المملكة العربية السعودية
وزارة التربية والتعليم
التطوير التربوي

وزارة التربية والتعليم
MINISTRY OF EDUCATION

قررت وزارة التربية والتعليم تدريس
هـذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الرِّياضيَّات

للصف الثالث الثانوي

الفصل الدراسي الأول

قسم العلوم الإدارية والاجتماعية

(بنين)

تأليف
مجموعة من الخبراء

طبعة ١٤٢٨هـ - ١٤٢٩هـ
٢٠٠٧م - ٢٠٠٨م

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
السعودية، وزارة التربية والتعليم
الرياضيات : للصف الثالث الثانوي : قسم العلوم الإدارية والاجتماعية
- الفصل الدراسي الأول - ط ٥ - الرياض.
١٤٤ ص ؛ ٢١x٢٣ سم
ردمك : ٣ - ٢٢٥ - ١٩ - ٩٩٦٠ (مجموعة)
١ - ٢٢٦ - ١٩ - ٩٩٦٠ (ج١)
١ ـ الرياضيات ـ كتب دراسية
٢ ـ السعودية - التعليم الثانوي ـ كتب دراسية. أ ـ العنوان

رقم الإيداع : ٢١٨٥ / ١٩
ردمك : ٣ - ٢٢٥ - ١٩ - ٩٩٦٠ (مجموعة)
١ - ٢٢٦ - ١٩ - ٩٩٦٠ (جـ١)

لهذا الكتاب قيمة مهمّة وفائدة كبيرة فلنحافظ عليه
ولنجعل نظافته تشهد على حسن سلوكنا معه...

إذا لم نحتفظ بهذا الكتاب في مكتبتنا الخاصة في آخر
العام للاستفادة فلنجعل مكتبة مدرستنا تحتفظ به...

موقع الوزارة
www.moe.gov.sa

موقع الإدارة العامة للمناهج
www.moe.gov.sa/curriculum/index.htm

البريد الإلكتروني للإدارة العامة للمناهج
curriculum@moe.gov.sa

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمـــــة

الحمد للّه رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد وآله وصحبه.

أما بعد، فهذا هو الجزء الأول من كتاب الرياضيات للصف الثالث الثانوي، تم تأليفه لقسم العلوم الإدارية والاجتماعية.

يتألف هذا الكتاب من ثلاثة أبواب :

الباب الأول: النهايات.

الباب الثاني : اتصال الدوال.

الباب الثالث : معدل التغير والدالة المشتقة.

ولقد راعينا في تأليف هذا المقرر طبيعة القسم الذي أعد من أجله، وأملنا أن يكون هذا الكتاب عوناً للطالب على تفهم المادة وللمدرس على أداء واجبه التربوي والتعليمي سائلين المولى عز وجل أن يوفق الجميع إلى ما يحب ويرضى.

وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين...

المؤلفون

الفهـــــرس

الصفحة

الباب الأول

النهـــايـــات

١ ـ ١ الأعداد والفقرات الحقيقية.

١ ـ ٢ الدوال الحقيقية.

١ ـ ٣ النهايات.

١ ـ ٤ الدوال التي تسعى إلى ما لا نهاية.

١ ـ ٥ خـــواص النهـــايات.

١ ـ ٦ النهاية عندما يسعى المتغير إلى ما لا نهاية.

١ ـ ٧ طرائق حساب النهايات.

الباب الأول

النـــهـــايـــات

تـــمـــهـــيـــد

يحتل مفهوم النهاية مكاناً مميزاً في الرياضيات وخاصة في حساب التفاضل والتكامل إذ عليه يعتمد تعريف الاشتقاق. وقبل أن نتعرض لنهايات الدوال يجدر بنا أن نستعيد بعض ما درسناه عن الأعداد الحقيقية والدوال الحقيقية ونستعرض أمثلة لبعض الدوال الحقيقية.

