجد طول كل ضلع من أضلاع الرباعي ب حـ ء هـ واحسب ميل كل مستقيم يحمل ضلعاً من أضلاع هذا الرباعي.
أوجد احداثيي منتصف كل ضلع من أضلاع الرباعي المذكور.

٤ - في كل فقرة من هذا التمرين أعطينا نقطة وعدداً. اكتب معادلة المستقيم الذي يمر من النقطة ويقبل العدد ميلاً له.

(١) ب = (٣ ، - ٤) ، م = ٢ ، (٢) حـ = (- ٢ ، - ٣) ، م = $\frac{٢}{٣}$

(٣) ء = (١ ، - ٥) ، م = $\frac{-٣}{٤}$ ، (٤) هـ = (١ ، ٠) ، م = $\frac{١}{٥}$

(٥) و = (- ٣ ، ٤) ، م = ٠ ، (٦) ن = (٠ ، ٥) ، م = ٠

٥ - في كل فقرة من فقرات هذا التمرين أعطينا نقطتين. اكتب معادلة المستقيم المار من هاتين النقطتين:

(١) ب = (٥ ، ١) ، حـ = (- ٤ ، ٢)

(٢) ب = (٠ ، ٧) ، حـ = (٥ ، ٠)

(٣) ب = (٣ ، - ٤) ، حـ (٢ ، - ١)

(٤) ب = (٠ ، ١) ، حـ = (١ ، ٠)

٦ - **في كل فقرة من فقرات هذا التمرين أعطينا معادلتي مستقيمين. أذكر ما إذا كانا متعامدين أو متوازيين. وإذا كانا متقاطعين فعين نقطة تقاطعهما ثم أرسمهما في المستوي الإحداثي.**

(١) ٢ س - ٣ ص + ٧ = ٠ ، ٤ س - ٦ ص - ١٥ = ٠

(٢) ٥ س - ٧ ص + ١٣ = ٠ ، - ١٥ س + ٢١ ص + ٢٥ = ٠

(٣) ٤ س + ٥ ص - ٩ = ٠ ، ١٠ س - ٨ ص + ١٧ = ٠

(٤) ٦ س - ٨ ص + ١٩ = ٠ ، ٤ س + ٣ ص + ٥ = ٠

٧ - في كل فقرة من فقرات هذا التمرين أعطينا مستقيماً ونقطة. أحسب بعد النقطة عن المستقيم.

(١) ٢ س - ٥ ص + ٧ = ٠ ، ب = (١ ، ٣)

(٢) ٣ س + ٤ ص - ٨ = ٠ ، حـ = (٣ ، - ٢)

(٣) س - ٢ ص - ٧ = ٠ ، ء = (١ ، - ٣)

٨ - **في كل فقرة من فقرات هذا التمرين أعطينا دالة معرفة بمعادلة في س وَ ص ادرس هذه الدالة وارسم بيانها.**

(١) ص = س^{٢} + س - ٦ ، (٢) ص = س^{٢} - س - ٢٠

(٣) ص = س^{٣} - س ، (٤) ص = س^{٢} - س^{٣}

(٥) ص = $\sqrt{٤ - س}$ ، (٦) ص = س $\sqrt{س}$

الباب الثاني

البرمجة الخطية

٢ – ١ المتباينة ذات المجهولين.

٢ – ٢ حل نظام مكون من عدة متباينات
من الدرجة الأولى بمجهولين.

٢ – ٣ البرمجة الخطية.

الباب الثاني

البرمجة الخطيـة

لقد رأيت في مقرر الصف الأول حل متباينة من الدرجة الأولى وذات مجهول واحد بشكل بياني

ورأيت أيضاً في هـذا المقرر حل نظام عـدد من المتباينـات ذوات الدرجة الأولى والمجهول الواحد المشترك.

ورأيت في الباب الأول من هذا الكتاب الحل البياني لمعادلة من الدرجة الأولى في المتغـيرين س ، ص.وكذلـك الحل البيـاني لنظام معـادلتين من الدرجة الأولى في المتغيرين س ، ص.

سنهتم في مطلع هذا الباب بحـل متباينـة من الدرجة الأولى بالمتغيرين س ، ص وحل نظام متباينات من هذا النوع.

٢ ـ ١ المتباينة ذات المجهولين

إذا كانت د دالة من مجموعة جزئية من ح × ح إلى ح فإن كلًا من العلاقتين:

$$د\,(س\,،\,ص) \leqslant ٠ \quad ، \quad د\,(س\,،\,ص) > ٠$$

تدعى متباينة بمجهولين رمزنا لهما بالحرفين س ، ص.

سنقصر دراستنا في هذا البنـد على الحـالة التي تكـون فيها د (س ، ص) كثـيرة حـدود من الدرجـة الأولى بالنسبـة لكل من س وَ ص. تـدعى المتباينـة، في هـذه

الحالة، متباينة من الدرجة الأولى بمجهولين، ويمكن كتابتها حسب تعريفها بأحد الشكلين:

$$\text{أ س + ب ص + حـ} \geqslant 0 \quad ، \quad \text{أ س + ب ص + حـ} > 0 \qquad (2-1)$$

حيث نفرض أن أ $\neq 0$ أو ب $\neq 0$

إن حل أي من الشكلين لمتباينة الدرجة الأولى هو مجموعه الأزواج (س ، ص) التي يحقق كل منها الشكل الذي اخترناه.

فلو نظرنا مثلاً في المتباينة:

$$\text{س - ص + ٥} \geqslant 0$$

فإننا نلاحظ أن (٣ ، ٥) عنصر من مجموعة حل هذه المتباينة لأن:

$$3 - 5 + 5 \geqslant 0$$

وأن (- ٢ ، ٣) عنصر آخر من مجموعة الحل لأن:

$$-2 - 3 + 5 = 0$$

إن الزوج = (-٢ ، ٣) لا يمثل عنصراً من مجموعة حل المتباينة

$$\text{س - ص + ٥} > 0$$

لأن $-2 - 3 + 5 \not> 0$

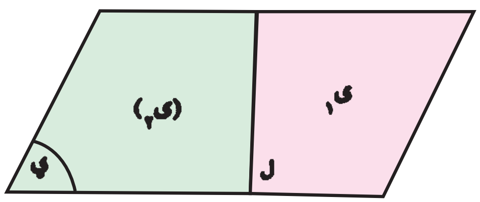
بما أن كل زوج مرتب من الأعداد الحقيقية يمكن تمثيله بنقطة من المستوي الإحداثي، فإننا، في أغلب الأحيان، سنعطي مجموعة حل متباينة الدرجة الأولى

بمجهولين على صورة مجموعة نقاط من هذا المستوي.

نصف المستوي المفتوح ونصف المستوي المغلق

إذا رسمنا في المستوي (ي) مستقيماً (ل) فإنه يقسم هذا المستوي الى نصفي مستوٍ رمزنا لهما في الشكل (٢ - ١) بالحرفين ($ي_١$) وَ ($ي_٢$). نسمي المستقيم ل حداً لهما.

إذا اعتبرنا المستقيم ل محتوى في نصف المستوي ($ي_١$) سمينا ($ي_١$) نصف مستوٍ مغلق ورسمنا (ل) مستقيماً غير منقط أما إذا اعتبرنا (ل) غير محتوى في ($ي_١$) فإن



شكل (٢ - ١)

($ي_١$) يدعى نصف مستوٍ مفتوح ونرسم في هذه الحالة المستقيم ل منقطاً.

إن النظرية التالية ستربط بين حل المعادلة:

$$ا س + ب ص + حـ = ٠$$

وبين حل كل من المتباينتين:

$$ا س + ب ص + حـ \geqslant ٠ \quad ، \quad ا س + ب ص + حـ > ٠$$

نظرية (٢ - ١)

يقسم المستقيم ل، الذي هو بيان المعادلة:

$$\text{أ س + ب ص + جـ = ٠} \qquad (٢ - ٢)$$

المستوى الإحداثي الى نصفي مستوٍ مفتوحين يكون على أحدهما:

$$\text{أ س + ب ص + جـ} > ٠$$

ويكون على الثاني:

$$\text{أ س + ب ص + جـ} < ٠$$

ملاحظة (٢ ـ ١)

إذا كانت المتباينة من الشكل:

$$\text{أ س + ب ص + جـ} \geq ٠$$

فإن نصف المستوي الذي يحققها نصف مستوٍ مغلق ينتج عن نصف المستوي المفتوح الذي يحقق المتباينة:

$$\text{أ س + ب ص + جـ} > ٠$$

بإضافة المستقيم ل الذي يمثل المعادلة (٢ - ٢)

ملاحظة (٢ ـ ٢)

لمعرفة نصف المستوي الذي يمثل حل المتباينة

$$\text{أ س + ب ص + جـ} > ٠$$

نختـار نقطة من المسـتوي الإحداثي لا تقـع على المستقيم ل فـإذا حققت هذه النقـطة المتباينة المفروضة فـإن مجموعـة حل هـذه المتباينـة هي نصف المستوي المفتـوح المحدد بالمستقيم ل والذي تقع فيه هذه النقطة،أمـا إذا لم تحقق النقطة التي اخترناها هذه المتباينة فإن حل المتباينة هو النصف الآخر للمستوي الاحداثي.

مثال (٢-١)

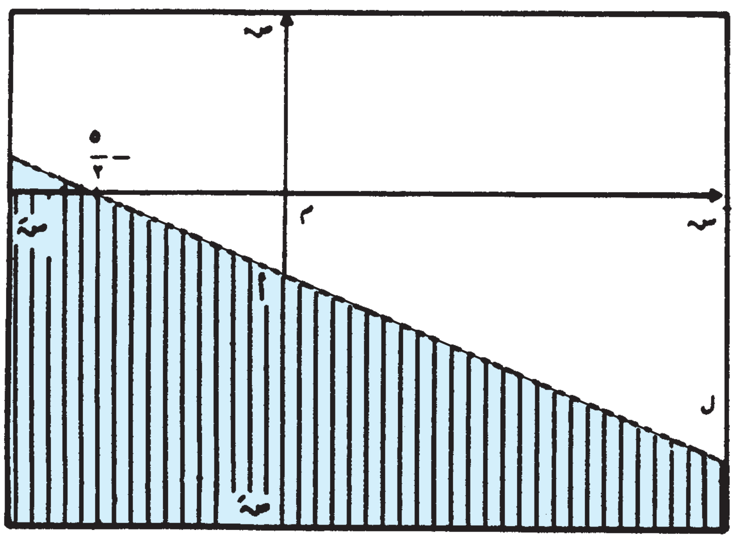
لإيجاد حل المتباينة:

٢ س + ٥ ص + ٥ < ٠

نرسم المستقيم ل الذي معادلته:

٢ س + ٥ ص + ٥ = ٠

كما هو ظاهر في الشكل (٢ ـ ٢).



شكل (٢ ـ ٢)

نلاحظ أن النقطة م لا تحقق المتباينة لذا فإن حل المتباينة المفروضة هو مجموعة نقاط نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم ل والذي لا تقع فيه النقطة (٠ ، ٠) وهو نصف المستوي المخطط الظاهر في الشكل (٢ ـ ٢).

مثال (٢-٢)

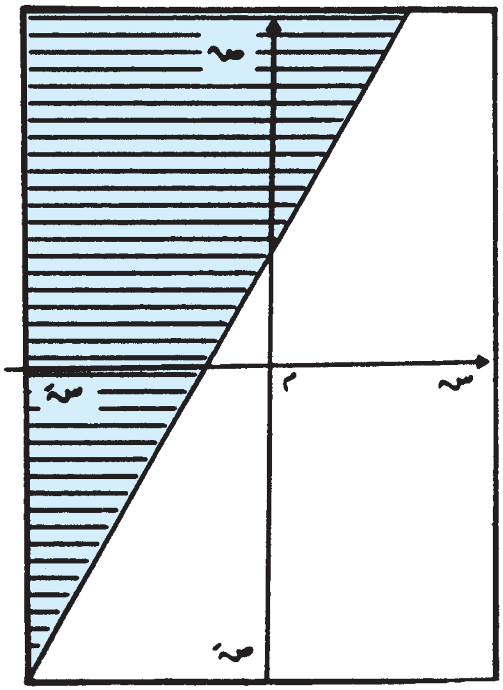
لدينا المتباينة :

$$٤ س - ٢ ص + ٣ \geqslant ٠$$

ولنرسم في المستوي المستقيم ل الممثل للمعادلة :

$$٤ س - ٢ ص + ٣ = ٠$$

يقسم هذا المستقيم المستوي الإحداثي الى نصفين تقع في أحدهما النقطة (٠ ، ٠). من الملاحظ أن هذه النقطة لا تحقق المتباينة المفروضة لذا فإن حل المتباينة هو نصف المستوي الذي لا تقع فيه النقطة م = (٠ ، ٠) وهو نصف المستوي المخطط بالاضافة الى المستقيم ل. انظر الشكل (٢ ـ ٣).



شكل (٢ ـ ٣)

٢ ـ ٢ حل نظام مكون من عدة متباينات من الدرجة الأولى بمجهولين

إذا أردنا حل متباينتين من الدرجة الأولى بمجهولين أو أكثر من ذلك فإننا نبحث عن الحل المشترك لهذه المتباينات أي نبحث عن تقاطع المناطق الواقعة في المستوي الاحداثي (أنصاف مستويات) والتي يمثل كل منها حل واحدة من هذه المتباينات.

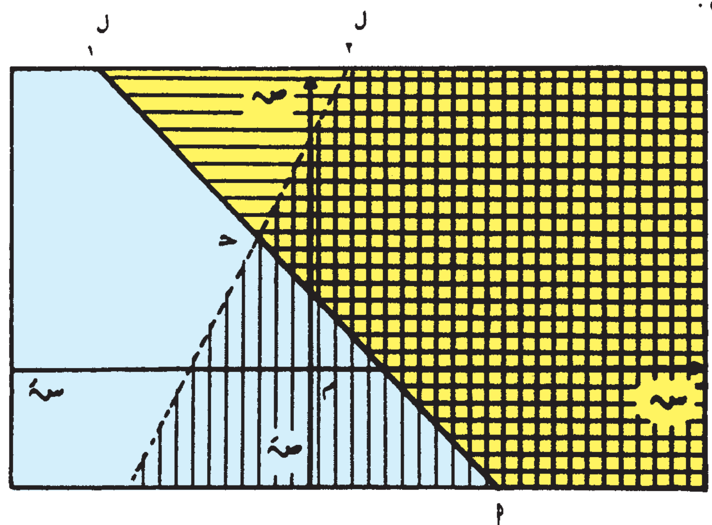
سنوضح ما سبق بالمثال التالي:

مثال (٢-٣)

إذا أردنا حل المتباينتين:

س + ص − ١ ≥ ٠ ، − ٢ س + ص − ٣ < ٠

معاً فإن علينا أن نجد الأزواج المرتبة (س ، ص) التي تحقق كلاً من هاتين المتباينتين.



شكل (٢-٤)

نرسم المستقيم الذي معادلته

س + ص − ١ = ٠

متصلا، ونرسم المستقيم الذي معادلته

− ٢ س + ص − ٣ = ٠

منقطاً.

النقطة م لا تحقق المتباينة الأولى لذا يكون حلها نصف المستوي المحدد بالمستقيم ل$_{١}$ والذي لا تقع فيه النقطة م. والنقطة م تحقق المتباينة الثانية لذا يكون حلها نصف المستوي المحدد بالمستقيم ل$_{٢}$ والذي تقع فيه النقطة م.

الحل المشترك للمتباينتين هو تقاطع نصفي المستويين الممثلين لحلي هاتين المتباينتين وهي المنطقة الملونة باللون الأخضر في الشكل (٢ − ٤) بالإضافة إلى نصف المستقيم [أ حـ [.

حل بيانياً كلًا من المتباينات الواردة في التمارين (١ ـ ٦)

(١) س + ص − ١ ≥ ٠ ، (٢) س − ٣ ص + ٢ < ٠

(٣) س + ص + ٣ > ٠ ، (٤) س + ٣ ص + ١ ≤ ٠

(٥) ٢ س − ٣ ص + ٥ ≥ ٠ ، (٦) ٢ س + ٥ ص − ١ ≤ ٠

حل نظام المتباينات الوارد في كل من التمارين (٧ ـ ١٤)

(٧) ٢ س + ٣ ص > ٠ ، س - ٢ ص + ١ < ٠

(٨) ص + ١ < ٠ ، س - ص < ٠

(٩) ٢ س - ص + ٤ ≥ ٠ ، س + ص - ١ < ٠

(١٠) س + ٢ ص - ٤ > ٠ ، - س - ٢ ص + ١٠ ≥ ٠

(١١) س - ٢ ص - ٢ > ٠ ، - س + ٢ ص + ٥ ≤ ٠

(١٢) ٣ س - ٤ ص + ١٤ < ٠ ، ٣ س + ٢ ص - ١٦ < ٠
، ٢ س + ٣ ص - ٢ < ٠

(١٣) ٢ س + ص - ٣ ≥ ٠ ، س - ٣ ص - ٥ < ٠
، س + ٢ > ٠

(١٤) ٢ س - ٧ ص + ١٣ > ٠ ، ٣ س + ٤ ص + ٥ ≥ ٠
، ٨ س + ص - ٣٥ < ٠

٢ ـ ٣ البـرمـجـة الخطيــة

تقوم في العصر الحاضر جل الأعمال وبصـورة خاصـة الصناعيـة منها، عـلى تخطيط مسبق. يخـطط كل معمـل خطوات العمـل فيه بشكـل دقيق هادفـاً من ذلك تسهيـل العمل وتخفيض تكاليف الإنتاج والحصول على أكبر الأرباح وأوسع الأسواق وغير ذلك من الأهداف.

تنفيذ هذا التخطيط يدعى برمجة وتقوم البرمجة على تمثيل الهدف (زيادة الإنتاج،

خفض التكاليف، . . .) بمعادلات ذوات متغيرات متعددة تحوي بالإضافة الى هذه المتغيرات متغيراً إضافياً يمثل الهدف نسميه وسيطاً. يمثل واقع العمل وشروطه بمتباينات أو معادلات نسميها القيود.

سنقتصر هنا على حالات سهلة تكون القيود فيها متباينات ومعادلات من الدرجة الأولى بمتغيرين كما أن الهدف سيصاغ بمعادلة من الدرجة الأولى بمتغيرين أيضاً من الشكل:

أ س + ب ص = ك حيث ك هو الوسيط

بسبب ما تقدم نسمي هذا النوع من البرمجة برمجة خطية.

لحل مسألة برمجة خطية نحل متباينات القيود فنتوصل إلى منطقة في المستوي الإحداثي تمثل مجموعة حل هذه المتباينات آنياً. نسمي هذه المنطقة فضاء الحل.

إن المطلوب هو التوصل إلى قيمة للوسيط تمثل الحل المفضل وعلينا أن نبحث عن مستقيم من المستقيمات:

أ س + ب ص = ك (٢ - ٣)

يتقاطع مع فضاء الحل بنقطة أو أكثر يكون من أجلها الوسيط ك ممثلاً للوضع الأفضل الذي نرجوه. قد يكون الوضع الأفضل، حسب المسألة المدروسة، هو الموافق لأكبر قيمة للوسيط أو لأصغر قيمة له. بشرط أن يتقاطع المستقيم (٢-٣) مع فضاء الحل.

إذا رمزنا بالحرف (م) للمستقيم

$$أ\text{س} + ب\text{ص} = ك$$

فإن الحل يستدعي تعيين الوضع الأمثل لهذا المستقيم.

نلاحظ ما يلي:

(أ) عندما يتغير الوسيط (ك) فإن المعادلة (٢ - ٣) تمثل مجموعة مستقيمات متوازية وتوازي المستقيم (ى) الذي معادلته:

$$أ\text{س} + ب\text{ص} = ٠$$

(ب) إذا حسبنا بعد النقطة م = (٠ ، ٠) عن المستقيم (هـ) بالطريقة التي قدمت سابقاً، نجد:

$$ع = \frac{|ك|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$

ينتج عن ذلك أنه عندما يزداد العدد |ك| (ك بالقيمة المطلقة) فإن المستقيم هـ يبتعد عن المستقيم ى.

(حـ) إذا كان المطلوب أن يكون ك أكبر ما يمكن فإن المستقيم المناسب (هـ) هو أبعد مستقيم من المستقيمات (٢ - ٣) عن المستقيم (ى) شرط أن يقطع هذا المستقيم فضاء الحل.

وإذا كان المطلوب أن يكون ك أصغر ما يمكن فإن المستقيم المناسب هو المستقيم الموازي للمستقيم (ى) والذي يقطع فضاء الحل ويكون بعده عن (ى) أقل ما يمكن.

ملاحظة (٢ ـ ٣)

إذا كان الوضع المناسب مكوناً من حالة وحيدة تمثل بنقطة من نقاط فضاء الحل نجرب في هذه الحالة رؤوس فضاء الحل ونأخذ الرأس الذي يعطى للتركيب:

$$أ س + ب ص$$

القيمة المناسبة (القيمة العظمى أو القيمة الصغرى).

مثال (٢-٤)

نحتاج لصناعة نوع أول من المعجنات إلى ٨٠ غراماً من الدقيق و١٠ غرامات من السمن لكل قطعة ونحتاج لصنع قطعة من نوع آخر من المعجنات إلى ٤٠ غراماً من الدقيق و٢٠ غراماً من السمن. نريد أن نصنع أكبر عدد ممكن من القطع ولكننا لا نملك سوى ١٦٠٠ غراماً من الدقيق و٤٨٠ غراماً من السمن فكم قطعة يمكننا أن نصنع من كل نوع؟

الحـل:

نفرض أن عدد القطع المصنوعة من النوع الأول س ومن النوع الثاني ص فتكون قيود الحل هي:

$$٨٠ س + ٤٠ ص \leqslant ١٦٠٠ \quad \Leftrightarrow \quad ٢ س + ص \leqslant ٤٠$$

$$١٠ س + ٢٠ ص \leqslant ٤٨٠ \quad \Leftrightarrow \quad س + ٢ ص \leqslant ٤٨$$

$$س \geqslant ٠ \quad ، \quad ص \geqslant ٠$$

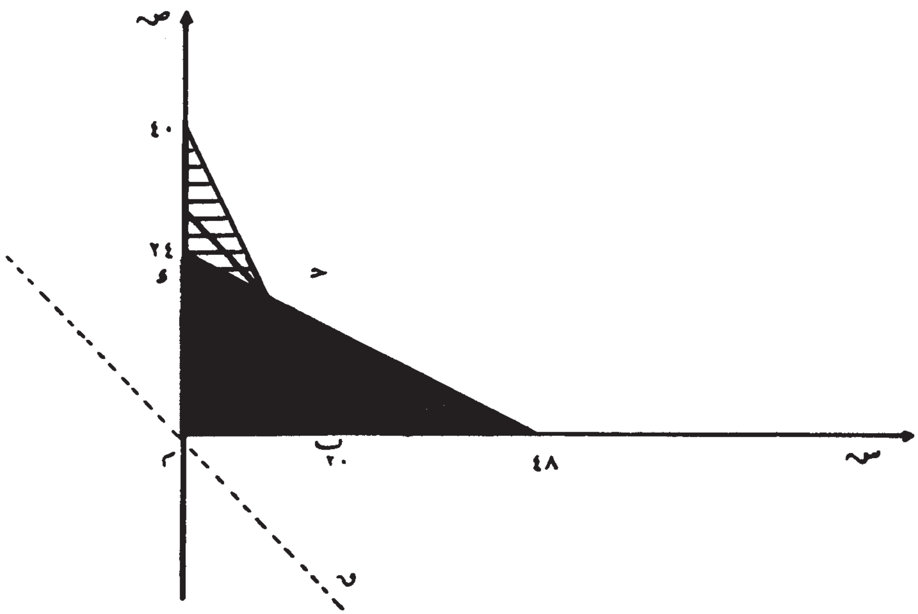
أما معادلة الهدف فهي :

$$س + ص = ك \quad ، \quad س \ni ط$$

والرغبة هي أن يكون ك أكبر ما يمكن.

من أجل المتغيرين $س \geqslant ٠$ ، $ص \geqslant ٠$ نرسم الشكل في الربع الأول من المستوي الإحداثي فقط.

في الشكل (٢ – ٥) نظهر حلول متباينات القيود، والمنطقة الملونة باللون الأخضر تمثل فضاء الحل وهي داخل المضلع م ب حـ ء ومحيطه حيث :



شكل (٢ - ٥)

م = (٠ ، ٠) ، ب = (٢٠ ، ٠) ، حـ = $\left(\frac{٣٢}{٣} ، \frac{٥٦}{٣}\right)$ ،

ء = (٠ ، ٢٤)

المستقيم ع يمثل المعادلة:

س + ص = ٠

والمستقيم م المار من النقطة حـ والموازي لِ ع هو المستقيم الموافق لأكبر قيمة للوسيط ك إذن النقطة حـ هي التي تمثل الحل الأمثل حيث:

$$س = \frac{٣٢}{٣} \quad ، \quad ص = \frac{٥٦}{٣}$$

$$ك = س + ص = \frac{٨٨}{٣} = ٢٩ \frac{١}{٣}$$

الشرط أن يكون ك عدداً طبيعياً لذا نأخذ ك = ٢٩ ونوجد تقاطع المستقيم

س + ص = ٢٩

مع كل من المستقيمين:

٢ س + ص = ٤٠ ، س + ٢ ص = ٤٨

فنجد الحلين الموافقين (س = ١١ ، ص = ١٨) ،
(س = ١٠ ، ص = ١٩)

التحقيق:

الحل الأول: ١١ × ٨٠ + ١٨ × ٤٠ = ١٦٠٠ غ دقيق ،

١١ × ١٠ + ١٨ × ٢٠ = ٤٧٠ غ سمن

الحل الثاني: ١٠ × ٨٠ + ١٩ × ٤٠ = ١٥٦٠ غ دقيق ،

١٠ × ١٠ + ١٩ × ٢٠ = ٤٨٠ غ سمن

مثال (٢-٥)

يصنع معمل نوعين من أجهزة الراديو ويبيع الجهاز من النوع الأول بمبلغ ٤٠٠ ريال ويبيع الثاني بمبلغ ٣٠٠ ريال. يريد تحديد برنامج إنتاجه اليومي ليكون رقم بيعه أكبر ما يمكن. شروط العمل كما يلي:

(أ) ثمن المواد الأولية للنوع الأول ١٢٠ ريال وللنوع الثاني ٦٠ ريالاً وهناك قيود تفرض عدم تجاوز كمية المواد الأولية التي ثمنها ٤٢٠ ريال، في اليوم الواحد.