١ ـ ١ الأعداد والفترات الحقيقية

سبق أن درست أن هنالك تقابلاً بين مجموعة الأعداد الحقيقية وخط الأعداد الحقيقية. كما سبق أن درست العلاقتين ≥ ، > المعرفتين عليهما. وقد أفدنا من هاتين العلاقتين في تقديم الفترات الحقيقية، ولا بأس من إيجاز وصفها فيمايلي:

(١) الفترة المغلقة [ﺃ ، ب] = { س : ﺃ ≥ س ≥ ب }

(٢) الفترة المفتوحة]ﺃ ، ب[= { س : ﺃ > س > ب }

(٣) الفترة نصف المغلقة (أو نصف المفتوحة)

[ﺃ ، ب[= { س : ﺃ ≥ س > ب } أو

]ﺃ ، ب] = { س : ﺃ > س ≥ ب }

والفترات السابقة هذه فترات محدودة، طول كلٍ منها = ب − ﺃ، سواءً كانت مغلقة أم مفتوحة. أما الفترات التالية فهي غير محدودة وتتكون كل منها من نصف مستقيم (خط الأعداد)

(٤) [ﺃ ، ∞ [= { س : س ≤ ﺃ }

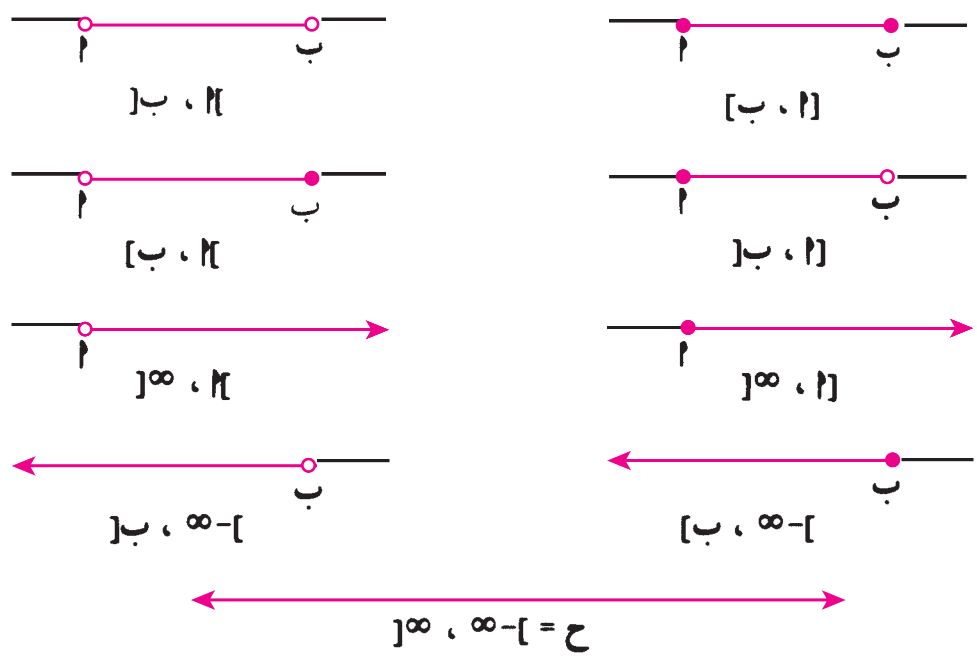
(٥)] ﺃ ، ∞ [= { س : س < ﺃ }

(٦)]−∞ ، ب] = { س : س ≥ ب }

(٧)]−∞ ، ب[= { س : س > ب }

ويمكن كتابة خط الأعداد الحقيقية على شكل فترة: ح =]−∞ ، ∞[.

وهذه الفترات تُمَثَّلُ على خط الاعداد الحقيقية كما في الشكل (١ ـ ١) حيث الدائرة المفرغة تعني أن النقطة التي في طرف الفترة لا تنتمي إليها:



شكل (١ ـ ١)

القيمة المطلقة للعدد الحقيقي:

القيمة المطلقة للعدد الحقيقي س يرمز لها بالرمز | س | وتعرف على النحو التالي:

$$| س | = \begin{cases} س & \text{إذا كان } س \geqslant ٠ \\ -س & \text{إذا كان } س < ٠ \end{cases}$$

فمثلاً:

$$| ٧ | = | -٧ | = ٧$$

$$| \sqrt{٢} | = | -\sqrt{٢} | = \sqrt{٢} .$$

والقيمة المطلقة لها معنى هندسي. فإذا كان س ، ص ∈ ح فإن المسافة بين النقطتين اللتين تمثلان العددين س و ص على خط الاعداد الحقيقية هي العدد ب حيث:

ب = { س − ص إذا كان س ≥ ص
      { ص − س إذا كان س < ص

أي أن :

ب = | س − ص |

ولذا يمكننا دوماً أن ننظر إلى المقدار | س − ص | على أنه الفرق بين العددين س و ص أو المسافة بين النقطتين اللتين تمثلانهما. وكحالة خاصة فإن | س | = | س − ٠ | = المسافة بين النقطة س والمركز م .

وسنجمل فيما يلي خواص | س | والتي سبقت دراستها في كتاب الجزء الأول للصف الأول الثانوي (الباب الرابع) : لكل

س ∈ ح ، ص ∈ ح :

(١) | س | = ٠ ⇔ س = ٠

(٢) | س | = | − س |

(٣) | س | = أكبر (س ، − س) ولذا فإن − | س | ≤ س ≤ | س |

(٤) √س٢ = | س |

(٥) إذا كان ل > ٠ فإن | س | ≤ ل ⇔ − ل ≤ س ≤ ل

(٦) إذا كان ل > ٠ فإن | س | ≥ ل ⇔ س ≥ ل أو س ≤ − ل

(٧) | س ص | = | س | | ص |

(٨) | س + ص | ≤ | س | + | ص |

مثال (١−١)

حل المعادلة | س − ٥ | = ٧

الحـــل :

إما س − ٥ ≥ ٠ وفي هذه الحالة :

| س − ٥ | = س − ٥ = ٧ ⇐ س = ١٢

أو س − ٥ < ٠ وفي هذه الحالة :

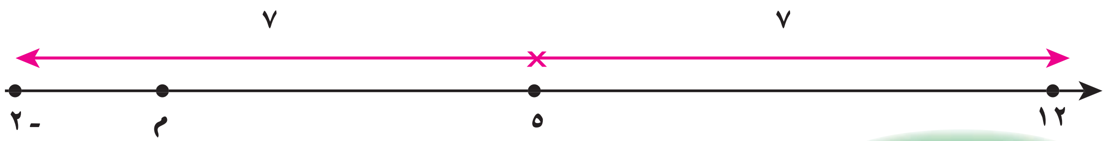
|س − ٥| = − س + ٥ = ٧ ⇐ س = − ٢ .

أي أن س = ١٢ أو س = − ٢ .

طريقة أخرى:

|س − ٥| = ٧ ⇔ الفرق بين العددين س و ٥ = ٧ .

والاعداد التي يكون الفرق بينها وبين العدد ٥ مساوياً لـ ٧ هي س = ١٢ و س = − ٢



مثال (١−٢)

عبر عما يلي باستخدام الفترات الحقيقية:

|س − ٣| < ٤

الحـــل:

من خصائص القيمة المطلقة فإن:

|س − ٣| < ٤ ⇔

− ٤ < س − ٣ < ٤ ⇔

− ١ < س < ٧ ⇔

س ∈]− ١ ، ٧[.

تماريــن (١ − ١)

(١) على خط الأعداد الحقيقية مثّل جميع قيم س التي تحقق الشروط المعطاه :

(أ) |س − ٣| = ٢ (ب) س ≥ ٤

(حـ) س > − ١ (د) س^{٢} = ٩

(هـ) س^{٢} ≤ ٩ (و) س^{٢} ≥ ٩

(٢) عبر عما يلي باستخدام تعريف القيمة المطلقة :

(أ) |س + ٣| (ب) |٢س − ٥| (حـ) |٣ س + ٧|

(٣) حل المعادلات التالية ثم مثّل الحل على خط الأعداد الحقيقية :

(أ) | س + ١ | = ٤ (ب) | ٢ س - ٤ | = ٥

(حـ) | ٧ - ٢ س | = ١١ (د) ٣| ٥ س + ١ | = ٠

(٤) عبر عما يلي باستخدام الفترات الحقيقية :

(أ) | س | $\geqslant$ ٤ (ب) | س | $\leqslant$ ١

(حـ) | س + ١ | $<$ ٥ (د) | س - ٤ | $\leqslant$ ٢

١ ـ ٢ الدوال الحقيقية

سنقتصر في دراستنا على تلك الدوال التي يكون كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية وسنسميها تجاوزاً الدوال الحقيقية . أي أن :

د : سَ ← صَ دالة حقيقية إذا كان :

سَ $\subseteq$ ح و صَ $\subseteq$ ح

ولكل س $\in$ سَ يوجد عنصر وحيد ص $\in$ صَ بحيث ص = د (س) .