(ب) تكاليف اليد العاملة لصناعة هذه الأجهزة هي ٤٠ ريالاً للأول و١٠ ريالات للثاني وإن ما يحويه المعمل من عمال لا يسمح أن يزيد الإنفاق في هذا الباب عن ١٢٠ ريال في اليوم.

(حـ) تكاليف الإدارة والتسويق ترتفع إلى ٤٠ ريالاً لكل جهاز من كل نوع ومن المقرر أن لا يزيد الانفاق اليومي من أجل ذلك عن ٢٠٠ ريال.

الحل:

إن ضرورة تمثيل عدد كل نوع من الأجهزة بعدد موجب يخولنا أن نرسم الشكل في ربع المستوي الإحداثي الأول فقط أي: س $\geqslant$ ٠ ، ص $\geqslant$ ٠ وذلك بعد أن نفرض:

س عدد أجهزة النوع الأول التي تصنع في كل يوم

ص عدد أجهزة النوع الثاني التي تصنع في كل يوم.

القيود:

١٢٠ س + ٦٠ ص $\leqslant$ ٤٢٠ $\Leftrightarrow$ ٢ س + ص $\leqslant$ ٧

٤٠ س + ١٠ ص $\leqslant$ ١٢٠ $\Leftrightarrow$ ٤ س + ص $\leqslant$ ١٢

٤٠ س + ٤٠ ص ≤ ٢٠٠ ⟺ س + ص ≤ ٥

لنرسم المستقيمات الممثلة للمعادلات:

٢ س + ص = ٧ ، ٤ س + ص = ١٢ ، س + ص = ٥

ولنحدد حلول متباينات القيود وفضاء الحل وهو كما هو ظاهر في الشكل (٢-٦)، المنطقة المخططة.

معادلة الهدف حيث ك يمثل رقم المبيعات اليومية هي:

٤٠٠ س + ٣٠٠ ص = ك

رؤوس فضاء الحل هي:

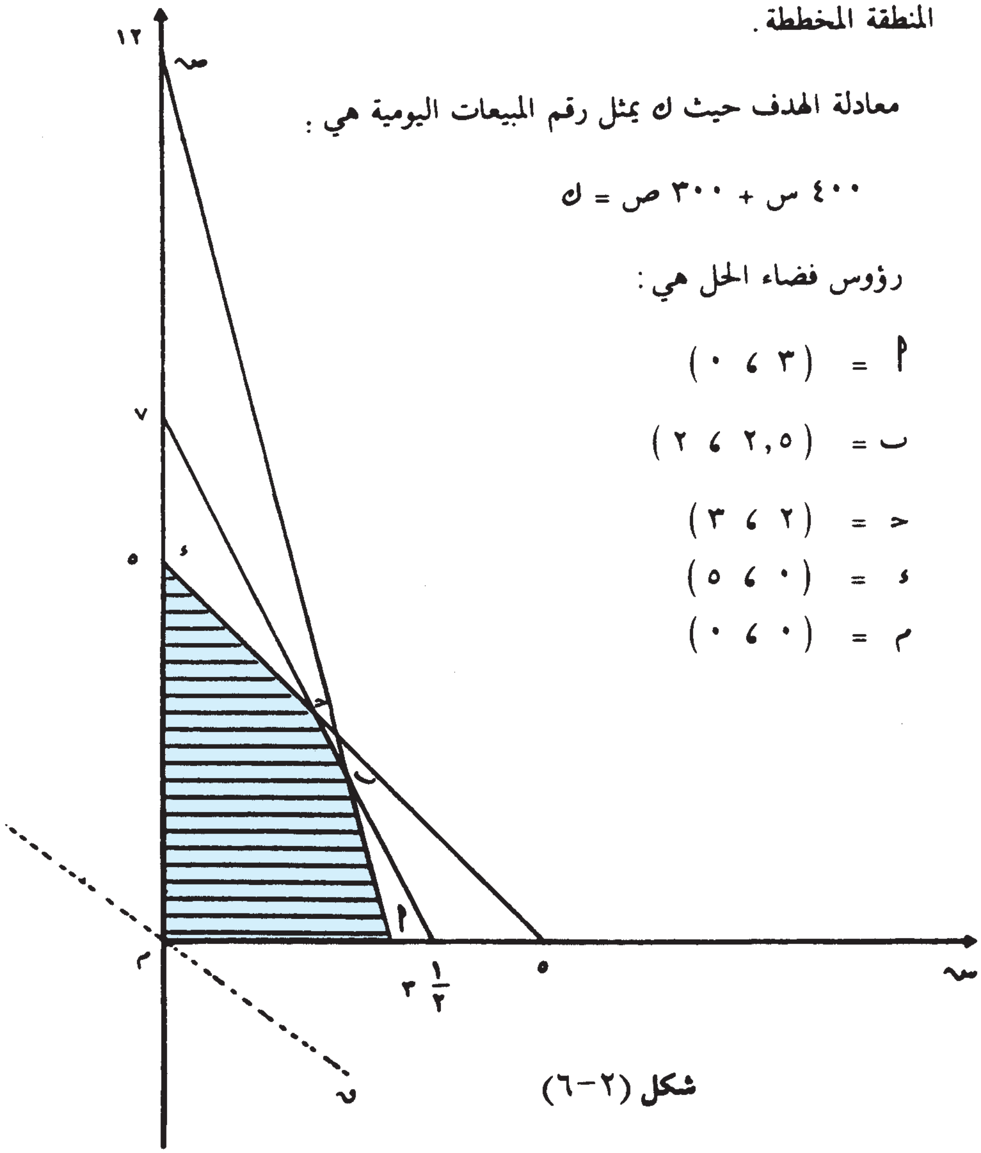
أ = (٣ ، ٠)

ب = (٢,٥ ، ٢)

جـ = (٢ ، ٣)

د = (٠ ، ٥)

م = (٠ ، ٠)



شكل (٢-٦)

المستقيم ى الظاهر في الشكل هو المستقيم الذي معادلته:

$$٤٠٠ \text{ س} + ٣٠٠ \text{ ص} = ٠ \quad \Leftrightarrow \quad \text{ص} = \frac{-٤}{٣} \text{ س}$$

إذا رمزنا بالحروف $ل_١$ ، $ل_٢$ ، $ل_٣$ ، $ل_٤$ ، للمستقيمات الموازية للمستقيم ى والمارة على الترتيب من النقاط أ ، ب ، حـ ، ء وهي رؤوس فضاء الحل باستثناء م فإن معادلة هذه المستقيمات هي:

$ل_١$: ٣ ص + ٤ س = ١٢ ، بعد م عن $ل_١$ هو $ع_١ = \frac{١٢}{٥}$

$ل_٢$: ٣ ص + ٤ س = ١٦ ، بعد م عن $ل_٢$ هو $ع_٢ = \frac{١٦}{٥}$

$ل_٣$: ٣ ص + ٤ س = ١٧ ، بعد م عن $ل_٣$ هو $ع_٣ = \frac{١٧}{٥}$

$ل_٤$: ٣ ص + ٤ س = ١٥ ، بعد م عن $ل_٤$ هو $ع_٤ = \frac{١٥}{٥}$

إذن المستقيم $ل_٣$ يمثل الحل الأمثل حيث:

٣ ص + ٤ س = ١٧

والوضع الأمثل هو في رأس مضلع فضاء الحل الذي يمر منه هذا المستقيم وهو حـ حيث:

س = ٢ ، ص = ٣

ويكون عندها رقم المبيع:

ك = ٤٠٠ × ٢ + ٣٠٠ × ٣ = ١٧٠٠

وهكذا نجد أن الإنتاج الأمثل لهذا المصنع هو أن ينتج جهازين من النوع الأول وثلاثة أجهزة من النوع الثاني في كل يوم.

تمارين (٢ - ٢)

أوجد في كل من التمارين (١ - ٤) الحل البياني لنظام المتباينات الوارد فيه :

(١) ٢ س + ص ≤ ٥ ، س + ٢ص ≤ ٥ ، س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

(٢) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س ≤ ٥ ، ص ≥ ٣ ، ص ≤ س + ٣

(٣) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢ س + ص ≥ ٦ ، س + ٢ ص ≥ ٠ ،

س + ص ≥ ٥

(٤) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢ س + ص ≥ ٥ ، ٢ س - ص ≥ ٠ ،

س + ص < ٥

(٥) عد الى التمرين (١) وعين على الشكل نفسه النقاط :

(٠ ، ٠) ، (١ ، ٠) ، (٠ ، ١) ، (١ ، ١) ،

(٢ ، ٠) ، (٠ ، ٢)

واحسب في كل من هذه النقاط قيمة المجموع ٣٠ س + ١٦ ص. ما هي نقطة حل المتباينات التي تجعل س + ص أكبر ما يمكن وما هي نقطة هذا الحل التي تجعل هذا المجموع أصغر ما يمكن.

(٦) ارسم في المستوي الاحداثي الحل البياني لنظام المتباينات :

س + ص ≤ ٤ ، ٢ س + ص ≤ ٦ ، س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

ثم عين على الشكل النقاط :

(٠ ، ٠) ، (١ ، ٠) ، (٢ ، ٠) ، (٣ ، ٠) ، (٠ ، ١) ،
(١ ، ١) ، (٢ ، ١) ، (٠ ، ٢) ، (١ ، ٢) ، (٠ ، ٣) ،
(١ ، ٣) ، (٠ ، ٤) ، (٢ ، ٢) ، (٠ ، ٤) ، (٤ ، ٠) ،
(٠ ، ٦).

احسب قيمة ٣ س + ص عند كل نقطة من هذه النقاط. عين نقطة الحل التي تكون عندها قيمة ٣ س + ص أكبر ما يمكن ونقطة الحل التي تكون عندها هذه القيمة أصغر ما يمكن.

(٧) يعمل في مصنع صغير للملابس الجاهزة عاملان. ينتج هذا المصنع نوعين من الملابس. لصنع واحد من النوع الأول يعمل العامل الأول ساعة كاملة ويعمل الثاني ساعتين ونصف. لإنتاج ثوب من النوع الثاني يلزم أن يعمل العامل الأول أربع ساعات والثاني ساعتين. فإذا كان العامل الأول لا يعمل أكثر من ثماني ساعات والعامل الثاني لا يعمل أكثر من عشر ساعات يومياً وإذا كان ربح المصنع في كل ثوب من النوع الأول ٦٠ ريالاً وربحه في كل ثوب من النوع الثاني ١٠٠ ريال، فاحسب العدد الذي يجب أن يصنعه المعمل من كل نوع ليحصل على أكبر ربح ممكن.

(٨) مصفاة بترول تنتج بطريقتين مختلفتين ثلاثة أنواع من البنزين: عادي وجيد وممتاز. الجدول التالي يبين انتاج المعمل وتكاليف العمل بكل من الطريقتين.

	ممتاز	جيد	عادي	التكاليف
جالون بالساعة انتاج الطريقة الأولى	٢٠٠	٣٠٠	٣٠٠	٤٥٠
جالون بالساعة انتاج الطريقة الثانية	٣٠٠	٤٠٠	٢٠٠	٦٠٠
الكمية المطلوبة	١٠٨٠٠	١٥٦٠٠	٩٠٠٠	

فكم ساعة يجب أن تعمل المصفاة بكل من الطريقتين لتفي بالتزاماتها بأقل التكاليف.

الخلاصة

قدمنا في هذا الباب

١ ـ الطريقة البيانية لحل متباينة من الدرجة الأولى بمجهولين،

٢ ـ حل نظام متباينات من الدرجة الأولى بمجهولين بيانياً،

٣ ـ فكرة مبسطة عن البرمجة الخطية وطريقة ايجاد الحل الأمثل.

تمارين عامة

حل بيانياً نظام المتباينات الواردة في التمارين ١ ـ ٤:

(١) ٢ س − ٣ ص − ٥ ≥ ٠ ، − س + ٥ ص − ١١ ≤ ٠

(٢) س − ٧ ص − ٣ > ٠ ، − ٣ س − ٦ ص − ٩ ≤ ٠ ،

س − ص > ١

(٣) ٢ س − ٤ ص + ١٢ > ٠ ، − س − ص + ١ ≥ ٠ ،

س + ٢ ص > ٤

(٤) ٥ س − ١٠ ص ≤ ١٥ ، ٢ س − ص + ٦ ≥ ٠ ،

س + ٥ ص ≥ ٥

(٥) يتكون غذاء لنوع من الحيوانات من مادتين أ ، ب فإذا كانت كل وحدة من

النوع أ تشمل على ١٠ غ بروتين و ٠,٥ غ دهن و١٠ غ من الكربوهيدرات بينما تشمل كل وحدة من النوع ب على ٥ غ بروتين و١ غ دهن و١٠ غ كربوهيدرات ، وإذا كان ثمن الوحدة من النوع الأول ٢٠ هللة وثمن الوحدة من النوع الثاني ١٥ هللة فما هي عدد الوحدات التي يجب أخذها من كل من النوعين للحصول على كمية تحوي ١٠٠ غ من البروتين و١٠ غ من الدهن و١٨٠ غرام من الكربوهيدرات على الأقل وبأقل كلفة ممكنة.

(٦) نوعان من أقراص الأدوية تحوي في تركيبها على الأسبيرين والبيكربونات والكودايين. يدخل في تركيب كل قرص من النوع الأول قمحتان من الأسبيرين و٥ قمحات من البيكربونات وقمحة واحدة من الكودايين، ويدخل في تركيب كل قرص من النوع الثاني قمحة واحدة من الأسبيرين و٨ قمحات من البيكربونات و٦ قمحات من الكودايين فما هو أقل عدد ممكن من كل من النوعين يعطي ١٢ قمحة من الأسبيرين و٧٤ قمحة من البيكربونات و٢٨ قمحة من الكودايين على الأقل.

(القمحة وحدة وزن تستخدم في وزن مكونات الأدوية).

الباب الثالث

المصفوفات

الباب الثالث

المصفوفات

٣ـ١ مقدمة

إن المصفوفات جمع كلمة مصفوفة وهي من المفاهيم الرياضية التي اتسعت استخداماتها في الوقت الحاضر، فشملت الكثير من فروع المعرفة، فهي تستعمل من قبل المختصين في علم الاحصاء وعلم الاقتصاد وعلم الاجتماع وغير ذلك، فضلاً عن الدور الكبير الذي تلعبه في الرياضيات وبخاصة فيما يسمى «الجبر الخطي». وأول من لاحظ المصفوفات واستخدمها هو العالم كيلي (١٨٢١ ـ ١٨٩٥ م).

سنقدم في هذا الباب دراسة مبسطة وموجزة للمصفوفات وبعض تطبيقاتها البسيطة مراعين في ذلك أموراً أولها الوقت المخصص لهذا الموضوع، وثانيها المستوى الدراسي وثالثها طبيعة تخصص الدارس.

لنفرض أن لدينا أربعة طلاب أ، ب، حـ، ء كانت درجاتهم في اختبار مادة الاحصاء هي على الترتيب ٨٥، ٧٢، ٦٣، ٩٠ وفي الرياضيات ٧٥، ٨٤، ٧٠، ٨٨ على الترتيب، أما درجاتهم في الفيزياء فهي على الترتيب ٦٠، ٧٦، ٥٨، ٨٤.

إنه يمكن تنظيم هذه المعلومات في جدول مستطيل يتكون من ثلاثة صفوف وأربعة أعمدة كما يلي:

	٤	ﺣ	ب	ﺃ
الاحصاء	٩٠	٦٣	٧٢	٨٥
الرياضيات	٨٨	٧٠	٨٤	٧٥
الفيزياء	٨٤	٥٨	٧٦	٦٠

إن الصف الأول في هذا المستطيل يعبر عن درجات الطلاب في الاحصاء والصف الثاني يعبر عن درجاتهم في الرياضيات، أما الصف الثالث فيعبر عن درجات الطلاب في الفيزياء. كما أن العمود الأول يعبر عن درجات الطالب ﺃ في المواد الثلاث معاً والعمود الثاني يعبر عن درجات الطالب ب في المواد الثلاث معاً، والعمود الثالث يعبر عن درجات الطالب ﺣ في المواد الثلاث معاً، أما العمود الرابع فيعبر عن درجات الطالب ٤ في المواد الثلاث معاً.

إن هذا الجدول يعبر عن مصفوفة، وقد اصطلح على أن تكتب على الصورة:

$$\begin{bmatrix} ٩٠ & ٦٣ & ٧٢ & ٨٥ \\ ٨٨ & ٧٠ & ٨٤ & ٧٥ \\ ٨٤ & ٥٨ & ٧٦ & ٦٠ \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{pmatrix} ٩٠ & ٦٣ & ٧٢ & ٨٥ \\ ٨٨ & ٧٠ & ٨٤ & ٧٥ \\ ٨٤ & ٥٨ & ٧٦ & ٦٠ \end{pmatrix}$$

وسنختار الاصطلاح الأول في هذا الكتاب. كما تجدر الملاحظة الى أن المصفوفة السابقة مكونة من ١٢ عنصراً موزعة في ٣ صفوف و٤ أعمدة لذا يقال إنها مصفوفة من النوع ٣ × ٤. وبصفة عامة نقدم التعريفين الآتيين:

تعريف (٣ ـ ١)

المصفوفة عبارة عن تنظيم عددي مؤلف من م ن عنصراً، مرتبة في جدول مستطيل، مكون من م صفاً، ن عموداً، حيث م ، ن عددان طبيعيان.

تعريف (٣ ـ ٢)

نقول عن مصفوفة إنها من النوع م × ن، وتقرأ م في ن، إذا كانت تحتوي صفوفاً عددها م وأعمدة عددها ن. كما نقول، اختصاراً، إنها مصفوفة م × ن، حيث م ، ن عددان طبيعيان.

سنرمز للمصفوفة بحرف تحته خط مثل أ ، ب ، حـ ، . . . ، خشية الالتباس بين المصفوفة وعناصرها.

كما يجب الانتباه إلى أن عناصر أي مصفوفة في هذا الكتاب تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

مثال (٣-١)

إن كلاً من التنظيمات العددية التالية هو عبارة عن مصفوفة حسب التعريف (٣-١):

(١) $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ٥ & ٧ & ١- \end{bmatrix}$

(٢) $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٠ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$

(٣) $\underline{حـ} = \begin{bmatrix} ب & أ \\ ء & حـ \end{bmatrix}$

(٤) $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} \text{س}_{١١} & \text{س}_{٢١} & \text{س}_{٣١} & \text{س}_{٤١} \\ \text{س}_{١٢} & \text{س}_{٢٢} & \text{س}_{٣٢} & \text{س}_{٤٢} \\ \text{س}_{١٣} & \text{س}_{٢٣} & \text{س}_{٣٣} & \text{س}_{٤٣} \end{bmatrix}$

لاحظ أن المصفوفة $\underline{\text{أ}}$ في الفقرة (١) هي عبارة عن ستة عناصر مرتبة في صفين، وثلاثة أعمدة.

إن عناصر الصف الأول هي ٢ ، ١ ، ٣ وعناصر الصف الثاني هي - ١ ، ٧ ، ٥ . بينما عناصر العمود الأول هي ٢ ، - ١ ، وعناصر العمود الثاني هي ١ ، ٧ ، وعناصر العمود الثالث هي ٣ ، ٥ .

وحسب التعريف (٣ - ٢) نقول إن $\underline{\text{أ}}$ مصفوفة من النوع ٢ × ٣، حيث م = ٢ ، د = ٣ .

إن $\underline{\text{ب}}$ مصفوفة من النوع ٣ × ٢ ، حيث م = ٣ ، د = ٢ ،

$\underline{\text{حـ}}$ مصفوفة من النوع ٢ × ٢ ، حيث م = ٢ ، د = ٢ ،

أما المصفوفة $\underline{\text{س}}$ فهي من النوع ٣ × ٤ (لماذا؟).

تـــمـــريـن شـفـهـــي :

في كل من الفقرات (٢) ، (٣) ، (٤) عين عناصر الصفوف والأعمدة لكل مصفوفة كما فعلنا في الفقرة (١).

بصفة عامة إذا كانت $\underline{\text{س}}$ مصفوفة من النوع م × د، فإننا نكتب $\underline{\text{س}}$ على الصورة التالية:

$$\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} \text{س}_{١١} & \text{س}_{١٢} & \cdots & \text{س}_{١و} \\ \text{س}_{٢١} & \text{س}_{٢٢} & \cdots & \text{س}_{٢و} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{س}_{م١} & \text{س}_{م٢} & \cdots & \text{س}_{مو} \end{bmatrix}$$

ورغبة في الاختصار، نكتب المصفوفة $\underline{\text{س}}$ بالصورة:

$\underline{\text{س}} = [\text{س}_{\text{ى هـ}}]$ حيث ى = ١ ، ٢ ، ٣ ، . . ، م .

هـ = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، و .

إن $\text{س}_{\text{ى هـ}}$ يمثل عنصراً اختيارياً (عنصراً عاماً) في المصفوفة $\underline{\text{س}}$ ، حيث ترمز ى إلى ترتيب الصف الذي يقع فيه العنصر، بينما ترمز هـ إلى ترتيب العمود الذي يقع فيه هذا العنصر. وبذلك يتعين العنصر $\text{س}_{\text{ى هـ}}$ تماماً بمعرفة قيمتي ى، هـ معاً، وبعبارة أخرى، فإن العنصر $\text{س}_{\text{ى هـ}}$ هو عنصر المصفوفة $\underline{\text{س}}$ الذي يقع في تقاطع الصف ذي الترتيب ى والعمود ذي الترتيب هـ.

إن عناصر الصف ذي الترتيب ى في المصفوفة $\underline{\text{س}}$ هي:

$\text{س}_{\text{ى}١}$ ، $\text{س}_{\text{ى}٢}$ ، $\text{س}_{\text{ى}٣}$ ، ... ، $\text{س}_{\text{ى و}}$.

وعناصر العمود ذي الترتيب هـ في المصفوفة $\underline{\text{س}}$ هي:

$\text{س}_{١\text{هـ}}$ ، $\text{س}_{٢\text{هـ}}$ ، $\text{س}_{٣\text{هـ}}$ ، ... ، $\text{س}_{\text{م هـ}}$.

مثال (٣-٢)

إذا كانت $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ -٤ & ١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فعين قيم جميع العناصر $\text{س}_{\text{ى هـ}}$

بما أن المصفوفة من النوع ٢ × ٣ فإن:

ى   ١ ، ٢   بينما هـ = ١ ، ٢ ، ٣ وبالتالي فإن العنصر

$س_{ى هـ}$ له ست قيم هي:

العنصر الذي يقع في الصف الأول والعمود الأول = $س_{١١}$ = ١

العنصر الذي يقع في الصف الأول والعمود الثاني = $س_{٢١}$ = - ١

وبالمثل:

$س_{٣١}$ = ٢ ، $س_{١٢}$ = - ٤ ، $س_{٢٢}$ = ١ ، $س_{٣٢}$ = ٥.

تعريف (٣ ـ ٣)

نقول إن المصفوفتين س ، ص متساويتان، ونكتب س = ص ، إذا تحقق الشرطان التاليان:

(١) س ، ص من نوع واحد، أي أن عدد صفوف س يساوي عدد صفوف ص ، وعدد أعمدة س يساوي عدد أعمدة ص .

(٢) $س_{ى هـ}$ = $ص_{ى هـ}$ لجميع قيم ى ، هـ الممكنة، حيث ى ، هـ عددان طبيعيان.

مثال (٣-٣)

عين جميع عناصر المصفوفة س = $\begin{bmatrix} س_{١١} & س_{٢١} & س_{٣١} \\ س_{١٢} & س_{٢٢} & س_{٣٢} \end{bmatrix}$

إذا علمت أن $\underline{س} = \underline{ص} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٦ \\ -٣ & ٠ & -٤ \end{bmatrix}$

الحـــل :

من تعريف تساوي مصفوفتين نجد أن:

$س_{١١} = ٢$ ، $س_{٢١} = -١$ ، $س_{٣١} = ٦$ ، $س_{١٢} = -٣$ ، $س_{٢٢} = ٠$ ، $س_{٣٢} = -٤$.

تـمـاريـن (٣ - ١)

(١) أربع مدن هي ﺃ ، ب ، ﺣ ، ء . فإذا كانت المسافة بالكيلومترات بين أي مدينتين موضحة في الجدول الآتي:

	ﺃ	ب	ﺣ	ء
ﺃ	٠	٦٥	٧٠	٢١١
ب	٦٥	٠	٤٦	٢٢
ﺣ	٧٠	٤٦	٠	١٨٥
ء	٢١١	٢٢	١٨٥	٠

فأجب عما يلي:

أولاً: اكتب مصفوفة تمثل هذه المعلومات.

ثانياً: بفرض أن $\underline{س}$ هي المصفوفة المطلوبة في أولاً. أوجد ما يلي:

(أ) $س_{٣٢}$ ، وماذا يعني ذلك؟

(ب) $س_{٢٣}$ ، وماذا يعني ذلك؟

(حـ) ما هي العلاقة بين $س_{٣٢}$ ، $س_{٢٣}$؟

(ء) اكتب جميع عناصر الصف الثاني للمصفوفة س .

(هـ) اكتب جميع عناصر العمود الثاني للمصفوفة س .

(و) ماذا يمكن استنتاجه من (ء) ، (هـ)؟

(ز) أوجد $س_{ى ى}$ عندما ى = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤، وماذا تلاحظ مع إبداء السبب؟

(ح) أكمل ما يلي:

(١) س مصفوفة من النوع .....

(٢) $س_{ى هـ} = س_{هـ ى}$ لجميع قيم.....

(ط) هل تلاحظ أن س هي مصفوفة تتمتع بخواص معينة لا تنطبق على المصفوفات بشكل عام أم لا؟

(٢) ما عدد العناصر في كل من المصفوفات الآتية:

(أ) مصفوفة من النوع ٢ × ٣.

(ب) مصفوفة ٧ × ٨

(حـ) مصفوفة ١٢ × ١٢

(ء) مصفوفة د × د

(هـ) مصفوفة م × د.

(٣) أوجد قيم أ ، ب ، جـ ، ء إذا كان:

(أ) $$\begin{bmatrix} \text{أ} - ٢ & ٢\text{ب} + ١ \\ \text{أ} + ٣ & ١٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ \text{جـ} & ٣\text{ء} - ٢ \end{bmatrix}$$

(ب) $$\begin{bmatrix} ٣\text{أ} & ١٠ \\ ٢\text{أ} + \text{جـ} & ٢\text{ب} - \text{ء} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥ & ٢\text{ب} \\ ١٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

(٤) اكتب المصفوفة أ إذا علمت أن أ مصفوفة ٤ × ٥ وأن عناصر الصف الأول هي أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ على الترتيب، وعناصر الصف الثاني هي أ′ ، ب′ ، جـ′ ، ء′ ، هـ′ على الترتيب، وأن عناصر الصف الثالث هي نفس عناصر الصف الأول، بعد ضرب كل عنصر في $\frac{٢}{٣}$ ، بينما عناصر الصف الرابع هي نفس عناصر الصف الثاني بعد ضرب كل عنصر في (– ٢).

(٥)

	الخرج	عفيف
مكة المكرمة	١٥٠	١٥٠
المدينة المنورة	١٥٠	١٠٠
الرياض	٢٠	١٠٠

جدول (١)

	المجمعة	المزاحمية
ابقيق	س + ٥٠	٢ ع – ٥٠
الباحة	ص	$\frac{٢٠}{٣}$ ل
المفوف	$\frac{٤}{٣}$ ل	٢ ع – س

جدول (٢)

الجدول (١) يبين أجور المكالمات الهاتفية في الدقيقة الواحدة بالهللات بين مدن المملكة المبينة. والمطلوب:

(أ) أكتب مصفوفة تعبر عن الجدول (١) وبين ما نوعها وكم عدد عناصرها.

(ب) اكتب مصفوفة تعبر عن الجدول (٢).

(حـ) إذا علمت أن المصفوفتين المعبرتين عن الجدولين (١) ، (٢) متساويتان فأوجد قيمة كل من س ، ص ، ع ، ل ثم اكتب الجدول (٢) الذي يبين أجور المكالمات الهاتفية في الدقيقة الواحدة بالهللات بين المدن المبينة فيه .

٣ ـ ٢ بعض أنواع المصفوفات المشهورة

(١) <u>المصفوفة المستطيلة :</u> وهي مصفوفة من النوع م × د، حيث م ≠ د. وفي الحالة التي يكون فيها م = ١ فإن المصفوفة تسمى «مصفوفة الصف» أي أن مصفوفة الصف هي من النوع ١ × د، وعندما تكون د = ١ فإن المصفوفة تسمى «مصفوفة العمود»، أي أن مصفوفة العمود هي من النوع م × ١ .

(٢) <u>المصفوفة المربعة :</u> وهي مصفوفة من النوع د × د أي أن عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها. لاحظ أنه في أي مصفوفة مربعة مثل <u>س</u> = [$س_{ى هـ}$] تسمى العناصر $س_{ى ى}$ القطر الأساسي للمصفوفة <u>س</u> .

(٣) <u>المصفوفة القطرية :</u> وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار، ما عدا العناصر الواقعة على القطر فيكون أحدها على الأقل مغايراً للصفر.

(٤) <u>مصفوفة الوحدة :</u> وهي مصفوفة قطرية، يكون فيها كل من العناصر الواقعة على القطر مساوياً الواحد، وسنرمز لها بالرمز $\underline{م}_{د}$ أو بالرمز <u>م</u> إذا لم نخش الالتباس.

(٥) <u>المصفوفة الصفرية :</u> وهي مصفوفة م × د وجميع عناصرها أصفار. وسنرمز لها بالرمز « $\underline{٠}_{م \times د}$ » أو بالرمز « <u>٠</u> » إذا لم نخش الالتباس. ويلاحظ أن م قد تساوي د هنا وعندها نكتفي بالرمز « $\underline{٠}_{د}$ » أو بالرمز « <u>٠</u> » فقط.

مثال (٣-٤)

(١) المصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ١- & ٠ \end{bmatrix}$ مستطيلة فيها م = ٢ ، د = ٣

(٢) المصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & ٠ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$ مصفوفة صف فيها م = ١ ، د = ٤

(٣) المصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ \\ ٠ \\ ١ \end{bmatrix}$ مصفوفة عمود فيها م = ٣ ، د = ١

(٤) المصفوفة $\begin{bmatrix} ٥ & ١- & ٣ \\ ٠ & ٢ & ٦ \\ ٦ & ٣ & ١ \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة ٣ × ٣

قطرها الأساسي الأعداد ٣ ، ٢ ، ٦ وقطرها الآخر (الثانـوي) الأعداد ٥ ، ٢ ، ١ .

(٥) المصفوفة $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١- & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ مصفوفة قطرية ٣ × ٣ عناصر قطرها هي

١ ، -١ ، ٢

(٦) كل من المصفوفات $\begin{bmatrix} ١ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

هي مصفوفة وحدة.

(٧) كل من المصفوفات $\begin{bmatrix} ٠ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ،

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة صفرية. لاحظ أن كل واحدة منها تختلف عن الأخرى، فمثلاً

$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \end{bmatrix}$ لأن اليمنى من النوع ١ × ٢ أما اليسرى فمن النوع ٢ × ١

٣ـ٣ جمع المصفوفات وضرب مصفوفة بعدد حقيقي

تعريف (٣ـ٤)

إذا كانت $\underline{\text{س}} = [\text{س}_{\text{ي هـ}}]$ ، $\underline{\text{ص}} = [\text{ص}_{\text{ي هـ}}]$ مصفوفتين كل منهما م × ن ،
فإن مجموعهما هو المصفوفة:

$$\underline{\text{ع}} = [\text{ع}_{\text{ي هـ}}] \text{ ، حيث } \text{ع}_{\text{ي هـ}} = \text{س}_{\text{ي هـ}} + \text{ص}_{\text{ي هـ}}$$

إن هذا التعريف يعني أننا نستطيع جمع أي مصفوفتين $\underline{\text{س}}$ ، $\underline{\text{ص}}$، إذا وإذا فقط ، كانتا من نفس النوع م × ن. وحينئذٍ يمكننا أن نكتب مجموعهما بالصورة:

$$\underline{\text{س}} + \underline{\text{ص}} = [\text{س}_{\text{ي هـ}}] + [\text{ص}_{\text{ي هـ}}]$$

$$= [\text{س}_{\text{ي هـ}} + \text{ص}_{\text{ي هـ}}]$$

أي أننا نحصل على مصفوفة جديدة من النوع نفسه، كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين بالوضع في $\underline{\text{س}}$ ، $\underline{\text{ص}}$.

مثال (٣-٥)

إذا كانت $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

فأوجد :

(أ) $\underline{\text{س}} + \underline{\text{ص}}$ (ب) $\underline{\text{ص}} + \underline{\text{س}}$ (حـ) $\underline{\text{س}} + \underline{\text{س}}$

الحل :

بما أن المصفوفتين $\underline{\text{س}}$ ، $\underline{\text{ص}}$ من النوع نفسه فإن الجمع ممكن (مُعرَّف).

(أ) $\underline{\text{س}} + \underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+2 & -2+3 & 3+4 \\ 5+(-5) & -6+3 & 1+7 \end{bmatrix}$ من التعريف (١ ـ ٤)

$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$

(ب) $\underline{\text{ص}} + \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix} = \underline{\text{س}} + \underline{\text{ص}}$

(جـ) $\underline{\text{س}} + \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ & ١ \\ ١ & -٦ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & -٢ & ١ \\ ١ & -٦ & ٥ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ٦ & -٤ & ٢ \\ ٢ & -١٢ & ١٠ \end{bmatrix}$$

الجدول الآتي يبين أجور المكالمات الهاتفية بين المدن المذكورة فيه بالريـالات للدقيقة الواحدة.

	الخرج	عفيف	مرات
الطائف	١,٥	١	١,٥
ساجر	١	١	٠,٢

إن المصفوفة $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١,٥ & ١ & ١,٥ \\ ٠,٢ & ١ & ١ \end{bmatrix}$ تمثل هذا الجدول.

ولو ضربنا كل عنصر من عناصر هـذه المصفوفـة بالعـدد ١٠٠ لظهـرت معنا مصفـوفة أخرى تعبر عن الأجور بين تلك المدن بالهللات، ونكون بذلـك قد ضربنـا المصفوفـة $\underline{\text{س}}$ بالعدد ١٠٠، أي أن:

$$١٠٠ \underline{\text{س}} = ١٠٠ \begin{bmatrix} ١,٥ & ١ & ١,٥ \\ ٠,٢ & ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥٠ & ١٠٠ & ١٥٠ \\ ٢٠ & ١٠٠ & ١٠٠ \end{bmatrix}$$

والآن نقدم تعريف ضرب مصفوفة بعدد حقيقي بشكل عام:

تعريف (٣ـ٥):

إذا كانت $\underline{\text{س}} = [\text{س}_{\text{ى هـ}}]$ مصفوفة م × د، وكان ك ∈ ح، فإن حاصل ضرب المصفوفة $\underline{\text{س}}$ بالعدد الحقيقي ك هو المصفوفة $\underline{\text{ع}} = [\text{ع}_{\text{ى هـ}}]$، حيث $\text{ع}_{\text{ى هـ}} = \text{ك} \,.\, \text{س}_{\text{ى هـ}}$ لجميع قيم ى ، هـ الممكنة، أي أن:

$$\text{ك} \,.\, \underline{\text{س}} = [\text{ك} \,.\, \text{س}_{\text{ى هـ}}].$$

في التعريف (١ ـ ٥) لما كانت ك ، $\text{س}_{\text{ى هـ}}$ ∈ ح فإن:

$\text{ك} \,.\, \text{س}_{\text{ى هـ}} = \text{س}_{\text{ى هـ}} \,.\, \text{ك}$ لجميع قيم ى ، هـ الممكنة، وبالتالي فإن:

$$[\text{ك} \,.\, \text{س}_{\text{ى هـ}}] = [\text{س}_{\text{ى هـ}} \,.\, \text{ك}]$$

وهذا يعني أن $\text{ك} \,.\, \underline{\text{س}} = \underline{\text{س}} \,.\, \text{ك}$

مثال (٣-٦)

إذا كانت $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، فأوجد المصفوفة $\text{ك} \,.\, \underline{\text{س}}$ عندما تكون

(أ) ك = ٢ (ب) ك = $\frac{١}{٢}$ (حـ) ك = - ١

الحـــل :

بتطبيق التعريف (١ ـ ٥) مباشرة نجد أن:

(أ) $\text{ك} \,.\, \underline{\text{س}} = ٢\, \underline{\text{س}} = ٢ \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2\times 1 & 2\times(-3) \\ 2\times 2 & 2\times 4 \\ 2\times 0 & 2\times(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 8 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(ب) ك . س = $\frac{1}{2}$ س = $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(حـ) ك . س = (−١) س = (−١) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

تعريف (٣ـ٦)

إذا كانت س ، ص مصفوفتين م × ن ، فإن الفرق س − ص يُعرَّف كما يلي:

س − ص = س + (−١) ص

مثال (٣−٧)

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

فأوجد كلًا من س − ص ، ص − س وتحقق أنهما غير متساويتين.

الحـــل :

س − ص = س + (−١) ص

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & -7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -6 & -6 & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots(1)$$

$\underline{\text{ص}} - \underline{\text{س}} = \underline{\text{ص}} + (-١)\,\underline{\text{س}}$

$$= \begin{bmatrix} -٢ & ١ & ٣ \\ ٠ & ٧ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & ٣ & -٥ \\ ٦ & -١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & ٤ & -٢ \\ ٦ & ٦ & -١ \end{bmatrix} \quad \dots (٢)$$

من (١) ، (٢) نجد أن $\underline{\text{س}} - \underline{\text{ص}} \neq \underline{\text{ص}} - \underline{\text{س}}$

خواص جمع المصفوفات :

إذا كانت سـ مجموعة المصفوفات من النوع م × ﻫ فإن النظام (سـ ، +) ، حيث «+» عملية جمع المصفوفات، يتمتع بالخواص الآتية:

(١) العملية «+» ثنائية على سـ لأنه:

لكل $\underline{\text{س}}$ ، $\underline{\text{ص}}$ ∈ سـ فإن $\underline{\text{س}} + \underline{\text{ص}}$ ∈ سـ وفق التعريف (٣-٤).

(٢) العملية «+» إبدالية لأنه:

لكل $\underline{\text{س}}$ ، $\underline{\text{ص}}$ ∈ سـ فإن:

$\underline{\text{س}} + \underline{\text{ص}} = \left[\text{س}_{\text{ي هـ}} + \text{ص}_{\text{ي هـ}}\right]$ **وفق التعريف (٣-٤).**

$= \left[\text{ص}_{\text{ي هـ}} + \text{س}_{\text{ي هـ}}\right]$ **، لأن عملية الجمع في ح إبدالية.**

$= \underline{\text{ص}} + \underline{\text{س}}$ **وفق التعريف (٣-٤).**

(٣) العملية «+» دامجة لأنه:

لكل $\underline{\text{س}}$ ، $\underline{\text{ص}}$ ، $\underline{\text{ع}}$ ∈ سـ فإن:

$(\underline{س} + \underline{ص}) + \underline{ع} = \left[\left(س_{ى هـ} + ص_{ى هـ} \right) + ع_{ى هـ} \right]$ وفق التعريف (٣ ـ ٤).

$= \left[س_{ى هـ} + \left(ص_{ى هـ} + ع_{ى هـ} \right) \right]$ لأن عملية الجمع في ح دامجة.

$= \underline{س} + (\underline{ص} + \underline{ع})$ ، لماذا؟

(٤) يوجد في سـ عنصر محايد، هو المصفوفة الصفرية $\hat{٠}_{م و}$ لأنه:

لكل $\underline{س} \in$ سـ فإن:

$\underline{س} + \hat{٠}_{م و} = \underline{س}$

(٥) لكل مصفوفة $\underline{س} \in$ سـ يوجد مصفوفة $\underline{ص} = (-١)\,\underline{س} \in$ سـ ، بحيث يكون:

$\underline{س} + \underline{ص} = \hat{٠}_{م و}$

تسمى المصفوفة $\underline{ص}$ النظير الجمعي للمصفوفة $\underline{س}$ ، ونرمز لذلك بالرمز $-\underline{س}$. ونستنتج من ذلك أن:

$(-١)\,\underline{س} = -\underline{س}$.

ملحوظة:

إن تحقق الخواص السابقة يمكن إيجازها في قولنا «إن النظام (سـ ، +) زمرة إبدالية».

خواص ضرب مصفوفة بعدد حقيقي :

إذا كانت $\underline{\text{س}}$ ، $\underline{\text{ص}}$ مصفوفتين م × ه وكان ك ، ل ∈ ح، فإن:

(أ) ك . ($\underline{\text{س}}$ + $\underline{\text{ص}}$) = ك . $\underline{\text{س}}$ + ك . $\underline{\text{ص}}$.

(ب) (ك + ل) . $\underline{\text{س}}$ = ك . $\underline{\text{س}}$ + ل . $\underline{\text{س}}$.

(جـ) ك . (ل . $\underline{\text{س}}$) = (ك ل) . $\underline{\text{س}}$

(د) ك . $\underline{\text{س}}$ = $\underline{\text{٠}}$ $\Leftrightarrow$ ك = ٠ أو $\underline{\text{س}}$ = $\underline{\text{٠}}$

(هـ) ك . $\underline{\text{س}}$ = ك . $\underline{\text{ص}}$ ، ك ≠ ٠ $\Leftarrow$ $\underline{\text{س}}$ = $\underline{\text{ص}}$

(و) ١ . $\underline{\text{س}}$ = $\underline{\text{س}}$.

مثال (٣-٨)

إذا كانت $\underline{\text{أ}}$ ، $\underline{\text{ب}}$ ، $\underline{\text{س}}$ ∈ سه ، حيث سه مجموعة المصفوفات م × ه
فأوجد $\underline{\text{س}}$ التي هي حل المعادلة:

$\underline{\text{س}}$ + $\underline{\text{ب}}$ = $\underline{\text{أ}}$ (١)

الحل :

باضافة المصفوفة - $\underline{\text{ب}}$ إلى طرفي المعادلة (١) نجد :

$\underline{\text{س}}$ + $\underline{\text{ب}}$ + (- $\underline{\text{ب}}$) = $\underline{\text{أ}}$ + (- $\underline{\text{ب}}$)

أو: $\underline{\text{س}}$ + ($\underline{\text{ب}}$ + (- $\underline{\text{ب}}$)) = $\underline{\text{أ}}$ - $\underline{\text{ب}}$ خاصة التجميع (الدمج) في المصفوفات

$\Leftarrow$ $\underline{\text{س}}$ + $\underline{\text{٠}}$ = $\underline{\text{أ}}$ - $\underline{\text{ب}}$ خاصة العنصرين المتناظرين

$\Leftarrow$ $\underline{\text{س}}$ = $\underline{\text{أ}}$ - $\underline{\text{ب}}$ خاصة العنصر المحايد

ملاحظة :

إن $-\underline{ب}$ هي النظير الجمعي للمصفوفة $\underline{ب}$ ، وهو نظير وحيد والعنصر المحايد $\underline{٠}$ وحيد، وبالتالي يكون:

$\underline{س} = \underline{أ} - \underline{ب}$ حلاً وحيداً للمعادلة (١).

مثال (٣-٩)

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$

فأوجد حل المعادلة

$\underline{س} + \underline{ب} = \underline{أ}$ وتحقق من صحة الناتج

الحل :

اعتماداً على ما حصلنا عليه في المثال (٣-٨) يكون الحل هو:

$\underline{س} = \underline{أ} - \underline{ب}$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$$

التحقيق :

الطرف الأيمن $= \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$

= الطرف الأيسر

مثال (٣-١٠)

حل المعادلة المصفوفية الآتية:

$$-٣ \cdot \left(\underline{س} - \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix} \right) = (-٤)\,\underline{س} + \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$$

الحـــل :

باستخدام الفقرات (أ) ، (ب) ، (جـ) من خواص ضرب مصفوفة بعدد

ينتج :

$$(-٣)\cdot\underline{\text{س}} + (-٣)(-١)\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix} = (-٤)\cdot\underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow (-٣)\cdot\underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ -٣ & ٠ \end{bmatrix} = (-٤)\cdot\underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow ٤\cdot\underline{\text{س}} + (-٣)\cdot\underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ -٣ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$= ٤\cdot\underline{\text{س}} + (-٤)\cdot\underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \Big(٤ + (-٣)\Big)\,\underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ -٣ & ٠ \end{bmatrix} = \Big(٤ + (-٤)\Big)\cdot\underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ -٣ & ٠ \end{bmatrix} = \text{صفر}\cdot\underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ -٣ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$$

تمارين (٣ - ٢)

أجر العمليات التالية، إن أمكن، مع ذكر السبب في حالة تعذر اجراء العملية:

(أ) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٠ \\ ١ & ٢ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & -١ & ٢ \\ ٣ & ٤ & -٥ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ ٤ & ٥ & ٦ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ٥ & -٦ \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & -١ & ١ \\ -١ & ١ & ١ \end{bmatrix}$

(ء) $\begin{bmatrix} \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{هـ} & \text{و} & \text{ى} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\text{س} & -\text{ص} \\ -\text{ع} & -\text{ل} \end{bmatrix}$

(و) $\begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٤ & -٦ \\ ٣ & ٩ \end{bmatrix}$

(ز) $\begin{bmatrix} ٨ & ٦ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \end{bmatrix}$

(ح) $\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ء} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \end{bmatrix}$

(ظ) $\begin{bmatrix} -٤ \\ ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ \\ -٥ \end{bmatrix}$

(ى) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٦} & \frac{١}{٥} \\ \frac{١}{٩} & \frac{١}{٨} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٥} & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$

(٢) إذا علمت أن:

$$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} -٣ & -٢ \\ ٢ & ١ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} ، \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -٢ \\ -٢ & -٤ \end{bmatrix} ، \underline{\text{حـ}} = \begin{bmatrix} -٣ & -٢ \\ ٢ & ١ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$$

فاحسب:

(أ) $\underline{\text{أ}}$ + $\underline{\text{ب}}$ وكذلك $\underline{\text{ب}}$ + $\underline{\text{أ}}$ ، تحقق أنهما متساويتان.

(ب) ($\underline{\text{أ}}$ + $\underline{\text{ب}}$) + $\underline{\text{حـ}}$ وكذلك $\underline{\text{أ}}$ + ($\underline{\text{ب}}$ + $\underline{\text{حـ}}$) ، وتحقق أنهما متساويتان.

(حـ) $\underline{\text{أ}}$ − $\underline{\text{ب}}$ وكذلك $\underline{\text{ب}}$ − $\underline{\text{أ}}$. هل توجد علاقة بينهما، وما هي إن وجدت؟

(ء) ($\underline{\text{أ}}$ − $\underline{\text{ب}}$) + $\underline{\text{حـ}}$ وكذلك $\underline{\text{أ}}$ − ($\underline{\text{ب}}$ + $\underline{\text{حـ}}$)، وهل توجد علاقة بينهما أم لا؟

(٣) إذا كانت $\underline{\text{أ}}$ كما في تمرين (٢)، فأوجد المصفوفة ك $\underline{\text{أ}}$ عندما تكون:

(أ) ك = ٢ ، (ب) ك = − ١ ، (حـ) ك = ٠ ،

(ء) ك = $\frac{٢}{٥}$ ، (هـ) ك = ١.

(٤) إذا كانت:

$$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} \text{ ، } \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} \text{ ، } \underline{\text{جـ}} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$$

فعبِّر عن كل مما يأتي كمصفوفة:

(أ) ٢ أ + ب - جـ

(ب) ٣ أ + ٢ ب - ٤ جـ

(جـ) ٢ (أ + ٢ جـ) - ٣ جـ

(د) ٢ (أ + ب + جـ)

(هـ) أ - (ب + جـ)

(و) ٣ (أ - ب) + جـ

(٥) باستعمال المصفوفات أ ، ب ، جـ الواردة في التمرين (٤)، حلّ كلًّا من المعادلات المصفوفية الآتية:

(أ) أ + س = ب + جـ

(ب) أ + ٢ س = ب - جـ

(جـ) ٢ (ب - س) = ٢ (س - جـ) - ب

(د) $\frac{١}{٢}$ (أ + س) = ٣ س + ٢ ب

(٦) برهن على صحة الفقرات (ب) وحتى (و) من خواص ضرب مصفوفة بعدد حقيقي.

(٧) بفرض أن $\underline{\text{س}}$ ، $\underline{\text{ص}}$ مصفوفتان م × هـ ، برهن على أن:

(أ) $-(\underline{\text{س}} + \underline{\text{ص}}) = -\underline{\text{س}} - \underline{\text{ص}}$

(ب) $-(-\underline{\text{س}}) = \underline{\text{س}}$

٣ ـ ٤ ضرب المصفوفات

سنوضح إيجاد حاصل ضرب مصفوفة بمصفوفة أخرى من خلال الأمثلة الآتية:

(١) إذا كانت $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٤ \\ -١ \end{bmatrix}$ ،

فإن حاصل ضرب $\underline{\text{س}}$ في $\underline{\text{ص}}$ يعرَّف كما يلي:

$$\underline{\text{س}}\,\underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ \\ ٤ \\ -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \times ٥ + ٢ \times ٤ + ٣ \times (-١) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٥ + ٨ - ٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٠ \end{bmatrix}$$

(٢) إذا كانت $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٥ & -١ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ،

فإن $\underline{\text{س}}\ \underline{\text{ص}}$ يعرف كما يلي:

$$\underline{\text{س}}\ \underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & -١ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ \times ٥ + ٣ \times ٤ & ١ \times (-١) + ٣ \times ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٧ & -١ \end{bmatrix}$$

(٣) إذا كانت:

$$\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٢ & ٠ & ١ \end{bmatrix} ، \underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٠ \\ ١ \end{bmatrix} ،$$

فإن: $\underline{\text{س}}\ \underline{\text{ص}}$ يعرف كما يلي:

$$\underline{\text{س}}\ \underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٢ & ٠ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ \\ ٠ \\ ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ \times (-١) + (-١) \times ٠ + ٣ \times ١ \\ ٢ \times (-١) + ٠ \times ٠ + ١ \times ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ -١ \end{bmatrix}$$

(٤) إذا كانت $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ ١ & -١ & ٣ \end{bmatrix} ، \underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix} ،$

فإن:

$$\underline{\text{س}}\ \underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ ١ & -١ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٠ \times ١ + ١ \times ٠ + ٣ \times ٢ & (-١) \times ١ + ٥ \times ٠ + ١ \times ٢ \\ ٠ \times ٣ + ١ \times (-١) + ٣ \times ١ & (-١) \times ٣ + ٥ \times (-١) + ١ \times ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ٢ & -٧ \end{bmatrix}$$

(٥) إذا كانت $\underline{س} = \begin{bmatrix} س_{٢١} & س_{١١} \\ س_{٢٢} & س_{١٢} \end{bmatrix}$ ، $\underline{ص} = \begin{bmatrix} ص_{٣١} & ص_{٢١} & ص_{١١} \\ ص_{٣٢} & ص_{٢٢} & ص_{١٢} \end{bmatrix}$ ،

فإن:

$\underline{س}\ \underline{ص} =$

$$\begin{bmatrix} س_{١١} ص_{٣١} + س_{٢١} ص_{٣٢} & س_{١١} ص_{٢١} + س_{٢١} ص_{٢٢} & س_{١١} ص_{١١} + س_{٢١} ص_{١٢} \\ س_{١٢} ص_{٣١} + س_{٢٢} ص_{٣٢} & س_{١٢} ص_{٢١} + س_{٢٢} ص_{٢٢} & س_{١٢} ص_{١١} + س_{٢٢} ص_{١٢} \end{bmatrix}$$

وبوضع $\underline{س}\ \underline{ص} = \underline{ع} = [ع_{ى هـ}]$ ، فمن تعريف تساوي مصفوفتين نجد أن:

$ع_{١١} = س_{١١} ص_{١١} + س_{٢١} ص_{١٢}$ ، $ع_{٢١} = س_{١١} ص_{٢١} + س_{٢١} ص_{٢٢}$ ، . . .
أكمل بنفسك. واختصاراً فإن:

$ع_{ى هـ} = س_{ى١} ص_{١هـ} + ص_{ى٢} ص_{٢هـ}$ ،

حيث ى = ١ ، ٢ ؛ هـ = ١ ، ٢ ، ٣.

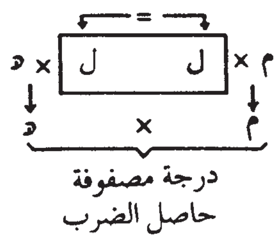
من الأمثلة السابقة نلاحظ ونستنتج ما يلي:

(١) إن عدد أعمدة المصفوفة $\underline{س}$ يساوي عدد صفوف المصفوفة $\underline{ص}$ في كل من الأمثلة الخمسة السابقة، وجدير بالذكر أنه بصفة عامة لكي يكون حاصل

ضرب مصفوفة س في أخرى ص ممكناً (مُعرّفاً) فلا بد أن يكون عدد أعمدة س يساوي عدد صفوف ص .

(٢) إذا كانت س من النوع م × ل ، ص من النوع ل × د، فإن حاصل ضربهما هو المصفوفة س ص وتكون من النوع م × د، أي أن نوع المصفوفة س ص يتحدد تماماً من عدد صفوف س وعدد أعمدة ص .

يشترط تساوي عدد أعمدة الأولى مع عدد صفوف الثانية



(٣) إذا كانت س ، ص مصفوفتين مربعتين م × م، فإن كلاً من س ص ، ص س مصفوفة مربعة م × م. وبصفة خاصة إذا كانت س = ص فسنكتب س س بالصورة س^٢، أي أن س^٢ = س س .

مثال (٣-١١)

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، فأوجد (إن أمكن):

(أ) س ص (ب) ص س (حـ) س^٢ (ء) ص^٢

الحـــل :

(أ) بما أن عدد أعمدة س يساوي عدد صفوف ص فإن س ص يمكن إيجادها، وتكون:

$$\text{س ص} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ 14 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

(ب) $\underline{\text{ص}}\ \underline{\text{س}}$ لا يمكن إيجادها، لأن عدد أعمدة $\underline{\text{ص}}$ لا يساوي عدد صفوف $\underline{\text{س}}$.

(حـ) $\underline{\text{س}}^{2} = \underline{\text{س}}\ \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 2 & 3- \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3- \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 8- & 21- \\ 28 & 13 \end{bmatrix}$$

(ء) $\underline{\text{ص}}^{2} = \underline{\text{ص}}\ \underline{\text{ص}}$ لا يمكن إيجادها . لماذا؟

مثال (٣-١٢)

إذا كانت $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ،

فأثبت أن عملية ضرب المصفوفات غير إبدالية .

الحــل :

$$\underline{\text{س}}\ \underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 25 \\ 12 & 20 \end{bmatrix} \quad \ldots(1)$$

$$\underline{\text{ص}}\ \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 9 & 35 \end{bmatrix} \quad \ldots(2)$$

من (١) ، (٢) نجد أن $\underline{\text{س}}\ \underline{\text{ص}} \neq \underline{\text{ص}}\ \underline{\text{س}}$ ، وبذلك تم الاثبات.

مثال (٣-١٣)

إذا كانت $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} \text{س}_{11} & \text{س}_{21} \\ \text{س}_{12} & \text{س}_{22} \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{م}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ،

فأثبت أن :

$\underline{س}\ \underline{م} = \underline{س} = \underline{م}\ \underline{س}$ ، وماذا تستنتج من ذلك؟

الحــل :

$$\underline{س}\ \underline{م} = \begin{bmatrix} س_{١١} & س_{٢١} \\ س_{١٢} & س_{٢٢} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} س_{١١} \times ١ + س_{٢١} \times ٠ & س_{١١} \times ٠ + س_{٢١} \times ١ \\ س_{١٢} \times ١ + س_{٢٢} \times ٠ & س_{١٢} \times ٠ + س_{٢٢} \times ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} س_{١١} & س_{٢١} \\ س_{١٢} & س_{٢٢} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{س}$$

وبالمثل نجد أن $\underline{م}\ \underline{س} = \underline{س}$ (تأكد من ذلك بنفسك).

نستنتج أن $\underline{م} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ مصفوفة محايدة بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات المربعة من النوع ٢ × ٢ .

مثال (٣-١٤)

إذا علمت أن $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ١- \\ ٠ & ٢- & ٣ \\ ٢ & ١ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ \\ ٢- \\ ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س_{١} \\ س_{٢} \\ س_{٣} \end{bmatrix}$ ،

فأوجد كلًا من:

$س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$

الحــل :

$س_{١}$ = ١ × ١ + ٠ × (- ٢) + (- ١) × ٣ = - ٢

$س_{٢}$ = ٠ × ١ + (- ٢) (- ٢) + ٣ × ٣ = ١٣

$س_{٣}$ = ٢ × ١ + ١ × (- ٢) + ٠ × ٣ = ٠

مثال (٣-١٥)

إذا علمت أن س مصفوفة من النـوع ٢ × ٣ ، ص مصفوفـة من النوع ٣ × ٢ ، فأوجد نوع كل من المصفوفات الآتية :

(أ) س ص (ب) ص س (حـ) (س ص) س (د) (ص س) ص

الحــل :

(أ) س مصفوفة ٢ × ٣ ، ص مصفوفة ٣ × ٢ ⇐ س ص مصفوفة ٢ × ٢ .

(ب) ص مصفـوفة ٣ × ٢ ، س مصفـوفة ٢ × ٣ ⇐ ص س مصفـوفة ٣ × ٣ .

(حـ) س ص مصفوفة ٢ × ٢ من (أ) ، س مصفوفة ٢ × ٣ ⇐

(س ص) س مصفوفة ٢ × ٣ .

(د) ص س مصفوفة ٣ × ٣ من (ب) ، ص مصفوفة ٣ × ٢ ⇐

(ص س) ص مصفوفة ٣ × ٢ .

مثال (٣-١٦)

إذا كانت $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٦ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٣ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ع}} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ١ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$

فأوجد كلا من :

(أ) $\underline{\text{س}} \cdot \underline{\text{ص}}$ وكذلك $(\underline{\text{س}} \cdot \underline{\text{ص}}) \cdot \underline{\text{ع}}$

(ب) $\underline{\text{ص}} \cdot \underline{\text{ع}}$ وكذلك $\underline{\text{س}} \cdot (\underline{\text{ص}} \cdot \underline{\text{ع}})$

(جـ) تحقق من أن $(\underline{\text{س}} \cdot \underline{\text{ص}}) \cdot \underline{\text{ع}} = \underline{\text{س}} \cdot (\underline{\text{ص}} \cdot \underline{\text{ع}})$ وماذا تلاحظ ؟

الحــل :

(أ) $\underline{\text{س}} \cdot \underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٦ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٣ & ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٠ & ١٢ \\ ٣ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$

(أ) $(\underline{\text{س}} \cdot \underline{\text{ص}}) \cdot \underline{\text{ع}} = \begin{bmatrix} ٦ & ٠ & ١٢ \\ ٣ & ١ & ٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ١ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦٦ & ٢٤ \\ ٣ & ١٣ \end{bmatrix}$ .....(١)

(ب) $\underline{\text{ص}} \cdot \underline{\text{ع}} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٣ & ١ & ٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ١ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ & ٤ \\ ٣ & ١٣ \end{bmatrix}$

(ب) $\underline{\text{س}} \cdot (\underline{\text{ص}} \cdot \underline{\text{ع}}) = \begin{bmatrix} ٦ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١١ & ٤ \\ ٣ & ١٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦٦ & ٢٤ \\ ٣ & ١٣ \end{bmatrix}$ ....(٢)

(جـ) من (١)، (٢) نجد أن :

$(\underline{\text{س}} \cdot \underline{\text{ص}}) \cdot \underline{\text{ع}} = \underline{\text{س}} \cdot (\underline{\text{ص}} \cdot \underline{\text{ع}})$

نلاحظ من هذا أن ضرب المصفوفات عملية دامجة (تجميعية).

مثال (٣-١٧)

إذا كانت $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ع}} = \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$

فأوجد كلا من :

(أ) $\underline{\text{ص}} + \underline{\text{ع}}$ وكذلك $\underline{\text{س}}\,(\underline{\text{ص}} + \underline{\text{ع}})$

(ب) $\underline{\text{س}}\,\underline{\text{ص}}$ ، $\underline{\text{س}}\,\underline{\text{ع}}$ وكذلك $\underline{\text{س}}\,\underline{\text{ص}} + \underline{\text{س}}\,\underline{\text{ع}}$

(حـ) تحقق من أن $\underline{\text{س}}\,(\underline{\text{ص}} + \underline{\text{ع}}) = \underline{\text{س}}\,\underline{\text{ص}} + \underline{\text{س}}\,\underline{\text{ع}}$ وماذا تلاحظ ؟

الحــل :

(أ) $\underline{\text{ص}} + \underline{\text{ع}} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٧ \end{bmatrix}$

$\underline{\text{س}}\,(\underline{\text{ص}} + \underline{\text{ع}}) = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١٤ \\ -١ & ٠ \\ ٠ & ٧ \end{bmatrix}$ .... (١)

(ب) $\underline{\text{س}}\,\underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ -٢ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$

$\underline{\text{س}}\,\underline{\text{ع}} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٩ \\ ١ & -١ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$

$\underline{\text{س}}\,\underline{\text{ص}} + \underline{\text{س}}\,\underline{\text{ع}} = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ -٢ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ٩ \\ ١ & -١ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١٤ \\ -١ & ٠ \\ ٠ & ٧ \end{bmatrix}$ ... (٢)

(حـ) من (١)، (٢) نجد أن $\underline{\text{س}}\,(\underline{\text{ص}} + \underline{\text{ع}}) = \underline{\text{س}}\,\underline{\text{ص}} + \underline{\text{س}}\,\underline{\text{ع}}$

نلاحظ من هذا أن الضرب موزع على الجمع .

مثال (٣-١٨)

إذا كانت $\underline{س} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ،

فأثبت أن:

$$\underline{س}^{٢} - ٣\,\underline{س} + ٢\,\underline{م} = \underline{٠}$$

الحــل :

لإثبات المطلوب نوجد كلاً من $\underline{س}^{٢}$ ، $-٣\,\underline{س}$ ، $٢\,\underline{م}$ ثم نثبت أن الطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر.

$$\underline{س}^{٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٩ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} ،$$

$$-٣\,\underline{س} = \begin{bmatrix} -٣ & -٩ \\ ٠ & -٦ \end{bmatrix} ، \quad ٢\,\underline{م} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$$

اذن: الطرف الأيمن $= \begin{bmatrix} ١ & ٩ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & -٩ \\ ٠ & -٦ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

$= \underline{٠}$

= الطرف الأيسر.

تمارين (٣ – ٣)

(١) إذا كانت $\underline{س} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ص} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ،

$\underline{ع} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ فأوجد:

(أ) $\underline{س}\,\underline{ص}$ (ب) $\underline{س}\,\underline{ع}$ (حـ) $\underline{ص}\,\underline{ع}$

(ء) $\underline{ص}\,\underline{س}$ (هـ) $\underline{ع}\,\underline{س}$ (و) $\underline{ع}\,\underline{ص}$

(ز) $(\underline{س}\,\underline{ص})\,\underline{ع}$ (ح) $\underline{س}\,(\underline{ص}\,\underline{ع})$

(٢) إذا كانت $\underline{س}$ ، $\underline{ص}$ ، $\underline{ع}$ كما في التمرين (١) السابق، وكانت $\underline{م}_٢$ هي مصفوفة الوحدة فأثبت أن:

(أ) $\underline{س}\,\underline{ص} = -(\underline{ص}\,\underline{س})$ (ب) $\underline{س}^٢ = \underline{ع}^٢ = \underline{م}_٢$

(حـ) $\underline{ص}^٢ = -\underline{م}_٢$ (ء) $(\underline{س}\,\underline{ص})\,\underline{ع} = \underline{س}\,(\underline{ص}\,\underline{ع})$ ؛

(٣) إذا كانت $\underline{أ}$ مصفوفة ٢ × ٣ ، $\underline{ب}$ مصفوفة ٣ × ٣ ، $\underline{حـ}$ مصفوفة ٤ × ٣ ، $\underline{ء}$ مصفوفة ٣ × ٢ ، فأوجد نوع كل من المصفوفات الآتية:

(أ) $\underline{أ}\,\underline{ب}$ (ب) $\underline{ء}\,\underline{أ}$ (حـ) $\underline{أ}\,\underline{ء}$ (ء) $\underline{حـ}\,\underline{ب}$

(هـ) $\underline{ب}\,\underline{ء}$ (و) $\underline{ء}\,(\underline{أ}\,\underline{ب})$ (ز) $(\underline{حـ}\,\underline{ب})(\underline{ء}\,\underline{أ})$

(٤) أجر عملية الضرب فيما يأتي، إن أمكن، وأذكر السبب في حالة تعذر اجراء عملية الضرب:

(أ) $\begin{bmatrix} -٢ & ١ & ٦ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٥ \\ ٠ \\ ٣ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \\ ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٥ \end{bmatrix}$

(حـ) $\begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٨ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \\ ٤ \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٠ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٠ & ٤ \\ ١ & ١ & ١ \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٠ & ٣ \\ ٢ & -١ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$

(و) $\begin{bmatrix} -١ & -٣ & ٢ \\ ٥ & ٣ & ٦ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٩ & ١ & ٠ \\ ٢ & -٤ & ٥ \end{bmatrix}$

(ز) $\begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٤ \\ -٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$

(ح) $\begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٤ \\ -٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \end{bmatrix}$

(٥) إذا كانت $\underline{س} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ص} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ ،

$\underline{ع} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

فعين صحة أو خطأ كل من العبارات الآتية، وذلك بحساب طرفي كل مساواة .

(أ) $\underline{\text{س}}\,(\underline{\text{ص}} + \underline{\text{ع}}) = \underline{\text{س}}\,\underline{\text{ص}} + \underline{\text{س}}\,\underline{\text{ع}}$

(ب) $(\underline{\text{ص}} + \underline{\text{ع}})\,\underline{\text{س}} = \underline{\text{ص}}\,\underline{\text{س}} + \underline{\text{س}}\,\underline{\text{ع}}$

(حـ) $\underline{\text{س}}\,(\underline{\text{ص}} + \underline{\text{ع}}) = \underline{\text{س}}\,\underline{\text{ص}} + \underline{\text{ع}}\,\underline{\text{س}}$

(ء) $\underline{\text{س}}\,(\underline{\text{ص}} + \underline{\text{ع}}) = \underline{\text{ص}}\,\underline{\text{س}} + \underline{\text{ع}}\,\underline{\text{س}}$

(هـ) $(\underline{\text{س}}\,\underline{\text{ص}})\,\underline{\text{ع}} = \underline{\text{س}}\,(\underline{\text{ص}}\,\underline{\text{ع}})$

(٦) إذا كانت $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ ،

فاثبت أن:

(أ) $\underline{\text{س}}^{٢} - ٢\,\underline{\text{س}} - ٣\,\underline{\text{م}} = \underline{٠}$

(ب) $\underline{\text{ص}}^{٢} - ٢\,\underline{\text{ص}} + ٢\,\underline{\text{م}} = \underline{٠}$

(حـ) $\underline{\text{س}}\,\underline{\text{ص}} \neq \underline{\text{ص}}\,\underline{\text{س}}$.

(٧) إذا كانت $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} -\frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ ، فاثبت أن:

$\underline{\text{س}}\,\underline{\text{ص}} = \underline{\text{ص}}\,\underline{\text{س}} = \underline{\text{م}}$. هل $\underline{\text{س}}$ ، $\underline{\text{ص}}$ كل منهما نظير ضربي للأخرى؟

(٨) إذا كانت: $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ -\text{ب} & \text{أ} \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} \text{جـ} & \text{د} \\ -\text{د} & \text{جـ} \end{bmatrix}$ ، فأثبت أن:

(أ) $\underline{\text{س}}\ \underline{\text{ص}} = \underline{\text{ص}}\ \underline{\text{س}}$

(ب) $\underline{\text{س}}\ \underline{\text{ص}} = \text{أ} \cdot \underline{\text{ص}}$ عندما يكون ب = ٠

٣ ـ ٥ النظيــر الضـربـي لمصفوفـة

ستتناول هنا دراسة النظير الضربي للمصفوفات المربعة من النوع ٢ × ٢ فقط .

تعريف (٣ ـ ٧)

النظير الضربي لمصفوفة $\underline{\text{أ}}$ من النوع ٢ × ٢، إن وجد، هو مصفوفة $\underline{\text{ب}}$ من النوع نفسه بحيث يكون:

$$\underline{\text{أ}}\ \underline{\text{ب}} = \underline{\text{ب}}\ \underline{\text{أ}} = \underline{\text{م}}$$

حيث $\underline{\text{م}}$ المصفوفة المحايدة بالنسبة لعملية الضرب (أي مصفوفة الوحدة من النوع ٢ × ٢).

سنرمز للنظير الضربي للمصفوفة $\underline{\text{أ}}$ بالرمز $\underline{\text{أ}}^{-1}$ (أي أن $\underline{\text{ب}} = \underline{\text{أ}}^{-1}$ في التعريف (٣ ـ ٧))

تعريف (٣-٨)

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{bmatrix}$ فإن المقدار:

أ ء - ب حـ يسمى محددة المصفوفة $\underline{أ}$ ويرمز له بالرمز:

$\begin{vmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{vmatrix}$ أو بالرمز Δ ، وتقرأ دِلْتا، أي أن:

محددة $\underline{أ} = \Delta = \begin{vmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{vmatrix} =$ أ ء - ب حـ

تجدر الإشارة إلى أن المقدار أ ء - ب حـ هو عبارة عن حاصل ضرب العنصرين الواقعين على القطر الأساسي في المصفوفة $\underline{أ}$ مطروحاً منه حاصل ضرب العنصرين الواقعين على القطر الآخر. كما أن الخطين $|\quad|$ لا يرمزان للقيمة المطلقة.

مثال (٣-١٩)

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -٦ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ ١ & \frac{١}{٣} \end{bmatrix}$ ، فأوجد:

(أ) محددة $\underline{أ}$ (ب) محددة $\underline{ب}$

(حـ) $\underline{أ}\ \underline{ب}$ (ء) $\underline{ب}\underline{أ}$

ماذا تستنتج من الفقرتين (حـ) ، (ء)؟

الحـــل :

(أ) محددة أ $= \begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ -٦ & ٣ \end{vmatrix} = ٢ \times ٣ - ٠ \times (-٦) = ٦$

(ب) محددة ب $= \begin{vmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ ١ & \frac{١}{٣} \end{vmatrix} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣} - ٠ \times ١ = \frac{١}{٦}$

(حـ) أ ب $= \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -٦ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ ١ & \frac{١}{٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

(ء) ب أ $= \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ ١ & \frac{١}{٣} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -٦ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

نستنتج من الفقرتين (حـ) ، (ء) أن كلاً من أ ، ب نظير ضربي للأخرى، أي أن :

أ$^{-١}$ = ب ، ب$^{-١}$ = أ ، وذلك وفق التعريف (٣ ـ ٧).

نظرية (٣ـ١)

إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix}$ **، فإن النظير الضربي للمصفوفة** $\underline{\text{أ}}$

يكون موجوداً (مُعرَّفاً) عندما تكون محددة $\underline{\text{أ}} \neq$ **صفراً.**

وبفرض أن $\underline{\text{أ}}^{-1}$ **هي نظير** $\underline{\text{أ}}$ **، وأن محددة** $\underline{\text{أ}} = \Delta \neq 0$ **فإن:**

$$\underline{\text{أ}}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\text{د}}{\Delta} & \frac{-\text{ب}}{\Delta} \\ \frac{-\text{جـ}}{\Delta} & \frac{\text{أ}}{\Delta} \end{bmatrix}$$

البرهان:

لنفرض $\underline{\text{ب}} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{bmatrix}$ ، حيث $\Delta =$ محددة $\underline{\text{أ}} = \text{أ د} - \text{ب جـ}$

فيكون:

$$\underline{\text{أ}}\,\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \text{أ د} - \text{ب جـ} & -\text{أ ب} + \text{أ ب} \\ \text{جـ د} - \text{جـ د} & -\text{جـ ب} + \text{د أ} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \text{أ د} - \text{ب جـ} & 0 \\ 0 & \text{أ د} - \text{ب جـ} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\text{١}}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta & \text{٠} \\ \text{٠} & \Delta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{١} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{١} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\text{م}} \quad \text{.........................} \ (\text{١})$$

وبالمثل:

$$\underline{\text{ب أ}} = \frac{\text{١}}{\Delta} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\text{١}}{\Delta} \begin{bmatrix} \text{أد} - \text{ب جـ} & \text{د ب} - \text{ب د} \\ -\text{جـ أ} + \text{جـ أ} & -\text{جـ ب} + \text{أ د} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\text{١}}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta & \text{٠} \\ \text{٠} & \Delta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{١} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{١} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\text{م}} \quad \text{.........................} \ (\text{٢})$$

من (١)، (٢) ينتج أن ب هي النظير الضربي للمصفوفة أ ، أي أن:

$$\text{أ}^{-1} = \text{ب} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \text{ء} & -\text{ب} \\ -\text{ح} & \text{أ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\text{ء}}{\Delta} & \frac{-\text{ب}}{\Delta} \\ \frac{-\text{ح}}{\Delta} & \frac{\text{أ}}{\Delta} \end{bmatrix}$$

ملحوظة :

إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ح} & \text{ء} \end{bmatrix}$

فإن اتباع الخطوات التالية يجعل الحصول على أ^{-1} (إن كان موجوداً) أمراً سهلاً:

قبل كل شيء نوجد قيمة Δ (محددة أ). فإذا كان Δ = صفراً، فإن أ ليس لها نظير ضربي. وإذا كان $\Delta \neq$ صفراً، فإن للمصفوفة أ نظيراً ضربياً يتعين كالآتي:

(أ) نبادل بين وضعي العنصرين الواقعين على القطر الأساسي للمصفوفة أ .

(ب) نغير كلاً من إشارتي العنصرين الواقعين على القطر الآخر للمصفوفة أ .

(ح) نضرب المصفوفة الناتجة بعد اجراء (أ) ، (ب) بالعدد $\frac{1}{\Delta}$ فنحصل على أ^{-1}.

مثال (٣-٢٠)

إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} \text{س} & ٠ \\ ٠ & \text{ص} \end{bmatrix}$

حيث س ص $\neq$ ٠ ، فأثبت أنه لكل من أ ، ب ، أ ب نظير ضربي وأوجده.

الحـــل :

أولاً: بالنسبة للمصفوفة $\underline{أ}$.

بما أن محددة $\underline{أ}$ = Δ = $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٤ \end{vmatrix}$ = ٣ × ٤ − ٠ × ٠

= ١٢ $\neq$ صفراً

إذن للمصفوفة $\underline{أ}$ نظير ضربي هو:

$$\underline{أ}^{-1} = \frac{١}{١٢} \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$$

ثانياً: بالنسبة للمصفوفة $\underline{ب}$

بما أن محددة $\underline{ب}$ = Δ = $\begin{vmatrix} س & ٠ \\ ٠ & ص \end{vmatrix}$ = س ص − ٠

= س ص $\neq$ صفراً، من الفرض.

إذن للمصفوفة $\underline{ب}$ نظير ضربي هو:

$$\underline{ب}^{-1} = \frac{١}{س\,ص} \begin{bmatrix} ص & ٠ \\ ٠ & س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{س} & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{ص} \end{bmatrix}$$

إن هذا يعني أنه إذا كانت $\underline{ب}$ مصفوفة قطرية عناصر قطرها مغايرة للصفر فإن نظيرها مصفوفة قطرية أيضاً، عناصر قطرها هي مقلوب عناصر القطر في $\underline{ب}$

ثالثاً: بالنسبة للمصفوفة $\underline{أ}\ \underline{ب}$

$$\text{إن: } \underline{أ}\ \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س & ٠ \\ ٠ & ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣\,س & ٠ \\ ٠ & ٤\,ص \end{bmatrix}$$

ولما كانت $\underline{أ}\ \underline{ب}$ مصفوفة قطرية عناصر قطرها مغايرة للصفر فإن:

$$(\underline{أ}\ \underline{ب})^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٣\,س} & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٤\,ص} \end{bmatrix}$$

تحقق بنفسك أن $(\underline{أ}\,\underline{ب})\,(\underline{أ}\,\underline{ب})^{-١} = \underline{م} = (\underline{أ}\,\underline{ب})^{-١}\,(\underline{أ}\,\underline{ب})$

مثال (٣-٢١)

أي من المصفوفات الآتية لها نظير ضربي وأوجده:

(أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -٥ & ٥ \\ -٣ & ٣ \end{bmatrix}$ (حـ) $\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

(ء) $\begin{bmatrix} ١٢ & ٢٠ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$

(أ) المحددة $= \Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = ٨ \neq$ صفراً.

إذن لهذه المصفوفة نظير ضربي هو المصفوفة:

$$\frac{١}{٨}\begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ -\frac{٣}{٨} & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$$

(ب) المحددة = $\Delta = \begin{vmatrix} -٥ & ٥ \\ -٣ & ٣ \end{vmatrix} = -٥ \times ٣ - ٥ \times (-٣) =$ صفراً

إذن ليس لهذه المصفوفة نظير ضربي.

(حـ) المحددة = $\Delta = \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = ١ \times ١ - (-١) \times ١$

$= ٢ \neq$ صفراً.

إذن لهذه المصفوفة نظير ضربي هو المصفوفة:

$$\frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ -\frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$$

(ء) المحددة = $\Delta = \begin{vmatrix} ١٢ & ٢٠ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} = ١٢ \times ٥ - ٢٠ \times ٣$

= صفراً

إذن ليس لهذه المصفوفة نظير ضربي.

مثال (٣-٢٢)

احسب قيم س التي تجعل المصفوفة الآتية ليس لها نظير ضربي:

$$\begin{bmatrix} ٣ & س \\ س & ١٢ \end{bmatrix}$$

الحـــل :

المصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & س \\ س & ١٢ \end{bmatrix}$

ليس لها نظير ضربي عندما تكون محددتها صفراً، أي عندما:

$$\begin{vmatrix} ٣ & س \\ س & ١٢ \end{vmatrix} = س^{٢} - ٣ \times ١٢$$

$$= س^{٢} - ٣٦ = ٠$$

إذن تـوجـد قيمتـان لـ س همـا س = ٦ ، س = − ٦ (وهمـا جـذرا المعـادلـة $س^{٢} - ٣٦ = ٠$) تجعلان المصفوفة المعطاة ليس لها نظير ضربي.

تـمـاريـن (٣ − ٤)

(١) أوجد النظير الضربي لكل من المصفوفات الآتية كلما أمكن ذلك:

(أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٩ & -٣ \\ -٦ & ٢ \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$

(ء) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ (هـ) $\begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$

(ز) $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ (ح) $\begin{bmatrix} \text{أ} & ٠ \\ ٠ & \text{ب} \end{bmatrix}$ ، علماً بأن أ ب $\neq$ ٠

(٢) احسب قيم س التي تجعل كلاً من المصفوفات الآتية ليس لها نظير ضربي:

(أ) $\begin{bmatrix} \text{س} & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} \text{س} & ٩ \\ ٤ & \text{س} \end{bmatrix}$ (حـ) $\begin{bmatrix} \text{س} & ٤ \\ ٢ & \text{س} - ٢ \end{bmatrix}$

(ء) $\begin{bmatrix} \text{س} - ١ & ٢ \\ ١ & \text{س} - ٢ \end{bmatrix}$

(٣) إذا كانت $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٣ & -١٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ **فأثبت أن** $\underline{\text{س}}^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & ١ \\ ٠ & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$

(٤) إذا كانت $\underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} \text{أ} & -\text{أ ب} \\ ٠ & \text{ب} \end{bmatrix}$

فأثبت أن:

$\underline{\text{ص}}^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{١}{\text{أ}} & ١ \\ ٠ & \frac{١}{\text{ب}} \end{bmatrix}$ ، علماً بأن أ ب $\neq$ ٠

(٥) إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ١ & \text{س} \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ ، **فأثبت أن** $\underline{\text{أ}}^{-١} = \underline{\text{أ}}$

(٦) إذا كانت: $\underline{س} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٨ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ص} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٨ & ٣ \end{bmatrix}$ ،

فأجب عما يلي:

(أ) احسب كلًا من $\underline{س}^{-١}$، $\underline{ص}^{-١}$

(ب) أوجد $\underline{س}^{-١}\underline{ص}^{-١}$ وكذلك $\underline{ص}^{-١}\underline{س}^{-١}$

(حـ) أوجد $\underline{س}\ \underline{ص}$ ومن ثم أوجد $(\underline{س}\ \underline{ص})^{-١}$

(ء) أوجد $\underline{ص}\ \underline{س}$ ومن ثم تحقق أن $\underline{س}\ \underline{ص} \neq \underline{ص}\ \underline{س}$.

(هـ) أثبت أن $(\underline{س}\ \underline{ص})^{-١} \neq \underline{س}^{-١}\underline{ص}^{-١}$، مستفيداً من الفقرتين (ب)، (حـ).

(و) تحقق من أن $(\underline{س}\ \underline{ص})^{-١} = \underline{ص}^{-١}\underline{س}^{-١}$، مستفيداً من الفقرتين (ب) ، (حـ)

(٧) إذا كانت $\underline{س}$ لها نظير ضربي، فبرهن على أن $\underline{س}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{س}^{-١}$ ، أي أن:

$$(\underline{س}^{-١})^{-١} = \underline{س} \ .$$

٣ ـ ٦ بعض التطبيقات البسيطة على المصفوفات

أولًا : حل نظام معادلات الدرجة الأولى في مجهولين :

إذا أعطينا نظام المعادلتين:

$$أ س + ب ص = ل ،$$

$$ح س + ء ص = ك .$$

فإنه يمكن كتابتها بالصيغة المصفوفية التالية:

$$\begin{bmatrix} أ & ب \\ ح & ء \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ل \\ ك \end{bmatrix}$$

وإذا فرضنا:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ ح & ء \end{bmatrix} ، \quad \underline{س} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} ، \quad \underline{ح} = \begin{bmatrix} ل \\ ك \end{bmatrix}$$

فإن المعادلتين يمكن كتابتها بمعادلة مصفوفية واحدة بالصورة:

$$\underline{أ}\,\underline{س} = \underline{ح} \qquad (١)$$

تسمى $\underline{أ}$ مصفوفة المعاملات، $\underline{س}$ مصفوفة المجاهيل، $\underline{ح}$ مصفوفة الثوابت.

إذا كانت محددة $\underline{أ} \neq$ صفراً ، أي $\Delta = أ ء - ب ح \neq ٠$ ، فمن الممكن إيجاد حل المعادلة (١) كما يلي:

$\underline{أ}^{-١}(\underline{أ}\,\underline{س}) = \underline{أ}^{-١}\underline{ح}$ ، بضرب طرفي المعادلة (١) من اليمين لـ $\underline{أ}^{-١}$

$\Leftarrow (\underline{أ}^{-١}\underline{أ})\,\underline{س} = \underline{أ}^{-١}\underline{ح}$ ، خاصة التجميع

$\Leftarrow \underline{م}\,\underline{س} = \underline{أ}^{-١}\underline{ح}$ ، من تعريف نظير $\underline{أ}$

$\Leftarrow$ $\underline{س} = \underline{أ}^{-1}\,\underline{حـ}$ ،   لأن $\underline{م}$ عنصر محايد.

وواضح أنه بمقدورنا الآن إيجاد المجهولين س ، ص (اللذين يشكلان حل نظام المعادلتين الأصليتين) بدلالة الثوابت العددية أ ، ب ، حـ ، ء ، ل ، ك.

مثال (٣-٢٣)

حل نظام المعادلتين الآتيتين باستخدام المصفوفات وحقق الناتج :

٢ س + ٥ ص = ١ .... (١)

٣ س + ٧ ص = ٢ .... (٢)

الحــل :

نكتب المعادلة المصفوفية $\underline{أ}\,\underline{س} = \underline{حـ}$ حيث:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٧ \end{bmatrix} ، \quad \underline{س} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} ، \quad \underline{حـ} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$$

$$\text{محددة } \underline{أ} = \Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix} = ١٤ - ١٥$$

$$= -١$$

إذن $\underline{أ}$ لها نظير ضربي ويكون الحل هو: $\underline{س} = \underline{أ}^{-1}\,\underline{حـ}$ ،

$$\text{وحيث أن: } \underline{أ}^{-1} = \frac{١}{\Delta}\begin{bmatrix} ٧ & -٥ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \frac{١}{-١}\begin{bmatrix} ٧ & -٥ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ & ٥ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$$

اذن $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

أي أن س = ٣ ، ص = - ١

التحقيق :

بالتعويض المباشر في المعادلتين (١) ، (٢) بقيمتي س ، ص نجد أن:

٢ × ٣ + ٥ × (- ١) = ١ ،

٣ × ٣ + ٧ × (- ١) = ٢ .

مثال (٣-٢٤)

حل نظام المعادلتين الآتيتين مستخدماً المصفوفات:

- س - ٢ ص - ٣ = ٠ .... (١)

٤ س = - ٦ ص + ١ .... (٢)

الحل :

نكتب المعادلتين (١) ، (٢) بالصورة الآتية:

- س - ٢ ص = ٣ ،

٤ س + ٦ ص = ١

فتكون المعادلة المصفوفية هي $\underline{\text{أ}}\ \underline{\text{س}} = \underline{\text{حـ}}$ ، حيث:

$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{حـ}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

محددة $\underline{\text{أ}} = \Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 8 = 2$

$\Leftarrow$ $\underline{\text{أ}}$ لها نظير ضربي، ويكون:

$\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \underline{\text{أ}}^{-1} \, \underline{\text{حـ}}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$

أي أن س = ١٠ ، ص = $-\frac{13}{2}$ ، تحقق بنفسك من صحة الإجابة.

ثانيًا : تطبيقات متنوعة :

مثال (٣-٢٥)

تعهد مقاول أن يبني منازل وفق نموذجين أ ، ب في كل من الرياض ومكة المكرمة وجدة، فإذا تمكن في العام الأول من بناء:

١٣ منزلاً في الرياض من النموذج أ ،

٢٠ منزلاً في الرياض من النموذج ب ،

١٨ منزلاً في مكة من النموذج أ ،

١١ منزلاً في مكة من النموذج ب ،

١٦ منزلاً في جدة من النموذج أ ،

١٢ منزلاً في جدة من النموذج ب .

وتمكن في العام الثاني من بناء أربعة أمثال ما بناه من كل نموذج في كل مدينة، فالمطلوب هو:

(أ) تمثيل ما بناه في العام الأول بمصفوفة أعداد.

(ب) تمثيل ما بناه في العام الثاني بمصفوفة.

(حـ) تمثيل ما بناه في العامين معاً بمصفوفة.

(ء) إذا كان المنزل الواحد من النموذج أ يكلف س ريالاً، بينما يكلف المنزل الواحد من النموذج ب ، ص ريالاً فاكتب مصفوفة تمثل مجموع التكاليف الكلية لكل نموذج على حدة في كل مدينة.

الحـــل :

(أ) يمكن أن نوجز هذه المعلومات في مصفوفة أ من النوع ٣ × ٢، بحيث يمثل الصف الأول منها عدد المنازل في الرياض، والصف الثاني عدد المنازل في مكة المكرمة، والصف الثالث عدد المنازل في جدة، بينما يمثل العمود الأول من أ عدد المنازل من النموذج أ ، والعمود الثاني عدد المنازل من النموذج ب، وبذلك نكتب:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١٣ & ٢٠ \\ ١٨ & ١١ \\ ١٦ & ١٢ \end{bmatrix}$$

(ب) المصفوفة المطلوبة $=$ ٤ $\underline{أ}$

(حـ) المصفوفة المطلوبة $=$ $\underline{أ}$ + ٤ $\underline{أ}$

$=$ ٥ $\underline{أ}$

(ء) المصفوفة المطلوبة $=$ ٥ $\underline{أ}$ $\underline{س}$ ، وذلك بفرض أن:

$$\underline{س} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$ مصفوفة الأسعار

ونترك للطالب كتابة المصفوفات في كل من (ب) ، (حـ) ، (ء) بشكل تفصيلي.

مثال (٣-٢٦)

خمسة طلاب أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، كانت درجاتهم على الترتيب كما يلي:

في الرياضيات : ٥٦ ، ٤٥ ، ٥٥ ، ٦٣ ، ٧٠.

في التاريخ : ٥٠ ، ٦٠ ، ٦٥ ، ٧٢ ، ٤٦.

في الجغرافيا : ٦٦ ، ٤٧ ، ٦٠ ، ٥٠ ، ٣٠.

المطلوب:

(أ) تمثيل هذه المعلومات بمصفوفة ٣ × ٥.

(ب) إذا كانت الدرجات السابقة محسوبة من ١٠٠، وكانت الدرجة اللازمة للنجاح في الرياضيات ٦٠٪ والتاريخ والجغرافيا ٥٠٪، فكم طالباً رسب في الرياضيات وكم طالباً رسب في التاريخ وكم طالباً رسب في الجغرافيا، وكم طالباً رسب في الرياضيات والتاريخ معاً، وكم طالباً رسب في الرياضيات والجغرافيا معاً، وكم طالباً رسب في التاريخ والجغرافيا معاً، وكم طالباً رسب في المواد الثلاث؟ وكم طالباً نجح في المواد الثلاث؟

(حـ) إذا زيدت درجات الطلاب الخمسة بنسبة ١٠٪ في المواد الثلاث، فاكتب مصفوفة تمثل هذه الزيادة.

(ء) اكتب مصفوفة تمثل درجاتهم بعد الزيادة، ومنها حدد الطلاب الراسبين في كل مادة، وكم طالباً نجح في المواد الثلاث معاً؟

الحـــل:

(أ) المصفوفة المطلوبة من النوع ٣ × ٥، يعني أن المواد الثلاث تمثل على الترتيب بصفوف المصفوفة، بينما الطلاب الخمسة يمثلون على الترتيب بأعمدة المصفوفة.

نفرض أن $\underline{س}$ هي المصفوفة المطلوبة ونكتب:

$$\begin{bmatrix} ٧٠ & ٦٣ & ٥٥ & ٤٥ & ٥٦ \\ ٤٦ & ٧٢ & ٦٥ & ٦٠ & ٥٠ \\ ٣٠ & ٥٠ & ٦٠ & ٤٧ & ٦٦ \end{bmatrix} = \underline{س}$$

(ب) من المصفوفة $\underline{س}$ يمكن معرفة المعلومات المطلوبة ونلخصها في الجدول الآتي:

المادة	ر	ت	ج	ر ، ت	ر ، ج	ت ، ج	المواد الثلاث
عدد الراسبين	٣	١	٢	٠	١	١	٠

حيث ر ترمز للرياضيات ، ت للتاريخ ، ج للجغرافيا.

عدد الطلاب الناجحين في المواد الثلاث كلها = ١

(حـ) مصفوفة الزيادة = $\frac{١}{١٠} \cdot \underline{س}$.

(د) المصفوفة التي تمثل درجات الطلاب بعد الزيادة هي:

$$\underline{س} + \frac{1}{10} \cdot \underline{س} = \begin{bmatrix} 77 & 69,3 & 60,5 & 49,5 & 61,6 \\ 50,6 & 79,2 & 71,5 & 66 & 55 \\ 33 & 55 & 66 & 51,7 & 72,6 \end{bmatrix}$$

ومن هذه المصفوفة الجديدة نجد أن:

المادة	ر	ت	ج
الراسبون	ب	ـ	هـ

عدد الطلاب الناجحين في المواد الثلاث = ٣

تمارين (٣ – ٥)

(١) استخدم المصفوفات في إيجاد حل كل زوج من معادلات الدرجة الأولى الآتية:

(أ) س + ص = ١ ، ٢ س + ٣ ص = ٢ .

(ب) ٣ س + ٢ ص = ٥ ، ٢ س + ص = ٣ .

(حـ) ٥ ع – ٣ س = ٢٧ ، ٦ ع – ٢ س = ١٠ .

(د) ٤ س = – ٣ ص + ١ ، ص = ٣ – ٢ س .

(هـ) أ س – ب ص = ب ، ب س – أ ص = أ ، حيث $أ^2 \neq ب^2$

(و) $\frac{1}{2}$ س + $\frac{1}{3}$ ص = ١٠ ، $\frac{1}{3}$ س + $\frac{1}{4}$ ص = ٧ .

(٢) تمتلك شركة صناعية ٣ مصانع لانتاج جهاز الكتروني يتكون من أربعة أجزاء مختلفة أ ، ب ، حـ ، د فإذا كان المصنع الأول ينتج ٣٥ قطعة من أ ،

٤٣ قطعة من ب ، ٣٧ قطعة من حـ ، ١٦ قطعة من ء يومياً، وكان المصنع الثاني ينتج ٢٥ قطعة من أ ، ٣٦ قطعة من ب ، ٤١ قطعة من حـ ، ١٢ قطعة من ء يومياً، أما المصنع الثالث فينتج يومياً ٦٥ قطعة من أ ، ٥٥ قطعة من ب ، ٧٥ قطعة من حـ ، ٤٠ قطعة من ء ، فالمطلوب:

(أ) وضع هذه المعلومات في مصفوفة من النوع ٤ × ٣.

(ب) وضع هذه المعلومات في مصفوفة من النوع ٣ × ٤.

(حـ) كتابة مصفوفة تمثل إنتاج المصانع الثلاثة في ٣٠ يوماً.

(ء) إذا كانت الشركة تبيع كل قطعة من المصنع الأول بمبلغ $١٠^{٤}$ ريالاً، وكل قطعة من المصنع الثاني بمبلغ $١٠^{٣}$ ريالاً، وكل قطعة من المصنع الثالث بمبلغ $١٠^{٥}$ ريالاً، فاكتب مصفوفة تمثل دخل الشركة اليومي من بيع القطع أ ، ب ، حـ ، ء في مصانعها الثلاثة معاً.

(٣) ثلاثة طلاب يتنافسون في الحصول على درجات عالية في الفصل، وقد اتفقوا كما يلي:

إذا تغلب أ على ب فإن ب يشتري هدية لزميله أ بمبلغ ١٠٠ ريال ،
وإذا تغلب أ على حـ فإن حـ يشتري هدية لزميله أ بمبلغ ٨٠ ريال ،
وإذا تغلب ب على أ فإن أ يشتري هدية لزميله ب بمبلغ ٩٠ ريال ،
وإذا تغلب ب على حـ فإن حـ يشتري هدية لزميله ب بمبلغ ٧٥ ريال ،
وإذا تغلب حـ على أ فإن أ يشتري هدية لزميله حـ بمبلغ ٨٠ ريال ،
وإذا تغلب حـ على ب فإن ب يشتري هدية لزميله حـ بمبلغ ٩٠ ريال ،

المطلوب:

تمثيل هذه المعلومات بمصفوفة، بحيث يكون الفائز على يمين كل صف،

والخاسر في مقدمة كل عمود. وإذا رمزنا لهذه المصفوفة بالرمز س = [س ى هـ] فماذا تساوي س ى ى؟ وهل س ى هـ = س هـ ى لجميع قيم ى ، هـ الممكنة؟

(٤) يوجد ثلاثة طرق مختلفة تؤدي من ا إلى ق، وطريق واحد يؤدي من ب إلى ق، وطريق واحد من حـ إلى ق، كما يوجد طريق واحد من ا إلى ك، ويوجد طريق واحد من ب إلى ك، وهناك ثلاثة طرق من حـ إلى ك. والمطلوب:

(ا) عبر عن هذه المعلومات بمصفوفة، صفوفها الأماكن ا ، ب ، حـ بينما أعمدتها ق ، ك.

(ب) إذا وجدت ثلاثة طرق من ق إلى س، وطريقان من ق إلى ص، وأربعة طرق من ق إلى ع، وطريق واحد من ك إلى س، وطريق واحد من ك إلى ص، وأربعة طرق من ك إلى ع. فعبر عن هذه المعلومات بمصفوفة صفاها ق ، ك وأعمدتها س ، ص ، ع.

(حـ) اضرب المصفوفة المذكورة في (ا) في المصفوفة المذكورة في (ب).

(ء) ما هي المعلومات المعطاة بعناصر المصفوفة المذكورة في (حـ)؟

٣ ـ ٧ استخدام المحددات في حل أنظمة معادلات الدرجة الأولى

أولًا :

إذا كانت ا = $\begin{bmatrix} ا & ب \\ حـ & ء \end{bmatrix}$ فقد رأينا في البند (٣-٥) أن

المقدار ا ء - ب حـ يدعى محددة ا ، ويرمز له بالرمز $\begin{vmatrix} ا & ب \\ حـ & ء \end{vmatrix}$ ،

أي أن:

$$\text{محددة } \underline{\text{أ}} = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{vmatrix} = \text{أ ء} - \text{ب حـ} .$$

يقال إن $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{vmatrix}$ محددة من الدرجة الثانية، وتتكون كما نرى

من صفين وعمودين، حيث:

عنصرا الصف الأول هما : أ ، ب ؛

عنصرا الصف الثاني هما : حـ ، ء ؛

عنصرا العمود الأول هما : أ ، حـ ؛

عنصرا العمود الثاني هما : ب ، ء .

والآن إذا أُعطينا نظام المعادلتين الآتيتين في مجهولين س ، ص:

أ س + ب ص = ل .... (١)

حـ س + ء ص = ك .... (٢)

فإن الأعداد أ ، ب ، حـ ، ء تسمى المعاملات، أمّا العددان ل ، ك فيسمّيان الثوابت.

نسمي $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{vmatrix}$ محددة المعاملات ونرمز لها بالرمز $\triangle$ ،

لاحظ أن معاملات المجهول س تكوّن العمود الأول للمحددة $\triangle$ ، وأن معاملات

المجهول ص تكوّن العمود الثاني للمحددة $\triangle$.

نسمي $\begin{vmatrix} ل & ب \\ ك & ء \end{vmatrix}$ محددة المجهول س ونرمز لها بالرمز $\triangle_{س}$ ،

ونحصل عليها من $\triangle$ وذلك بعد الاستعاضة عن العمود الأول (معاملات س) بالثوابت ل ، ك.

كما نسمي $\begin{vmatrix} أ & ل \\ حـ & ك \end{vmatrix}$ محددة المجهول ص ونرمز لها بالرمز $\triangle_{ص}$ ،

ونحصل عليها من المحددة $\triangle$ وذلك بعد الاستعاضة عن العمود الثاني (معاملات ص) بالثوابت ل ، ك.

والآن بفرض أن $\triangle \neq 0$ ، فإن قيمتي المجهولين س ، ص تحددان تماماً من العلاقتين:

$$س = \frac{\triangle_{س}}{\triangle} = \frac{\begin{vmatrix} ل & ب \\ ك & ء \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{vmatrix}} = \frac{ل ء - ب ك}{أ ء - ب حـ} \qquad (٣)$$

$$ص = \frac{\triangle_{ص}}{\triangle} = \frac{\begin{vmatrix} أ & ل \\ حـ & ك \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{vmatrix}} = \frac{أ ك - ل حـ}{أ ء - ب حـ} \qquad (٤)$$

ولكي تطمئن من صحة العلاقة (٣). اضرب طرفي المعادلة (١) في العدد ء وطرفي المعادلة (٢) في العدد (ـ ب) ثم اجمع المعادلتين الناتجتين فتحصل على:

$$(أ ء - ب ح) س = ء ل - ب ك$$

$$\Leftarrow \quad س = \frac{ل ء - ب ك}{أ ء - ب ح} \text{ ،} \quad \text{بشرط} \quad أ ء - ب ح \neq ٠$$

ولكي تطمئن من صحة العلاقة (٤) افعل شيئاً مماثلاً لما فعلناه في حالة (٣)

مثال (٣-٢٧)

حل نظام المعادلتين الآتيتين باستخدام المحددات:

$$٢ س - ٣ ص = - ٤$$

$$٣ س + ص = ٢$$

الحـــل:

باستخدام العلاقتين (٣)، (٤) السابقتين نجد أن:

$$س = \frac{\Delta_س}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -٤ & -٣ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix}} = \frac{-٤ + ٦}{٢ + ٩} = \frac{٢}{١١} \text{ ،}$$

$$ص = \frac{\Delta_ص}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} ٢ & -٤ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix}}{١١} = \frac{٤ + ١٢}{١١} = \frac{١٦}{١١}$$

مثال (٣-٢٨)

حل نظام المعادلتين:

٥ س - ٦ ص = ٠ ، ٣ س + ٤ ص = ٠

الحـــل :

$$\text{س} = \frac{\begin{vmatrix} \text{٠} & \text{-٦} \\ \text{٠} & \text{٤} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{٥} & \text{-٦} \\ \text{٣} & \text{٤} \end{vmatrix}} = \frac{\text{٠}}{\text{٣٨}} = \text{٠} \ ، \quad \text{ص} = \frac{\begin{vmatrix} \text{٥} & \text{٠} \\ \text{٣} & \text{٠} \end{vmatrix}}{\text{٣٨}} = \text{٠}$$

مثال (٣-٢٩)

حل نظام المعادلتين:

- ٣ د = ٤ - ٣ م ، ٦ م + د + ٤ = ٠

الحـــل :

إن المجهولين هما م ، د. نضع المعادلتين بالشكل:

٣ م - ٣ د = ٤ ،

٦ م + د = - ٤

ثم نوجد قيمتي م ، د كما يلي:

$$م = \frac{\Delta_م}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -٤ & ١ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ٣ & -٣ \\ ٦ & ١ \end{vmatrix}} = \frac{-٨}{٢١}$$

$$د = \frac{\Delta_د}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٦ & -٤ \end{vmatrix}}{٢١} = \frac{-٣٦}{٢١} = -\frac{١٢}{٧}$$

ثانيًا :

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & ب & جـ \\ أ' & ب' & جـ' \\ أ'' & ب'' & جـ'' \end{bmatrix}$ فإن محددة المصفوفة $\underline{أ}$ تتعين

بطرائق متعددة نختار منها الطريقة الآتية:

محددة $\underline{أ} = \Delta$

$$= \begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ أ' & ب' & جـ' \\ أ'' & ب'' & جـ'' \end{vmatrix} = أ \begin{vmatrix} ب' & جـ' \\ ب'' & جـ'' \end{vmatrix} - ب \begin{vmatrix} أ' & جـ' \\ أ'' & جـ'' \end{vmatrix} + جـ \begin{vmatrix} أ' & ب' \\ أ'' & ب'' \end{vmatrix} \quad ....(١)$$

حيث $\begin{vmatrix} ب' & جـ' \\ ب'' & جـ'' \end{vmatrix}$ محددة من الدرجة الثانية نحصل عليها من Δ بعد حذف الصف

والعمود اللذين يتقاطعان في أ ؛

$\begin{vmatrix} أ' & ح' \\ أ'' & ح'' \end{vmatrix}$ محددة من الدرجة الثانية نحصل عليها من Δ بعد

حذف الصف والعمود اللذين يتقاطعان في ب ؛

$\begin{vmatrix} أ' & ب' \\ أ'' & ب'' \end{vmatrix}$ محددة من الدرجة الثانية نحصل عليها من Δ بعد

حذف الصف والعمود اللذين يتقاطعان في حـ

إن $\Delta = \begin{vmatrix} أ & ب & حـ \\ أ' & ب' & حـ' \\ أ'' & ب'' & حـ'' \end{vmatrix}$ تدعى محددة من الدرجة الثالثة،

وتتكون من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة.

مثال (٣-٣٠)

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٤ \\ ٠ & -١ & ٥ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة محددة أ .

الحـــل :

محددة $\underline{أ}$ $= \Delta =$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & - \end{vmatrix}$

$= 2\big(0 \times 5 - 4 \times (-1)\big) - 3(1 \times 5 - 4 \times 0) + 0$

$= 8 - 15$

$= -7$

مثال (٣-٣١)

أوجد قيمة كل من المحددتين:

(أ) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ ، (ب) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

الحـــل :

(أ) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2(-2) + 3(-1) + 4(1)$

$= -3$

(ب) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

$= 0$

ملحوظة : تنعدم المحددة إذا كانت جميع عناصر أي صف (أو عمود) فيها أصفاراً .

حل أنظمة معادلات الدرجة الأولى في ثلاثة مجاهيل :

لمّا عرفنا كيف نوجد قيمة محددة من الدرجة الثالثة فإننا نرغب الاستفادة من ذلك في حل أنظمة معادلات الدرجة الأولى في ثلاثة مجاهيل كما يلي:

إذا أُعطينا نظام المعادلات التالي في ثلاثة مجاهيل س ، ص ، ع :

$$\begin{cases} \text{أ س + ب ص + حـ ع} = \text{هـ}_1 \\ \text{أ}' \text{ س + ب}' \text{ ص + حـ}' \text{ ع} = \text{هـ}_2 \\ \text{أ}'' \text{ س + ب}'' \text{ ص + حـ}'' \text{ ع} = \text{هـ}_3 \end{cases}$$

فإننا بطريقة مماثلة لما فعلناه في حالة نظام معادلتين من الدرجة الأولى في مجهولين نسمي :

$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{أ}' & \text{ب}' & \text{حـ}' \\ \text{أ}'' & \text{ب}'' & \text{حـ}'' \end{vmatrix}$ محددة المعاملات ؛

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} \text{هـ}_1 & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{هـ}_2 & \text{ب}' & \text{حـ}' \\ \text{هـ}_3 & \text{ب}'' & \text{حـ}'' \end{vmatrix}$ محددة المجهول س ونحصل عليها من

المحددة Δ بالاستعاضة عن العمود الأول (معاملات س) بالثوابت $هـ_1$ ، $هـ_2$ ، $هـ_3$ ،

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} أ & هـ_1 & حـ \\ أ' & هـ_2 & حـ' \\ أ'' & هـ_3 & حـ'' \end{vmatrix}$$

محددة المجهول ص ونحصل عليها من

المحددة Δ بالاستعاضة عن العمود الثاني (معاملات ص) بالثوابت $هـ_1$ ، $هـ_2$ ، $هـ_3$ ،

$$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} أ & ب & هـ_1 \\ أ' & ب' & هـ_2 \\ أ'' & ب'' & هـ_3 \end{vmatrix}$$

محددة المجهول ع ونحصل عليها

من Δ بالاستعاضة عن العمود الثالث (معاملات ع) بالثوابت $هـ_1$ ، $هـ_2$ ، $هـ_3$.

والآن: بفرض أن $\Delta \neq$ صفراً، فإن قيم المجاهيل س ، ص ، ع تتحدد تماماً من العلاقات الآتية:

$$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} ، ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} ، ع = \frac{\Delta_{ع}}{\Delta} .$$

مثال (٣-٣٢)

أوجد حل نظام المعادلات التالية:

$$س + ٣ ص - ع = ١$$
$$٢ س + ٢ ص + ع = ٠$$
$$٣ س + ص + ٢ ع = -١$$

الحـــل :

محددة المعاملات = Δ = $\begin{vmatrix} ١ & ٣ & -١ \\ ٢ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$

= ١ × (٤ – ١) – ٣ (٤ – ٣) + (–١) (٢ – ٦)

= ٤

محددة المجهول س = $\Delta_{س}$ = $\begin{vmatrix} ١ & ٣ & -١ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ -١ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$

= ١ × (٤ – ١) –٣ (٠ + ١) + (–١) (٠ + ٢)

= – ٢

محددة المجهول ص = $\Delta_{ص}$ = $\begin{vmatrix} ١ & ١ & -١ \\ ٢ & ٠ & ١ \\ ٣ & -١ & ٢ \end{vmatrix}$

= ١ × (١) – ١ (٤ – ٣) + (–١) (– ٢)

= ٢

$$\text{محددة المجهول ع} = \Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٠ \\ ٣ & ١ & ١- \end{vmatrix}$$

$$= ١ \times (-٢) - ٣\,(-٢) + ١ \times (٢ - ٦)$$

$$= ٠$$

مما تقدم نجد أن:

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-٢}{٤} = -\frac{١}{٢} \text{ ،}$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢} \text{ ،}$$

$$\text{ع} = \frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta} = \frac{٠}{٤} = ٠$$

مثال (٣-٣٣)

حل نظام المعادلات الآتية:

$$٢\text{س} - \text{ص} + ٣\text{ع} = ١$$

$$٣\text{س} + ٢\text{ص} = ٢$$

$$-\text{س} + \text{ع} = ٣$$

الحـــل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٣ & ٢ & ٠ \\ -١ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١٣ \text{ ، } \quad \Delta_{س} = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٢ & ٢ & ٠ \\ ٣ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = -١٤ \text{ ، }$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ٣ & ٢ & ٠ \\ -١ & ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٣٤ \text{ ، } \quad \Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ٣ & ٢ & ٢ \\ -١ & ٠ & ٣ \end{vmatrix} = ٢٥$$

مما تقدم نجد أن :

$$س = -\frac{١٤}{١٣} \text{ ، } ص = \frac{٣٤}{١٣} \text{ ، } ع = \frac{٢٥}{١٣}$$

مثال (٣-٣٤)

حل نظام المعادلات الآتية :

$$س - ٢ ص = ٥ ع + ٢$$
$$ص = - ٢ س + ع + ١$$
$$ع = س - ص - ١$$

الحـــل :

نكتب نظام المعادلات بالصورة التالية :

$$س - ٢ ص - ٥ ع = ٢$$
$$٢ س + ص - ع = ١$$
$$- س + ص + ع = - ١$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -11 \quad ، \quad \Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \quad ،$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad ، \quad \Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

اذن: $\text{س} = \dfrac{6}{11}$ ، $\text{ص} = \dfrac{-3}{11}$ ، $\text{ع} = \dfrac{-2}{11}$.

مثال (٣-٣٥)

أثبت أن قيمة المحددة $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{أ}' & \text{ب}' & \text{حـ}' \\ \text{أ}'' & \text{ب}'' & \text{حـ}'' \end{vmatrix}$ تساوي صفراً إذا كانت عناصر أحد أعمدتها كلها أصفاراً.

الحـــل :

توجد ثلاث حالات هي :

(١) عناصر العمود الأول كلها أصفار

(٢) عناصر العمود الثاني كلها أصفار

(٣) عناصر العمود الثالث كلها أصفار.

نبرهن إحدى الحـالات ولتكن (١) ونترك الحـالتين (٢)، (٣) للطالب لأن اثباتها: يشبه تماماً إثبات (١).

(١) عناصر العمود الأول كلها أصفار يعني أن $أ = أ' = أ'' = ٠$

والآن نوجد قيمة المحددة بالطريقة المعتادة:

$$\begin{vmatrix} ٠ & ب & جـ \\ ٠ & ب' & جـ' \\ ٠ & ب'' & جـ'' \end{vmatrix}$$

$$= ٠ \times \begin{vmatrix} ب' & جـ' \\ ب'' & جـ'' \end{vmatrix} - ب \begin{vmatrix} ٠ & جـ' \\ ٠ & جـ'' \end{vmatrix} + جـ \begin{vmatrix} ٠ & ب' \\ ٠ & ب'' \end{vmatrix}$$

= صفراً ـ صفراً + صفراً

= صفراً

نستنتج من الحالة (١) أن قيمة المحددة من الدرجة الثانية تساوي صفراً عندما تكون عناصر أحد أعمدتها كلها أصفاراً.

مثال (٣-٣٦)

استفد من المثال (٣ـ ٣٥) في حل نظامي المعادلات الآتية:

(أ) $\begin{cases} ٥ س - \frac{٩}{٢} ص = ٠ \\ ١١ س + \frac{١}{٣} ص = ٠ \end{cases}$

(ب) $\begin{cases} ٢ س + ٣ ص - ع = ٠ \\ س - ٢ ص + ع = ٠ \\ ٥ س + \frac{٣}{٤} ص + \frac{١}{٢} ع = ٠ \end{cases}$

الحـــل :

(أ) $\Delta = \begin{vmatrix} ٥ & -\frac{٩}{٢} \\ ١١ & \frac{١}{٣} \end{vmatrix} = \frac{٥}{٣} + \frac{٩٩}{٢} = \frac{٣٠٧}{٦}$ ،

$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٠ & -\frac{٩}{٢} \\ ٠ & \frac{١}{٣} \end{vmatrix} = ٠$ ، $\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٥ & ٠ \\ ١١ & ٠ \end{vmatrix} = ٠$

اذن $س = ص = ٠$

(ب) $\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ١ & -٢ & ١ \\ ٥ & \frac{٣}{٤} & \frac{١}{٢} \end{vmatrix} = -\frac{٣}{٤}$.

ولما كان العمود الأول من $\Delta_{س}$ أصفاراً فأن $\Delta_{س} = ٠$ ،

ولما كان العمود الثاني من $\Delta_{ص}$ أصفاراً فإن $\Delta_{ص} = ٠$ ،

ولما كان العمود الثالث من $\Delta_{ع}$ أصفاراً فإن $\Delta_{ع} = ٠$

مما تقدم نجد أن :

$س = ص = ع = ٠$

يمكن أن نستنتج من المثالين (٣ ـ ٣٥) ، (٣ ـ ٣٦) أن أي نظام معادلات من الدرجة الأولى في مجهولين أو ثلاثة مجاهيل تكون قيم مجاهيله (حلوله) أصفاراً بشرط أن يكون :

(١) محددة معاملاته $\Delta \neq$ صفراً .

(٢) الثوابت كلها أصفار .

مثال (٣-٣٧)

أوجد قيم هـ التي تجعل لنظام المعادلات التالية حلاً:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{س} + \text{هـ ص} = ٠ \\ ٢\,\text{س} - \text{ص} = ٠ \end{array}\right.$$

الحـــل :

يكون لهذا النظام حل عندما تكون محددة معاملاته لا تساوي صفراً، أي عندما:

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{م} \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} \neq ٠ \Rightarrow -١ - ٢\,\text{م} \neq ٠$$

$$\Rightarrow \text{م} \neq -\frac{١}{٢} .$$

اذن $\text{م} \in \text{ح} - \left\{-\frac{١}{٢}\right\}$.

تـمـاريـن (٣ - ٦)

(١) احسب قيمة المحددات الآتية:

(أ) $\begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٠ & ٦ \end{vmatrix}$ **(ب)** $\begin{vmatrix} -٧ & ١٣ \\ ١٣ & -٧ \end{vmatrix}$ **(حـ)** $\begin{vmatrix} ٤ & ٤ \\ ٣ & ٣ \end{vmatrix}$

(د) $\begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٦ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ٥ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ (هـ) $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٦ \\ ٤ & ٠ & ٧ \\ ٥ & ٠ & ٨ \end{vmatrix}$ (و) $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ & ٤ \\ ٣ & ٤ & ٦ \\ ٤ & ٦ & ٨ \end{vmatrix}$

(٢) أوجد حل كل من أنظمة المعادلات الآتية باستخدام المحددات:

(أ) س + ٢ ص = ٠ (ب) - ٣ س - ٥ ص = - ١

٢ س - ٣ ص = ١ س + ٦ ص = ٣

(جـ) ٢ س = ٣ ص + ٤ (د) ٦ ل - ٧ ك = ٠

٥ ص = - ٤ س - ١ ٤ ل + ٣ ك = ٠

(٣) استخدم المصفوفات لحل أنظمة المعادلات المذكورة في التمرين (٢).

(٤) حل نظام المعادلات التالي بثلاث طرائق مختلفة وحقق الناتج في كل حالة:

٧ س - ٣ ص = ١

٢ س - ص = ٢

(٥) أوجد قيم هـ التي تجعل لنظام المعادلات الآتي حلاً:

س + ٢ ص = ١

٣ س + هـ ص = ٤

(٦) استخدم المحددات لحل أنظمة المعادلات الآتية:

(أ)
$$\left\{\begin{array}{l} \text{س} + \text{ص} + \text{ع} = \text{١} \\ \text{٢س} - \text{ص} - \text{ع} = -\text{١} \\ \text{٣س} + \text{٢ص} = \text{٢} \end{array}\right.$$

(ب)
$$\left\{\begin{array}{l} -\text{س} + \text{٣ص} + \text{ل} = \text{٠} \\ \text{٣س} - \text{٢ص} - \text{ل} = \text{١} \\ \text{س} + \text{ص} + \text{٢ل} = \text{٠} \end{array}\right.$$

(حـ)
$$\left\{\begin{array}{l} \text{٣س} = \text{٢ص} + \text{٣} + \text{ع} \\ \text{٢س} - \text{ص} + \text{٤} = \text{ع} \\ \text{ص} + \text{ع} = -\text{س} + \text{٣} \end{array}\right.$$

(د)
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س} - \frac{\text{٢}}{\text{٣}}\text{ص} + \frac{\text{٣}}{\text{٤}}\text{ع} = \text{١} \\ \text{٣س} + \text{ص} - \text{ع} = -\text{٢} \\ \text{٦س} - \text{ص} + \text{٢ع} = \text{٠} \end{array}\right.$$

(٧) أوجد قيم هـ التي تجعل لنظام المعادلات الآتية حلًا:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{س} - \text{ص} + \text{ع} = \text{٠} \\ \text{س} + \text{ص} + \text{هـع} = \text{٠} \\ -\text{س} - \text{ص} + \text{ع} = \text{١} \end{array}\right.$$

(٨) أثبت أن المبادلة بين صفي محددة من الدرجة الثانية يغير إشارتها فقط، أي أن:

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{حـ} & \text{ء} \\ \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix}$$

(٩) أثبت أن المبادلة بين أي صفين في محددة من الدرجـة الثالثـة يغير اشـارتها فقط، أي أن:

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{أ}' & \text{ب}' & \text{حـ}' \\ \text{أ}'' & \text{ب}'' & \text{حـ}'' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{أ}' & \text{ب}' & \text{حـ}' \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{أ}'' & \text{ب}'' & \text{حـ}'' \end{vmatrix} \text{،}$$

وكذلك المبادلة بين الصفين الأول والثالث.

أو المبادلة بين الصفين الثاني والثالث.

الخلاصة

(١) عرَّفنا المصفوفة من النـوع م $\times$ ﻫ بأنها عبـارة عن مجموعـة من الأعداد الحقيقيـة عـددها م ﻫ مـوزعة في م صفـاً، ﻫ عموداً، ومحصـورة بين قـوسين من الشكـل $[\quad]$.

(٢) عـرفنا تسـاوي مصفوفتـين وكذلـك جمعهـا وطـرحهـا وضرب مصفـوفـة بعـدد حقيقي.

(٣) ذكرنا بعض الأنواع المشهورة للمصفـوفات: المستـطيلة، والمربعـة، والقطريـة، ومصفوفة الوحدة، والمصفوفة الصفرية.

(٤) ذكرنا خواص عملية جمع المصفوفات وخواص ضرب مصفوفة بعدد حقيقي.

(٥) عرفنا الشرط اللازم لكي يكون ضرب مصفوفة في أخرى ممكناً، وهو أن يكون عدد أعمدة الأولى يساوي عدد صفوف الثانية.

(٦) عرفنا أن عملية ضرب المصفوفات غير إبدالي.

(٧) عرفنا أن المصفوفة المربعة ٢ × ٢ لها نظير ضربي عندما تكون محددتها لا تساوي صفراً.

(٨) قدَّمنا تطبيقات بسيطة على استخدام المصفوفات، ومنها حل نظام معادلات الدرجة الأولى في مجهولين عندما تكون محددة مصفوفة المعاملات لا تساوي الصفر.

(٩) عرفنا المحددات من الدرجة الثانية والثالثة. واستخدمنا ذلك في حل أنظمه معادلات الدرجة الأولى في مجهولين وفي ثلاثة مجاهيل.

تمارين عامة

(١) حل المعادلة الآتية وحقق الناتج:

$$٢\,\underline{س} + \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} = ٣\left(\underline{س} - \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}\right)$$

(٢) أوجد النظير الجمعي، ثم الضربي، إن أمكن، لكل مصفوفة فيما يلي:

(أ) $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ -٢ & -٤ \end{bmatrix}$

(٣) عبر عما يأتي بمصفوفة واحدة:

$$\begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$$

(٤) برهن أن المصفوفة $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ تحقق المعادلة $\underline{\text{س}}^{٢} - ٤\,\underline{\text{س}} - ٥\,\underline{\text{م}} = \underline{٠}$

(٥) إذا علمت أن $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ فالمطلوب:

(أ) اثبات أن $\underline{\text{س}}^{٢} - ٢\,\underline{\text{س}} = ٣\,\underline{\text{م}}$

(ب) استعمل النتيجة (أ) لايجاد $\underline{\text{س}}^{-١}$

(تنبيه: حلل الطرف الأيمن للمعادلة المعطاة).

(٦) إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ فإن المعادلة المصفوفية:

$$\underline{\text{أ}}^{٢} + \text{س}\,\underline{\text{أ}} + \text{ص}\,\underline{\text{م}} = \underline{٠}$$

تكافىء مجموعة من أربع معادلات في مجهولين س ، ص والمطلوب:

(أ) أوجد $\underline{أ}^{٢}$ ، ثم اكتب المعادلات الأربع المشار إليها.

(ب) حل المعادلات المذكورة في (أ) بطريقتين مختلفتين.

(٧) حل أنظمة المعادلات الآتية باستخدام المصفوفات:

(أ) س + ٢ ص = ٨ ، ٢ س + ٤ ص = ١٤

(ب) ٣ س - ٤ ص - ١٣ = ٠ ، ٥ س + ص + ٤ = ٠

(٨) إذا كانت $\underline{س} = \begin{bmatrix} س & ٠ \\ ٠ & ص \end{bmatrix}$ بحيث س ص ≠ ٠ ، فاثبت أن:

(أ) $\underline{س}^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{١}{س} & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{ص} \end{bmatrix}$ بطريقتين مختلفتين.

(ب) إذا كانت س = $\frac{٢}{٧}$ ، ص = - $\frac{٣}{١١}$ فإن: $\underline{س}^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{٧}{٢} & ٠ \\ ٠ & -\frac{١١}{٣} \end{bmatrix}$

(٩) إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} -١ & س \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ فاثبت أن $\underline{أ}^{-١} = \underline{أ}$ لكل س ∈ ح.

(١٠) حل أنظمة المعادلات الآتية باستخدام المحددات:

(أ)
$$\begin{cases} \text{س} + \frac{1}{2}\,\text{ع} + \frac{1}{4}\,\text{ل} = 0 \\ 2\,\text{س} - \text{ع} - 4\,\text{ل} = 0 \\ \text{س} + 3\,\text{ع} + \text{ل} = 1 \end{cases}$$

(ب)
$$\begin{cases} \frac{1}{3}\,\text{س} - \frac{2}{3}\,\text{ص} + \frac{5}{6}\,\text{ع} = 1 \\ \frac{3}{4}\,\text{س} + \text{ص} - \text{ع} = 0 \\ \text{س} + \frac{3}{5}\,\text{ع} = 0 \end{cases}$$

(حـ)
$$\begin{cases} 16\,\text{س} - 13\,\text{ص} + \text{ع} = 0 \\ \text{س} + 14\,\text{ص} + 12\,\text{ع} = 1 \\ 11\,\text{س} + \text{ص} + 15\,\text{ع} = 0 \end{cases}$$

(١١) أكمل بالتفصيل اثبات الحالات الباقية من المثال (٣ـ ٣٣).

الباب الرابع

جمع البيانات

الباب الرابع

جمع البيانات

٤ ـ١ مقدمة

بعد تعريف علم الإحصاء ، يتضح أن البيانات هي العمود الفقري له ، وأن المرحلة الأولى من مراحل العملية الإحصائية ـ أو البحث العلمي بالأسلوب الإحصائي ـ هي جمع البيانات عن المشكلة موضوع الدراسة أو الظاهرة محل البحث . إذ كيف يستطيع المسؤول أو متخذ القرار أن يعالج المشكلة أو يتخذ قراراً بشأنها دون أن تكون لديه البيانات والمعلومات اللازمة والممكن الحصول عليها والتي تساعد في تحديد حجم المشكلة تحديداً دقيقاً واضحاً . وبالتالي تساعد في اتخاذ أنسب القرارات . فالبيانات إذاً التي تجمع عن الظواهر لا تجمع لذاتها ، بل تجمع بهدف دراستها وتحليلها واستخراج النتائج منها . وبالتالي فإن جمع البيانات هي القاعدة التي تبنى عليها كل المراحل التالية في البحث . وكلما كانت البيانات التي تجمع عن الظاهرة بيانات حديثة ودقيقة ، ساعد ذلك في دراستها ووضع الحلول المناسبة لها .

وقبل تناول الطرق المختلفة لجمع البيانات ، نبدأ أولاً بالمصادر أو المنابع التي يمكن منها الحصول على البيانات . وهنا يمكن التمييز بين المصادر التاريخية والمصادر الميدانية . وسوف نتناول هذه المصادر فيما يلي بشيء من التفصيل .

٤ ـ ٢ المصادر التاريخية للبيانات

المصادر التاريخية هي عبارة عن الإحصاءات أو النشرات الإحصائية التي تنشرها المؤسسات

المختلفة ، أو الهيئات المتخصصة في الدولة أو أي جهة أخرى . فبالإضافة إلى المؤسسات الإحصائية المتخصصة (مصلحة الإحصاءات العامة في المملكة) تقوم كل هيئة أو مؤسسة أو وزارة بنشر إحصاءات متعددة عن الأنشطة المختلفة التي تمارسها . وقد تكون هذه النشرات الإحصائية سنوية أو نصف سنوية أو شهرية . . الخ على حسب طبيعة النشاط الذي تمارسه الهيئة أو الوزارة .

فإذا كان الباحث ـ مثلاً ـ يريد الحصول على بيانات عن أعداد الطلاب في المرحلة الثانوية حسب الصف والتخصص في المملكة في بعض السنوات ، فإذا حصل على هذه البيانات من وزارة المعارف (بالنسبة للبنين) ومن الرئاسة العامة لتعليم البنات (بالنسبة للبنات) فإنه يكون قد حصل على بياناته من مصادرها التاريخية .

وعموماً ، فإنه قبل جمع البيانات عن أي مشكلة أو ظاهرة لا بد وأن يكون الباحث على دراية كاملة ـ بقدر الإمكان ـ بكل المصادر التاريخية للموضوع محل الدراسة حتى يتأكد مما إذا كانت البيانات التي يريدها ـ أو بعضها ـ متوفرة لدى هذه المصادر أم لا . فإذا كانت متوفرة فإنه يكون قد وفّر على نفسه مشقة الحصول عليها من المصادر الميدانية ، ووفر وقته وجهده وماله . أما إذا كانت البيانات غير متوفرة في المصادر التاريخية فإن الباحث يكون مضطراً في هذه الحالة إلى اللجوء إلى المصادر الميدانية ليحصل على بياناته (أو يجمعها) بنفسه .

٤ ـ ٣ المصادر الميدانية

في كثير من الحالات لا تكون البيانات التي يريدها الباحث متوفرة في المصادر التاريخية ، أو أن تكون المتاحة منها قديمة ، أو لا يمكن الاعتماد عليها في دراسة المشكلة ، أو اتخاذ قرار مناسب بشأنها . في مثل هذه الحالات يلجأ الباحث إلى المصادر الميدانية ، أي يحصل على البيانات بنفسه سواء بالمقابلة الشخصية لمصدر البيانات أو بملاحظة الظاهرة ومشاهدتها أو بأي طريقة أخرى .

أي أن الباحث ينزل إلى المجتمع محل الدراسة ليجمع البيانات من أفراد ـ أو عن بعض أفراد ـ هذا المجتمع .

والمقصود هنا بالمجتمع الإحصائي معنى أعم وأوسع من مجرد المجتمع البشري .

٤ ـ ٤ تعريف المجتمع الإحصـائـي

يعرّف المجتمع الإحصائي بأنه جميع المفردات التي يجمعها إطار عام واحد أو مجموعة خصائص عامة واحدة.

فطلاب مدرسة معينة يمثل مجتمعاً إحصائياً تكون المفردة فيه هي الطالب . ومدارس مدينة ما تمثل مجتمعاً إحصائياً المفردة فيه هي المدرسة،. . . وهكذا فإنه قد يكون لدينا مجتمع من الطلاب ، أو من المدارس ، أو نوع معين من الحيوانات . . . الخ .

ويلاحظ على التعريف السابق للمجتمع الإحصائي ما يلي :

أ ـ أن المجتمع يتميز بالشمول ، أي يشمل جميع المفردات .

ب ـ أن جميع المفردات لها خصائص عامة واحدة، أو يجمعها إطار عام واحد. فإذا قلنا أن المجتمع محل الدراسة هم طلاب الصف الثاني الثانوي في قسم العلوم الإدارية في إحدى المدارس، نكون قد حددنا الإطار لهذا المجتمع تماماً. فالمفردات في هذا المجتمع هم جميع طلاب الصف الثاني الثانوي إداري في هذه المدرسة . فلا يصح أن نضيف إليهم طلاب الصف الثاني الثانوي قسم العلوم الطبيعية مثلاً. كما لا يصح أن نضيف إليهم طلاب الصف الثالث قسم العلوم الإدارية، ولا طلاباً من مدارس أخرى. وهكذا ...

ومن التعريف السابق للمجتمع الإحصائي يمكن التمييز بين المجتمع المحدود والمجتمع غير المحدود .

تعريف المجتمع المحدود :

المجتمع المحدود هو الذي يمكن معرفة حجمه أو عدد مفرداته . فمثلاً طلاب أحد الفصول يمثل مجتمعاً محدوداً لأنه يمكن حصر مفرداته .

تعريف المجتمع غير المحدود :

المجتمع غير المحدود هو الذي لا يمكن معرفة حجمه أو عدد مفرداته . فمثلاً أسماك البحر

الأحمر تمثل مجتمعاً غير محدود لأنه لا يمكن حصر عدد الأسماك في هذا البحر .

والباحث عندما يقرر استخدام المصادر الميدانية ، فإن أمامه أحد أسلوبين من أساليب البحث الميداني هما الحصر الشامل والعينات .

٤ ـ ٥ الحصر الشامل

تعريف الحصر الشامل :

المقصود بأسلوب الحصر الشامل هو أن الدراسة أو البحث تشمل جميع مفردات المجتمع الإحصائي .

مزايا الحصر الشامل :

تكمن مزايا أسلوب الحصر الشامل في أنه يكون لدى الباحث بيانات ومعلومات عن جميع مفردات المجتمع . أي تكون لديه صورة كاملة عنه . كما أن هناك بعض الحالات التي يضطر الباحث فيها لاستخدام هذا الأسلوب مثل :

- التعداد العام للسكان ، وذلك بهدف معرفة عدد السكان بالدولة والخصائص العامة لهم .
- الحالات التي قد ينجم عنها أضرار كبيرة لو تركت بعض المفردات دون فحص أو دراسة . مثل أسطوانات الغاز ، إذ لا بد أن تفحص كل واحدة قبل توزيعها .

عيوب الحصر الشامل :

أما عيوب الحصر الشامل فإنها تتلخص في الوقت والجهد والتكاليف . فهذا الأسلوب يحتاج إلى وقت طويل ، ومجهود كبير ، وتكاليف باهظة ، لا سيما إذا كان المجتمع محل الدراسة كبيراً . يستحيل إجراء هذا الأسلوب، وذلك إذا كان المجتمع غير محدود.

٤ ـ ٦ العيّنات

تعريف العينة :

العينة هي جزء من المجتمع تتمثل فيها خصائصه. وبالتالي فإن المقصود بأسلوب العينات في

الدراسة الميدانية هو أن الباحث يكتفي فقط بجزء من المجتمع ، أو بعدد من مفرداته ، (تسمى عينة) على أن يكون هذا الجزء ممثلاً للكل تمثيلاً سليماً . ثم يجمع بياناته عن هذه العينة فقط ويقوم بدراستها وتحليلها ، ثم يعمم النتائج التي يحصل عليها من العينة بعد ذلك على المجتمع .

مزايا العينات :

تتلخص مزايا أسلوب العينات في الآتي :

١ ـ توفير الوقت والجهد والتكاليف .

٢ ـ هي الطريقة الوحيدة في حالة المجتمعات غير المحدودة .

٣ ـ هي الأسلوب الوحيد لدراسة بعض المجتمعات المحدودة .

مثلاً : عند فحص دم مريض فإن الحصر الشامل هنا (أي فحص الدم كله) يؤدي إلى الوفاة ، لذلك نلجأ إلى العينة عن طريق فحص كمية صغيرة من الدم .

ونتيجة لهذه المزايا فقد أصبح أسلوب العينات واسع الانتشار حتى صارت له تطبيقات كثيرة جداً في مختلف المجالات : في التجارة والزراعة والصناعة والطب والكيمياء وفي الدراسات الاجتماعية والنفسية . . . في كل مجالات الحياة تقريباً .

عيوب العينات :

لما كانت العينة هي جزء من المجتمع، فإنه قد يحدث أن تختار بطريقة غير عملية، بمعنى ألا تكون ممثلة للمجتمع تمثيلًا صادقاً ، يجعل النتائج التي يتم التوصل إليها بناء على هذه العينة مضللة أوغير سليمة .

٤ ـ ٧ الاختيار العشوائي والاختيار المتحيّز

الاختيار العشوائي :

هو ذلك الاختيار الذي يعطي كل مفردة من مفردات المجتمع الفرصة للظهور في العينة .

الاختيار المتحيز :

هو الاختيار الذي لا يتحقق فيه مبدأ العشوائية . أو بتعبير آخر فإن الباحث يقوم باختيار مفردات معينة دون الأخرى .

٤ ـ ٨ وحدة المعاينة

ذكرنا أن العينة هي جزء من المجتمع . وبالتالي فإن عملية اختيار هذا الجزء (أي عملية اختيار العينة) تسمى بالمعاينة . وعند المعاينة لا بد أن يكون المجتمع مقسماً إلى وحدات أو مفردات تكون هي أساس عملية المعاينة . وهذه الوحدات التي يقسم اليها المجتمع هي التي تسمى وحدات المعاينة .

فإذا كانت الدراسة على طلاب إحدى المدارس فإن وحدة المعاينة هي الطالب . وإذا كانت تتناول العلاقات الاجتماعية داخل الأسر في إحدى المدن ، فإن وحدة المعاينة هي الأسرة ، . . . وهكذا فقد تكون وحدة المعاينة هي الفرد أو الأسرة أو المسكن أو القرية أو. . . الخ .

٤ ـ ٩ الإطار

الإطار يحتوي على جميع وحدات المعاينة . وقد يأخذ الإطار شكل قائمة تضم جميع الوحدات ، أو على شكل مجموعة بطاقات بحيث تكون كل وحدة في المجتمع لها بطاقة ، أو على شكل خريطة أو مجموعة خرائط. . . الخ.

وباختصار ، فإن الإطار هو الذي يحدد وحدات المعاينة تحديداً دقيقاً واضحاً.

٤ ـ ١٠ أهم أنواع العيّنات

ذكرنا من قبل أنه تتوقف على طريقة اختيار العينة ، أي على نوعها ، دقة النتائج التي يتم التوصل اليها . لذا فإنه من الضروري معرفة أهم أنواع العينات وكيفية اختيارها والشروط الواجب توفرها قبل هذا الاختيار . وهنا يمكن التمييز بين العينات غير العشوائية والعينات العشوائية .

أولًا : العينات غير العشوائية :

العينات غير العشوائية هي تلك العينات التي لا يتحقق شرط العشوائية عند اختيارها . وأهم هذه العينات ما يسمى بالعينة الغرضية أو العمدية . وفي هذه العينة فإن الباحث يقوم باختيار المفردات التي يرى أنها تناسب الغرض الذي اختيرت من أجله .

ثانيًا : العينات العشوائية :

والعينات العشوائية هي التي يتحقق شرط العشوائية عند اختيارها . ونذكر منها : العينة العشوائية البسيطة ، والعينة الطبقية ، والمتعددة المراحل .

أ ـ العينة العشوائية البسيطة :

عندما يكون المجتمع محل الدراسة متجانساً يتم اختيار العينة بالطريقة العشوائية البسيطة . وهي طريقة تعطي جميع مفردات المجتمع نفس الفرصة في الاختيار .

ويتوقف الاختيار على حجم أو عدد وحدات المجتمع . فإذا كان عدد وحدات المجتمع قليلاً يستخدم ما يسمى بالكيس المثالي . فإذا أردنا مثلاً اختيار عينة من أربعة طلاب من فصل به عشرون طالباً ، فإنه يمكن كتابة أسماء (أو أرقام) الطلاب العشرين على كرات صغيرة متشابهة تماماً ، ثم توضع في كيس يسمى بالكيس المثالي ، وتخلط بالكيس خلطاً جيداً ، وتفتح فتحة بالكيس تسمح بمرور كرة واحدة آلياً . وتكون أول وحدة من وحدات العينة هو الطالب الموضح اسمه (أو رقمه) على الكرة الأولى التي خرجت من الفتحة . ثم تعاد هذه الكرة إلى الكيس مرة أخرى . وتكرر هذه العملية حتى يتم اختيار العينة المطلوبة . مع ملاحظة أنه أثناء إجراء هذه الطريقة إذا ظهر اسم طالب (أو رقمه) مرة أخرى يعاد اختيار كرة غيرها ، أي إذا ظهرت كرة تحمل اسم طالب ظهر مسبقاً تعاد هذه الكرة إلى الكيس ولا تسجل نتيجتها .

أما إذا كان عدد وحدات المجتمع كبيراً ،فيتم اختيار العينة باستخدام جداول إحصائية تسمى « جداول الأرقام العشوائية » أو باستخدام الحاسب الآلي .

ب ـ العينة الطبقية :

عندما يكون المجتمع محل الدراسة غير متجانس فيقسم إلى طبقات متجانسة ، وتؤخذ عينة

عشوائية بسيطة من كل طبقة . وتسمى العينة التي نحصل عليها بهذه الطريقة بالعينة الطبقية .

فمثلاً إذا أردنا دراسة دخل أسر مدينة ما ، فإذا أخذنا عينة عشوائية بسيطة من هذه المدينة ، فإن وحدات هذه العينة ربما تكون معظمها من حي واحد (غني أو فقير) وبذلك لا تكون ممثلة لمجتمع الأسر في هذه المدينة . والطريقة الصحيحة أن تقسم المدينة إلى طبقات (أحياء) وتؤخذ عينة عشوائية بسيطة من كل حي . وبذلك نضمن تمثيل جميع الأحياء في العينة .

جـ ـ العينة المتعددة المراحل :

العينة المتعددة المراحل يتم اختيارها عندما يكون المجتمع محل الدراسة كبيراً ومنتشراً على مساحات جغرافية شاسعة ، وليس في الإمكان اختيار عينة عشوائية بسيطة . والعينة المتعددة المراحل يتم اختيارها على عدة مراحل . فإذا كان المطلوب ـ مثلاً ـ عينة من بعض سكان القرى في إحدى الدول ، فإنه في هذه الحالة يمكن اختيار عينة متعددة المراحل ، حيث يمكن اختيار عدد من المناطق عشوائياً كمرحلة أولى ، ثم يتم اختيار ـ من بين هذه المناطق ـ عدد من الإمارات عشوائياً كمرحلة ثانية ، ثم من بين هذه الإمارات يتم اختيار عدد من المراكز عشوائياً كمرحلة ثالثة ، ثم من داخل هذه المراكز يتم اختيار عدد من القرى عشوائياً كمرحلة رابعة ، وأخيراً يتم اختيار عدد من سكان هذه القرى عشوائياً كمرحلة خامسة وأخيرة .

وقد يزيد أو ينقص عدد المراحل ، وذلك حسب طبيعة المجتمع وإمكانية تقسيمه . ولعل الطالب قد لاحظ أن وحدة المعاينة قد اختلفت من مرحلة إلى أخرى . ففي المرحلة الأولى ـ في المثال ـ كانت وحدة المعاينة هي المنطقة . وفي الثانية كانت الإمارة ، وفي الثالثة كانت المركز ، وفي الرابعة القرية ، وفي الخامسة (والأخيرة) كان الفرد هو وحدة المعاينة وهو الذي ستجرى عليه الدراسة أو البحث .

٤ ـ ١١ استمارة جمع البيانات

بعد أن تناولنا مصادر البيانات ، انتهت بنا المصادر الميدانية إلى الحصر الشامل والعينات. حيث تعرضنا لمزايا وعيوب كل أسلوب ، ثم بعض المصطلحات والتعريفات الأساسية ، وأخيراً أهم أنواع العينات .

ولكن السؤال يظل قائماً وهو : كيف يحصل الباحث على البيانات من أفراد المجتمع أو العينة ولا سيما إذا كان المجتمع بشرياً؟ والإجابة هي أن الباحث يستعين في جمع بياناته بما يسمى « استمارة البحث » . ويضع الباحث في هذه الاستمارة جميع الأسئلة التي تضمن له الحصول على البيانات اللازمة للبحث . ويقوم كل فرد بالإجابة على جميع الأسئلة الموجودة بالاستمارة . ولما كان لاستمارة البحث هذه الأهمية في جمع البياناتِ فإن تصميمها يجب أن يحظى بكل دقة وعناية . فإلى جانب الكثير من الملاحظات الشكلية التي يجب أن تتوفر في الاستمارة (مثل حجمها ونوع الورق ولونه والطباعة . . . الخ) فإن هناك الكثير من الملاحظات الموضوعية التي يجب عدم إغفالها عند وضع الأسئلة أو تصميم الاستمارة .

وعلى الرغم من أن تصميم الاستمارة قد يختلف من بحث إلى آخر حسب موضوع البحث ، إلا أن هناك قواعد عامة أو ملاحظات أساسية يجب أن تؤخذ في الاعتبار عند تصميم الاستمارة لأي بحث ، نذكرها فيما يلي :

١ ـ يجب أن تكون الأسئلة مرتبة ومسلسلة منطقياً . وأن توضع في مجموعات متجانسة إن أمكن .

٢ ـ يجب أن تكون الأسئلة بلغة (أو لهجة) أفراد المجتمع أو العينة .

٣ ـ يجب أن تكون الأسئلة بسيطة وواضحة تماماً ، بحيث لا تحتمل اللبس أو الغموض . وهنا يفضل أن تكون الإجابة على الأسئلة بنعم أو لا (بقدر الإمكان) .

٤ ـ يجب ألا يحتوي السؤال الواحد على أكثر من نقطة أو أكثر من موضوع .

٥ ـ يجب ألا تكون الأسئلة أكثر من اللازم حتى لا يمل الأفراد ، وألا تكون أقل من اللازم حتى يتم الحصول على البيانات المطلوبة .

٦ ـ يجب ألا تحتاج الأسئلة إلى تفكير عميق أو ذاكرة حادة أو إجراء عمليات حسابية معقدة قبل الإجابة عليها .

٧ ـ يجب ألا تكون الأسئلة إيحائية ، أي لا توحي للأفراد بالإجابة التي قد يرغبها الباحث .

٨ ـ يجب ألا تكون الأسئلة محرجة أو حساسة أو مما يثير غضب أفراد المجتمع أو العينة .

٩ ـ يجب ألا تكون الأسئلة ذات إجابات بديهية معروفة مقدماً حتى لا يضيع وقت الباحث ومن يجرى عليهم البحث .

١٠ ـ يجب ـ بقدر الإمكان ـ أن تكون الأسئلة ذات إجابات مفتوحة ، حيث يكون من الأفضل أن يحدد الباحث الإجابات المحتملة ويطلب ممن يجرى عليهم البحث وضع علامة معينة أمام الإجابة الملائمة .

١١ ـ يجب ذكر الوحدات الكمية المستخدمة في الأسئلة بوضوح شديد لا يحتمل اللبس . فإذا كان السؤ ال ـ مثلاً ـ عن الدخل ، فيجب توضيح هل المقصود الدخل الشهري أو السنوي ، وهل الدخل من المرتب فقط أو من المصادر الأخرى كذلك ، ثم ما هي العملة المقصودة هل هي الريال أو الدينار . . . الخ .

١٢ ـ يفضل أن تحتوي الاستمارة على بعض الأسئلة المعادة أو ما تسمى بالأسئلة الضابطة ، والتي تكون بصيغ مختلفة وفي أماكن متباعدة في الاستمارة ، وذلك بهدف التأكد من بعض البيانات الهامة التي يدلي بها الأفراد . مع ملاحظة أن هذا يقتصر فقط على الأسئلة الهامة ـ كما ذكر ـ وإلا زاد عدد الأسئلة وأصبح أكثر من اللازم .

٤ ـ ١٢ طرق جمع البيانات الميدانيّة

بعد الأخذ في الاعتبار كل الملاحظات السابقة عند تصميم الاستمارة ، وبفرض أن الاستمارة قد صممت بالفعل ، وأن الباحث قد اختار أسلوب البحث الميداني (حصر شامل أو عينات) ، فإنه يستطيع الآن أن يجمع بياناته إما عن طريق المقابلة (أو المشاهدة) الشخصية ، أو عن طريق البريد ، أو عن طريق الهاتف .

وفيما يلي نتناول الطرق الثلاث لجمع البيانات بشيء من التفصيل :

أ ـ المقابلة الشخصية :

في هذه الطريقة فإن الباحث يقوم بنفسه بمقابلة كل فرد من أفراد المجتمع أو العينـة ، ثم

توجيه الأسئلة اليهم وتسجيل إجاباتهم .

مزايا المقابلة الشخصية :

١ ـ تعطي الباحث وسيلة أخرى لجمع البيانات أو المعلومات وهي المشاهدة أو الملاحظة بالعين .

٢ ـ تمكّن الباحث من توضيح أي نقاط غامضة في الأسئلة .

٣ ـ تمكّن الباحث من اكتشاف أي تناقض في إجابات الأفراد أثناء جلوسه معهم وإمكانية تصحيح ذلك في حينه .

٤ ـ هذه الطريقة تصلح تماماً إذا كان الأفراد الذين يجرى عليهم البحث من الأميين .

عيوب المقابلة الشخصية :

١ ـ قد يؤثر الباحث ـ ولو بالإيحاء ـ على إجابات الأفراد.

٢ ـ قد تسبب بعض الإحراج بالنسبة لنوع معين من الأسئلة .

٣ ـ هذه الطريقة تكلف كثيراً ، وتحتاج لعدد كبير من الأشخاص يساعد في جمع البيانات وهذا بدوره يتطلب وقتاً وجهداً ومالاً لتدريب هؤلاء .

ب ـ الاتصال عن طريق البريد :

وهنا تكون وسيلة اتصال الباحث بأفراد المجتمع أو العينة عن طريق البريد ، حيث ترسل استمارات البحث اليهم على عناوينهم بالبريد . ويجب أن يرفق مع استمارة البحث خطاب مناسب لتشجيعهم على المساهمة في البحث بإدلائهم البيانات الصحيحة . كما يجب أن يتضمن الخطاب ما يلي :

ـ أهمية البحث ، مع التعريف بالهيئة القائمة به .

ـ بيان أهمية مساهمة الأفراد في البحث .

ـ التأكيد على سرية البيانات وعدم استعمالها في أغراض أخرى .

وزيادة في تشجيع الأفراد وحفز همتهم يجب أن يرفق مع استمارة البحث والخطاب الرقيق مظروف عليه عنوان الباحث ، ويلصق على هذا المظروف طابع بريد حتى لا يتكلف الفرد أي شيء عند إعادته للباحث.

مزايا الاتصال بالبريد :

١ ـ سهولة الاتصال.

٢ ـ قلة التكاليف .

٣ ـ تعطي الأفراد وقتاً كافياً للإجابة دون تسرع .

٤ ـ تكون مناسبة في حالة الأسئلة عن الموضوعات الحساسة ، حيث يستطيع الأفراد الإجابة دون إحراج .

٥ ـ لا تتعرض لتحيز الباحث وإيحائه بالإجابة كما يحدث في المقابلة الشخصية .

عيوب الاتصال بالبريد :

١ ـ تشترط هذه الطريقة إجادة الأفراد للقراءة والكتابة .
٢ ـ قد يقوم بالرد على الأسئلة شخص آخر غير المطلوب .
٣ ـ قد يدلي الأفراد بإجابات غير حقيقية .
٤ ـ تحتاج إلى عناية كبيرة عند صياغة الأسئلة حتى تكون واضحة تماماً .
٥ ـ قد يهمل الأفراد الرد كلية ، ولذا فإنها تحتاج إلى مستوى معين من الوعي .
٦ ـ احتمال تأخير الخطابات أو ضياعها .

جـ الاتصال عن طريق الهاتف :

وأخيراً ، فإن وسيلة اتصال الباحث بأفراد المجتمع أو العينة تكون عن طريق الهاتف ، حيث

يقرأ الباحث الأسئلة على الأفراد هاتفياً ويتلقى الإجابة منهم ويقوم بتسجيلها .

مزايا الاتصال هاتفيًّا :

١ ـ السرعة والسهولة في الحصول على البيانات .

٢ ـ يمكن للباحث توضيح أي غموض في الأسئلة .

عيوب هذه الطريقة :

١ ـ تفترض وجود هاتف لدى كل فرد في المجتمع أو العينة ولذا يصعب تعميمها .
٢ ـ من الصعب الحصول على بعض البيانات عن طريق الهاتف .
٣ ـ قد تكون مكلفة إذا كانت هناك مكالمات خارجية كثيرة .

الخلاصة

١ ـ هناك مصدران للبيانات : المصادر التاريخية والمصادر الميدانية .

٢ ـ المجتمع الإحصائي هو جميع الوحدات التي يجمعها إطارعام واحد أو مجموعة خصائص عامة واحدة .

٣ ـ العينة هي جزء من المجتمع تتمثل فيها خصائص المجتمع .

٤ ـ الحصر الشامل يعني أن البحث يشمل جميع مفردات أو وحدات المجتمع بينما الدراسة عن طريق العينات تعني أنها لا تشمل جميع مفردات المجتمع بينما تقتصر على جزء منه .

٥ ـ الاختيار العشوائي هو الذي يعطي مفردات المجتمع الفرصة في الاختيار. بينما الاختيار المتحيز لا يتحقق فيه مبدأ العشوائية .

٦ ـ وحدة المعاينة هي الوحدات التي يقسم اليها المجتمع وتكون أساس عملية المعاينة .

٧ ـ الإطار هو الذي يضم جميع وحدات المعاينة .

٨ ـ هناك عينات غير عشوائية (كالعينة الغرضية) وعينات عشوائية (كالعينة العشوائية البسيطة ، والطبقية ، والمتعددة المراحل) .

٩ ـ هناك الكثير من الملاحظات التي يجب أخذها في الاعتبار عند تصميم استمارة البحث .

١٠ ـ طرق جمع البيانات الميدانية هي :
أ ـ المقابلة الشخصية . ب ـ البريد . حـ ـ الهاتف
ولكل منها مزاياه وعيوبه .

تمارين

[١] تكلم عن المصادر التاريخية لجمع البيانات .

[٢] قارن بين أسلوبي الحصر الشامل والعينات مبيناً مزايا وعيوب كل أسلوب .

[٣] عرّف ما يلي :
المجتمع الإحصائي ـ العينة ـ الإطار ـ وحدة المعاينة .

[٤] تكلم عن العينة العشوائية البسيطة مبيناً كيف يتم اختيارها .

[٥] تكلم بإيجاز عن أهم أنواع العينات العشوائية .

[٦] اذكر أهم الملاحظات التي يجب أن تؤخذ في الاعتبار عند تصميم استمارة البحث .

[٧] قارن بين طريقتي الاتصال الشخصي والمراسلة بالبريد في جمع البيانات مبيناً مزايا وعيوب كل طريقة .

الباب الخامس

مقـايـيـس الـتشـتـت

٤ – ١ مقدمة.

٤ – ٢ الانحراف المعياري للبيانات غير المبوّبة.

٤ – ٣ الانحراف المعياري للبيانات المبوّبة.

٤ – ٤ التشتّت النسبي (معامل الاختلاف).

٤ – ٥ أمثلة عامّة.

- الخلاصة.

- تـمـارين.

الباب الخامس

مقاييس التشتت

٥ ـ١ مقـــدمـــة

تناولنا في الصف الأول مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات) . ولكن هذه المقاييس لا تعطي فكرة كاملة عن خصائص التوزيعات التكرارية ، بحيث لا يمكن إجراء مقارنة متكاملة بين ظاهرتين من معرفة متوسطيها فقط . فقد يكون المتوسطان متساويين في القيمة بينما تكون مفردات إحدى الظاهرتين متقاربة أي أكثر تجانساً ، ومفردات الأخرى متباعدة عن بعضها البعض أي أكثر تشتتاً .

مثال (٥-١)

أوجد الوسط الحسابي $\overline{\text{س}}$ لمجموعتي القيم في أ، ب فيما يلي :

أ) ٤٠، ٤٥، ٥٠، ٥٢، ٥٥، ٥٧.

ب) ٢٠، ٣٥، ٥٠، ٥٥، ٦٠، ٨٠.

الحـــل :

أ) $\overline{\text{س}} = \frac{٤٠ + ٤٥ + ٥٠ + ٥٢ + ٥٥ + ٥٨}{٦} = \frac{٣٠٠}{٦} = ٥٠$

ب) $\bar{س} = \frac{٢٠ + ٣٥ + ٥٠ + ٥٥ + ٦٠ + ٨٠}{٦} = \frac{٣٠٠}{٦} = ٥٠$

تلاحظ في هذا المثال أن الوسط الحسابي لمجموعة المفردات (أ) يساوي الوسط الحسابي لمجموعة المفردات (ب) وعلى الرغم من ذلك، فإن التوزيع الأول يختلف عن الثاني، ففي الأول تنحصر المفردات بين ٤٠، ٥٨، بينما تنحصر في الثاني بين ٢٠، ٨٠. وهذا يعني أن المفردات في المجموعة (ب) أكثر تشتتاً منها في المجموعة (أ)، ويمكنك ملاحظة هذه الظاهرة في التوزيعات التكرارية أيضاً، كما في المثال التالي :

مثال (٥-٢)

الجدولان التكراريان التاليان يمثلان توزيع علامات الفصلين أ، ب من الصف الأول الثانوي في ماده الرياضيات :

الفصل أ :

فئات العلامات	٥٠-٥٤	٥٥-٥٩	٦٠-٦٤	٦٥-٦٩	٧٠-٧٤	٧٥-٧٩
التكرار	٥	٨	١٢	١٠	٣	٢

الفصل ب :

فئات العلامات	٢٧-٣٥	٣٦-٤٤	٤٥-٥٣	٥٤-٦٢	٦٣-٧١	٧٢-٨٠	٨١-٨٩
التكرار	١	٥	٦	٨	٧	٧	٦

أولاً : أوجد الوسط الحسابي لعلامات كل من الفصلين أ، ب.

ثانياً : مثّلْ كلا من التوزيعين بطريقة المضلع التكراري.

الحـــل :

أولاً : لإيجاد الوسط الحسابي للفصل أ :

$\bar{س} = \frac{\text{مجموع (ت×س)}}{\text{مجموع ت}}$ حيث س مركز الفئة ، ت تكرارها

الفئات	التكرار ت	مراكز الفئات س	ت × س
٥٠-٥٤	٥	٥٢	٢٦٠
٥٥-٥٩	٨	٥٧	٤٥٦
٦٠-٦٤	١٢	٦٢	٧٤٤
٦٥-٦٩	١٠	٦٧	٦٧٠
٧٠-٧٤	٣	٧٢	٢١٦
٧٥-٧٩	٢	٧٧	١٥٤
المجموع	٤٠		٢٥٠٠

$\bar{س} = \frac{٢٥٠٠}{٤٠}$

$= ٦٢,٥$

وللفصـل ب :

الفئات	التكرار ت	مراكز الفئات س	ت × س
٢٧-٣٥	١	٣١	٣١
٣٦-٤٤	٥	٤٠	٢٠٠
٤٥-٥٣	٦	٤٩	٢٩٤
٥٤-٦٢	٨	٥٨	٤٦٤
٦٣-٧١	٧	٦٧	٤٦٩
٧٢-٨٠	٧	٧٦	٥٣٢
٨١-٨٩	٦	٨٥	٥١٠
المجموع	٤٠		٢٥٠٠

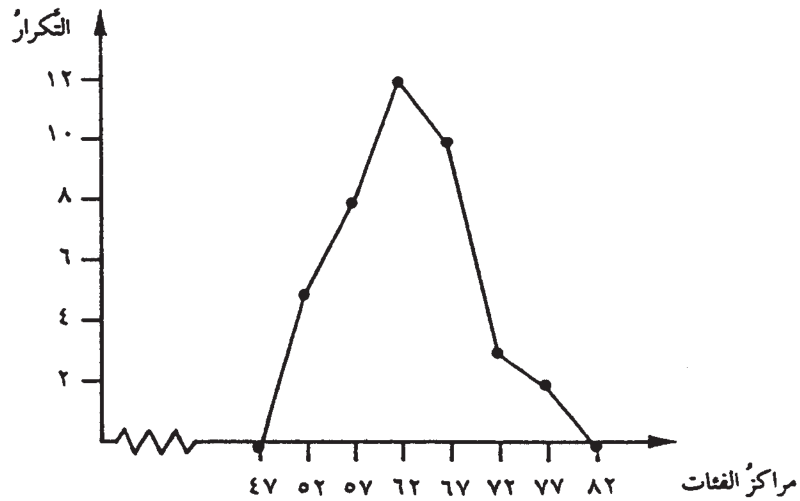
$س = \frac{٢٥٠٠}{٤٠}$

$= ٦٢,٥$

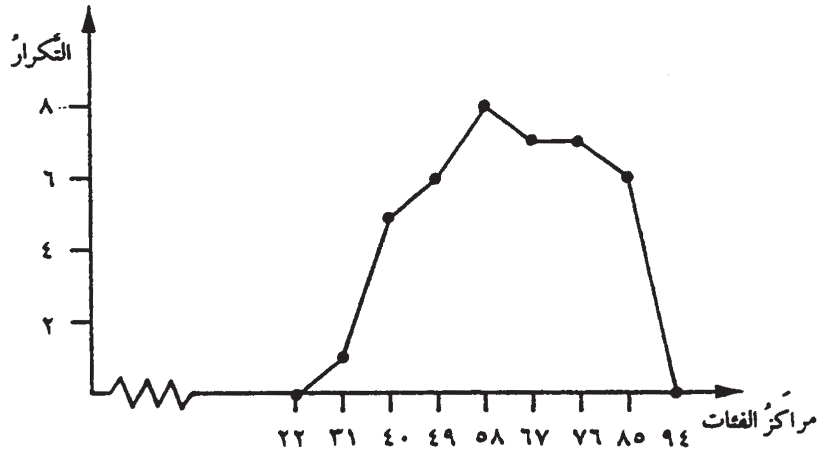
لاحظ أن الوسط الحسابي للفصلين واحد، لكن علامات الطلبة في الفصل (ب) متباعدة أكثر من علامات الفصل (أ) .

وهذا يعني أن الطلبة في الفصل (أ) أكثر تجانساً في التحصيل؛ أي أن مستواهم العلمي متقارب أكثر من الطلبة في الفصل (ب).

ثانياً : لرسم المضلع التكراري نمثل كل فئة بنقطة في المستوى، إحداثيها الأفقي مركز الفئة، وإحداثيها الرأسي تكرار الفئة.



المضلع التكراري للفصل (أ)



المضلع التكراري للفصل (ب)

لاحظ في مثال (٢) السابق أن توزيعي علامات الفصلين لهما الوسط نفسه، ولكن بالنظر إلى المضلعين اللذين يمثلان التوزيعين، فإنك تلاحظ أن القيم في توزيع علامات الفصل (ب) أكثر تشتتاً مما هو في توزيع علامات الفصل (أ) وفي هذه الحال نقول إن القيم في توزيع (أ) أكثر تجانساً منه في توزيع (ب).

لذلك سندرس في هذا الباب بعض المقاييس التي تحدد مدى تقارب أو تباعد مفردات الظاهرة عن بعضها ، أي مدى تشتت هذه المفردات . وهناك عدة مقاييس لحساب التشتت من أهمها الانحراف المعياري والتباين ومعامل الاختلاف .

٥ ـ ٢ الانحراف المعياري للبيانات غير المبوّبة

يعتبر الانحراف المعياري من أكثر مقاييس التشتت استخداماً . فإذا كانت لدينا $ن$ من المفردات $س_١$ ، $س_٢$ ، . . . ، $س_ن$ ووسطها الحسابي $\overline{س}$ ، فإن هذه المفردات تكون متقاربة من بعضها البعض إذا كانت قريبة من وسطها الحسابي $\overline{س}$ ، أي إذا كانت انحرافاتها عن $\overline{س}$ صغيرة . وبالتالي فإن انحرافات المفردات عن وسطها الحسابي يمكن استخدامها لقياس التشتت . ويمكن أن يتم ذلك بأخذ متوسط هذه الانحرافات . وحيث أن مجموع انحرافات القيم عن وسطها

الحسابي دائماً يساوي صفراً ، وذلك لأن بعض هذه الانحرافات موجب والبعض الآخر سالب ، والموجب يلاشي السالب ، فيمكن التغلب على ذلك بأخذ متوسط مربعات هذه الانحرافات والذي يسمى « التباين » .

أي أن التباين ، ويرمز له عادة بالرمز ع^2 يكتب كما يلي :

$$\text{ع}^2 = \frac{\text{مجـ}\ (\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}}$$

ويلاحظ أن وحدات التباين هي مربع الوحدات الأصلية ، ونظراً لأنه يفضل أن يكون مقياس التشتت بنفس الوحدات الأصلية ، فيؤخذ الجذر التربيعي للتباين كمقياس للتشتت ويسمى الانحراف المعياري ويرمز له بالرمز ع . أي أن

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\text{مجـ}\ (\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}}}$$

تعريف :
الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي .

مثال (٥-٣)

احسب الانحراف المعياري للقيم الآتية :

٢٣ ، ٢٨ ، ٢٤ ، ٢٩ ، ٣٢ ، ٢١ ، ٢٥ ، ٣٤

الحــل :

لحساب الانحراف المعياري نكون الجدول التالي :

س	س − $\bar{س}$	(س − $\bar{س}$)^2
٢٣	٤ −	١٦
٢٨	١	١
٢٤	٣ −	٩
٢٩	٢	٤
٣٢	٥	٢٥
٢١	٦−	٣٦
٢٥	٢−	٤
٣٤	٧	٤٩
٢١٦		١٤٤

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$$

$$= \frac{٢١٦}{٨}$$

$$= ٢٧$$

$$ع = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^2}{ن}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^2}{ن}}$$

$$= \sqrt{\frac{١٤٤}{٨}}$$

$= \sqrt{١٨}$

$= ٣\sqrt{٢}$

$= ٣ \times ١,٤١٤$

$= ٤,٢٤٢$

صيغة مختصرة للانحراف المعياري :

يمكن كتابة صيغة الانحراف المعياري :

$$ع = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^٢}{ن}}$$

على الصورة المختصرة التالية :

$$\boxed{ع = \sqrt{\frac{\sum س^٢}{ن} - \bar{س}^٢}}$$

وتتطلب هذه الطريقة حساب :

١ ـ الوسط الحسابي $\bar{س}$.

٢ ـ مجموع مربعات القيم $\sum س^٢$.

مثال (٥-٤)

احسب الانحراف المعياري للبيانات التالية :

١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩

الحــل :

لحساب الانحراف المعياري نكون الجدول التالي :

س	س^٢
١	١
٣	٩
٥	٢٥
٧	٤٩
٩	٨١
٢٥	١٦٥

$$\overline{س} = \frac{\sum س}{ن}$$

$$= \frac{٢٥}{٥}$$

$$= ٥$$

$$ع = \sqrt{\frac{\sum س^٢}{ن} - \overline{س}^٢}$$

$$= \sqrt{\frac{١٦٥}{٥} - ٢٥}$$

$$= \sqrt{٣٣ - ٢٥}$$

$$= \sqrt{٨}$$

$$= ٢\sqrt{٢}$$

$$= ٢,٨٣$$

مثال (٥-٥)

اطـرح ٢٠ من كل قيمة من القيم الموجـودة في المثـال (٥ ـ ١) ثم احسب الانحـراف المعياري للقيم الجديدة وقارن النتائج .

الحـــل :

بعد طرح ٢٠ من كل قيمة تصبح القيم :

٣ ، ٨ ، ٤ ، ٩ ، ١٢ ، ١ ، ٥ ، ١٤

ولحساب الانحراف المعياري نكون الجدول التـالي :

س	س٢
٣	٩
٨	٦٤
٤	١٦
٩	٨١
١٢	١٤٤
١	١
٥	٢٥
١٤	١٩٦
٥٦	٥٣٦

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$$

$$= \frac{٥٦}{٨}$$

$$= ٧$$

$$ع = \sqrt{\frac{\sum س^2}{ن} - \bar{س}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{٥٣٦}{٨} - ٤٩}$$

$$= \sqrt{٦٧ - ٤٩}$$

$$= \sqrt{١٨}$$

$$= ٣\sqrt{٢}$$

$$= ٣ \times ١,٤١٤$$

$$= ٤,٢٤٢$$

نلاحظ في المثالين (٥ ـ ١) ، (٥ ـ ٣) أن قيمة الانحراف المعياري فيهما متساوية .
ومن هذا نستنتج أن طرح كمية ثابتة من جميع القيم لا تؤثر على قيمة الانحراف المعياري .

٥ ـ ٣ الانحراف المعياري للبيانات المبوّبة

إذا كانت البيانات مصنفة في جدول تكراري ، فإنه يمكن حساب الانحراف المعياري باستخدام الصيغة الآتية :

$$\boxed{ع = \sqrt{\frac{\sum س^2 ك}{ن} - \bar{س}^2}}$$

حيث أن:

س ترمز لمراكز الفئات

ك التكرار المناظر لمركز الفئة

ن مجموع التكرارات = Σ ك

$$\bar{س} \text{ الوسط الحسابي} = \frac{\Sigma \text{س ك}}{ن}$$

ولحساب الانحراف المعياري في هذه الحالة نضيف ثلاثة أعمدة إلى الجدول التكراري الأصلي . ونتبع الخطوات الآتية :

١ ـ نوجد مراكز الفئات ونرمز لها بالرمز س ونضعها في العمود الأول.

٢ ـ نضرب مراكز الفئات في التكرارات المناظرة لها (أي س × ك) ونضعها في العمود الثاني ، ومنها نحصل على الوسط الحسابي باستخدام الصيغة :

$$\bar{س} = \frac{\Sigma \text{ س ك}}{ن}$$

٣ ـ نضرب قيم العمود الأول (س) في قيم العمود الثاني (س ك) لنحصل على $س^٢$ ك ونضعها في العمود الثالث ومنه نجد Σ $س^٢$ ك .

٤ ـ نحسب الانحراف المعياري باستخدام الصيغة :

$$ع = \sqrt{\frac{\Sigma \text{ س}^٢ \text{ك}}{ن} - \bar{س}^٢}$$

مثال (٥-٦)

البيانات التالية تمثل توزيع مائة عامل في أحد المصانع حسب الأجر اليومي (بالريال) :

فئات الأجر	١٥ ـ	٢٥ ـ	٣٥ ـ	٤٥ ـ	٥٥ ـ	٦٥ ـ	٧٥ ـ ٨٥	المجموع
عدد العمال	٦	١٢	١٨	٢٤	٢٠	١٢	٨	١٠٠

احسب الانحراف المعياري للأجر اليومي للعمال.

نكون الجدول التالي :

فئات الأجر	التكرار ك	مراكز الفئات س	س ك	س^{٢} ك
١٥-	٦	٢٠	١٢٠	٢ ٤٠٠
٢٥-	١٢	٣٠	٣٦٠	١٠ ٨٠٠
٣٥-	١٨	٤٠	٧٢٠	٢٨ ٨٠٠
٤٥-	٢٤	٥٠	١ ٢٠٠	٦٠ ٠٠٠
٥٥-	٢٠	٦٠	١ ٢٠٠	٧٢ ٠٠٠
٦٥-	١٢	٧٠	٨٤٠	٥٨ ٨٠٠
٧٥ - ٨٥	٨	٨٠	٦٤٠	٥١ ٢٠٠
المجموع	١٠٠		٥ ٠٨٠	٢٨٤ ٠٠٠

ومن هذا نجد أن :

$$\bar{س} = \frac{\sum س\ ك}{ن}$$

$$= \frac{٥٠٨٠}{١٠٠} = ٥٠,٨ \text{ ريالاً}$$

$$ع = \sqrt{\frac{\sum س^{٢}\ ك}{ن} - \bar{س}^{٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{٢٨٤\ ٠٠٠}{١٠٠} - (٥٠,٨)^{٢}}$$

$$= \sqrt{٢٨٤٠ - ٢٥٨٠,٦٤}$$

$$= \sqrt{٢٥٩,٣٦}$$

= ١٦,١ ريالاً

٥ ـ ٤ التستّت النسبي (معامل الاختلاف)

إذا أردنا على سبيل المثال مقارنة تشتت أطوال وأوزان عدد من الطلاب ، فإنه لا يمكن استخدام الانحراف المعياري لهاتين الظاهرتين ، وذلك لاعتماده على وحدات القياس (حيث تقاس الأطوال بالسنتيمتر والأوزان بالكيلوجرام) . ولذا نلجأ إلى مقياس آخر للتشتت يعتمد على الانحراف المعياري ولكنه لا يتأثر بوحدات القياس ، ويسمى بمعامل الاختلاف . وهو مقياس نسبي للتشتت . ويستخدم معامل الاختلاف في الحالات التالية :

١ ـ مقارنة تشتت مجموعات من القيم تختلف في وحدات القياس .

٢ ـ مقارنة تشتت مجموعات من القيم تقاس بنفس الوحدات ولكن تختلف في أوساطها الحسابية .

٣ ـ مقارنة تشتت مجموعات من القيم تختلف في وحدات قياسها وأوساطها الحسابية معاً .

تعريف :
يعرّف معامل الاختلاف على أنه النسبة المئوية للانحراف المعياري بالنسبة للوسط الحسابي .

أي أن :

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{ع}{\bar{س}} \times ١٠٠$$

مثال (٥-٧)

احسب معامل الاختلاف للبيانات التالية :

٧، ٥، ٨، ٤، ٦، ١٠، ٥، ٩، ٧، ٩

الحـــل :

$\sum$ س = ٧٠

$\sum$ س^{٢} = ٥٢٦

$\therefore \quad \bar{س} = \frac{٧٠}{١٠}$

$= ٧$

، ع = $\sqrt{\frac{٥٢٦}{١٠} - (٧)^{٢}}$

$= \sqrt{٥٢,٦ - ٤٩}$

$= \sqrt{٣,٦}$

$= ١,٩$

، معامل الاختلاف = $\frac{ع}{\bar{س}} \times ١٠٠$

$= \frac{١,٩}{٧} \times ١٠٠$

$= ٢٧,١٤ \%$

مثال (٥-٨)

من البيانات الآتية وضح أي المجموعتين أكثر تشتتاً :

المجموعة الأولى :

$\bar{\text{س}} = ١٠$ ، ع $= ٥$

المجموعة الثانية :

$\sum$ س $= ١٠٠$ ، ن $= ٥$ ، ع $= ٧$

الحـــل :

بالنسبة للمجموعة الأولى :

معامل الاختلاف $= \frac{\text{ع}}{\bar{\text{س}}} \times ١٠٠$

$= \frac{٥}{١٠} \times ١٠٠$

$= ٥٠٪$

$\bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}}$

$= \frac{١٠٠}{٥} - ٢٠$

$\therefore$ معامل الاختلاف $= \frac{\text{ع}}{\bar{\text{س}}} \times ١٠٠$

$= \frac{٧}{٢٠} \times ١٠٠$

$= ٣٥٪$

أي أن المجموعة الأولى أكثر تشتتاً .

٥ ـ ٥ أمـثـلـة عـامـة :

مثال (٥-٩)

احسب الانحراف المعياري ومعامل الاختلاف للبيانات التالية :

٢٧ ، ٢٨ ، ٣٢ ، ٤٣ ، ٢٥ ، ٣٥ ، ١٩ ، ٢١ ، ٣٦ ، ٤٤

الحــل :

س	س٢
٢٧	٧٢٩
٢٨	٧٨٤
٣٢	١٠٢٤
٤٣	١٨٤٩
٢٥	٦٢٥
٣٥	١٢٢٥
١٩	٣٦١
٢١	٤٤١
٣٦	١٢٩٦
٤٤	١٩٣٦
٣١٠	١٠٢٧٠

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$$

$$= \frac{٣١٠}{١٠}$$

$$= ٣١$$

$$ع = \sqrt{\frac{\sum س^٢}{ن} - \bar{س}^٢}$$

$$= \sqrt{\frac{١٠٢٧٠}{١٠} - (٣١)^٢}$$

$$= \sqrt{١٠٢٧ - ٩٦١}$$

$$= \sqrt{٦٦}$$

$$= ٨,١٢$$

∴ معامل الاختلاف $= \frac{ع}{\bar{س}} \times ١٠٠$

$$= \frac{٨,١٢}{٣١} \times ١٠٠$$

$$= ٢٦,١٩\%$$

مثال (٥-١٠)

فيما يلي التوزيع التكراري لعدد الساعات التي يعملها ١٢٠ عاملاً في أحد المصانع:

عدد الساعات	٤٠ـ	٤٢ـ	٤٤ـ	٤٦ـ	٤٨ـ	٥٠ـ	٥٢ـ ٥٤	المجموع
عدد العمال (التكرار)	١١	١٤	١٩	٣١	٢١	١٣	١١	١٢٠

والمطلوب حساب الانحراف المعياري لعدد ساعات العمل وكذلك معامل الاختلاف.

الحـــل :

نكون الجدول التـالي :

ساعات العمل	عدد العمال ك	مركز الفئة س	س ك	س٢ ك
٤٠ـ	١١	٤١	٤٥١	١٨٤٩١
٤٢ـ	١٤	٤٣	٦٠٢	٢٥٨٨٦
٤٤ـ	١٩	٤٥	٨٥٥	٣٨٤٧٥
٤٦ـ	٣١	٤٧	١٤٥٧	٦٨٤٧٩
٤٨ـ	٢١	٤٩	١٠٢٩	٥٠٤٢١
٥٠ـ	١٣	٥١	٦٦٣	٣٣٨١٣
٥٢ـ ٥٤	١١	٥٣	٥٨٣	٣٠٨٩٩
المجموع	١٢٠		٥٦٤٠	٢٦٦٤٦٤

$$\bar{س} = \frac{\sum س\,ك}{ن}$$

$$= \frac{٥٦٤٠}{١٢٠}$$

= ٤٧ ساعة

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\text{مج س}^{2}\text{ك}}{\text{ن}} - \bar{\text{س}}^{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{٢٦٦٤٦٤}}{\text{١٢٠}} - (\text{٤٧})^{2}}$$

$$= \sqrt{\text{٢٢٢٠,٥٣} - \text{٢٢٠٩}}$$

$$= \sqrt{\text{١١,٥٣}}$$

= ٣,٤ ساعة

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{ع}}{\bar{\text{س}}} \times \text{١٠٠}$$

$$- \frac{\text{٣,٤}}{\text{٤٧}} \times \text{١٠٠}$$

= ٧,٢٣٪

الخلاصة

١ ـ مقاييس التشتت تحدد مدى تقارب القيم أو تباعدها عن بعضها البعض.

٢ ـ الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي ، أي هو الجذر التربيعي للتباين.

٣ ـ صيغة الانحراف المعياري في حالة البيانات غير المبوبة هي :

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})^{2}}{\text{ن}}}$$

٤ ـ الصيغة المختصرة للانحراف المعياري هي :

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\sum \text{س}^{2}}{\text{ن}} - \bar{\text{س}}^{2}}$$

٥ ـ صيغة الانحراف المعياري في حالة البيانات المبوبة :

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\sum \text{س}^{2}\,\text{ك}}{\text{ن}} - \bar{\text{س}}^{2}}$$

٦ ـ معامل الاختلاف هو مقياس نسبي للتشتت لا يتأثر بوحدات القياس.

٧ ـ صيغة معامل الاختلاف $= \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \times ١٠٠$

$$= \frac{\text{ع}}{\bar{\text{س}}} \times ١٠٠$$

تمارين

[١] ما معنى التشتت؟

[٢] عرِّف الانحراف المعياري.

[٣] كيف يتم حساب الانحراف المعياري للبيانات غير المبوبة؟

[٤] كيف يتم حساب الانحراف المعياري للبيانات المبوبة؟

[٥] ما هو معامل الاختلاف؟ ومتى يستخدم؟

[٦] احسب الانحراف المعياري للقيم التالية :

٤٥، ٥٦، ٧٢، ٦١، ٥٣، ٦٤، ٥٩، ٧٠

[٧] استخدم البيانات التالية لحساب الانحراف المعياري ثم قارن النتيجة التي تحصل عليها مع نتيجة التمرين السابق رقم ٦ :

٥، ١٦، ٣٢، ٢١، ١٣، ٢٤، ١٩، ٣٠

[٨] البيانات التالية تمثل درجات عشرة طلاب في مادة التاريخ :

٩٨، ٥٩، ٨٦، ٧١، ٤٢، ٦٥، ٧٨، ٨٩، ٩٣، ٥٩

احسب الانحراف المعياري للدرجات.

[٩] فيما يلي توزيع ١١٠ طلاب في إحدى المدارس الثانوية حسب درجاتهم في مادة الإحصاء :

الدرجات	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-١٠٠	المجموع
عدد الطلاب	٩	١١	٢٠	٣٠	٢٠	١١	٩	١١٠

والمطلوب :

أ) حساب الوسط الحسابي للدرجات.

ب) حساب الانحراف المعياري للدرجات .

[١٠] البيانات التالية تمثل توزيع طلاب إحدى المدارس الثانوية حسب العمر :

فئات العمر بالسنوات	١٤-	١٦-	١٨-	٢٠-	٢٢-٢٤	المجموع
عدد الطلاب(التكرار)	٢٠	٤٠	٨٠	٤٠	٢٠	٢٠٠

والمطلوب : حساب الانحراف المعياري لأعمار الطلاب.

[١١] عند دراسة أعمار مجموعتين من الطلاب حصلنا على المعلومات الآتية :

المجموعة الأولى :

الوسط الحسابي للعمر = ١٩ سنة

الانحراف المعياري للأعمار = ٢ سنة

المجموعة الثانية :

الوسط الحسابي للعمر = ٣١ سنة

الانحراف المعياري للأعمار = ٣ سنوات

فأي المجموعتين أكثر تشتتاً .

[١٢] احسب معامل الاختلاف للبيانات التالية :

١٥، ٥، ١٠، ٢٠، ١٥، ١٠، ٨، ٢، ٥، ٢٠

[١٣] عند دراسة أوزان وأطوال عدد من الطلاب حصلنا على البيانات التالية :

الأوزان :

الوسط الحسابي للوزن = ٦٥ كيلوجراماً

الانحراف المعياري للوزن = ١٣ كيلوجراماً

الأطوال :

فئات الطول (بالسنتيمتر)	١٥٥ ـ	١٦٠ ـ	١٦٥ ـ	١٧٠ ـ	١٧٥ ـ ١٨٠	المجموع
عدد الطلاب (التكرار)	١٠	٢٠	٤٠	٢٠	١٠	١٠٠

فأيهما أكثر تشتتاً : الوزن أم الطول؟

[١٤] احسب معامل الاختلاف لبيانات التمرين رقم ٦

[١٥] احسب معامل الاختلاف لبيانات التمرين رقم ٨

[١٦] احسب معامل الاختلاف لبيانات التمرين رقم ٩

[١٧] احسب معامل الاختلاف لبيانات التمرين رقم ١٠

شركة المطابع الأهلية للأوفست المحدودة
National Offset Printing Press Ltd. Co.
الرياض - المملكة العربية السعودية