والمعادلة ص = د (س) تسمى قاعدة الدالة د وفيها يسمى المتغير س المتغير المستقل وص المتغير التابع . وفي كثير من الأحيان لا يُنَصُّ على مجال الدالة صراحة وإنما يفهم ضمناً من القاعدة التي بموجبها عرِّفت الدالة . فإذا كانت د دالة حقيقيه معرَّفة بالقاعدة ص = د (س) فإن :

مجال د = { س $\in$ ح : د (س) معرفة }

و مدى د = { د (س) $\in$ ح : س $\in$ مجال د }

وسنورد فيما يلي طائفة من الدوال الحقيقية :

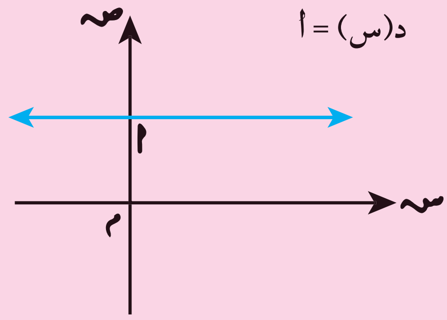
الدالـــة الثابتـة :

إذا كان أ عدداً حقيقياً ثابتاً فإن القاعدة د (س) = أ تعرف دالة ثابتة .

مجال الدالة هو ح ومداها = { أ } .

وبيــان الدالــة خط مستقيم يوازي محــور السينات

ويقـطع محـور الصـادات عنـد ص = ا كـما في الشكـل (١ ـ ٢).



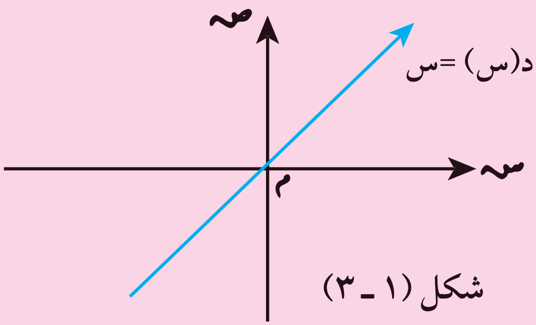
شكل (١ ـ ٢)

دالــــة التطابــق :

قاعدتها د (س) = س لكل س ∈ ح

مجال د = مدى د = ح .

وبيانها المستقيم ص = س . (انظر الشكل (١ ـ ٣))



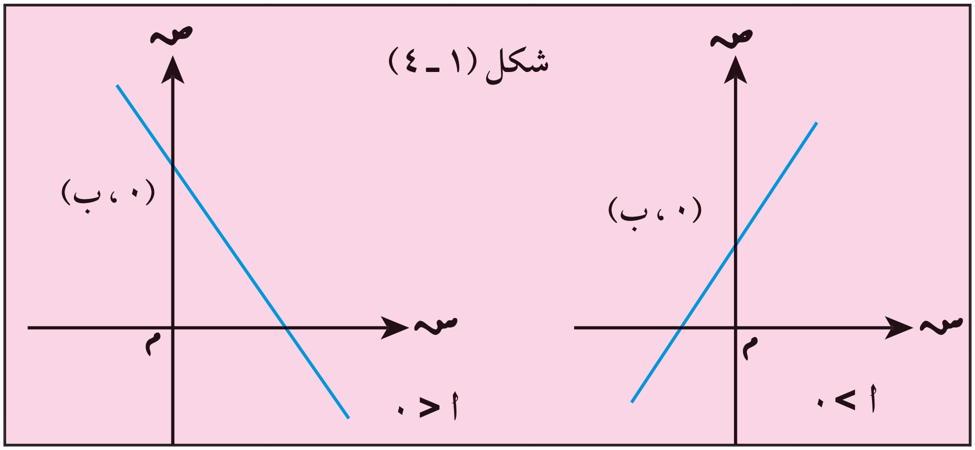
شكل (١ ـ ٣)

دالــة الدرجــة الأولــى :

قاعدتها د (س) = ا س + ب   حيث ا، ب ∈ ح، ا ≠ ٠

مجال د = ح، مدى د = ح

وبيان د هو مستقيم ميله ٲ ويقطع محور الصادات عند النقطة (٠ ، ب) (انظر الشكل (١ ـ ٤))



شكل (١ ـ ٤)

دالـــة الدرجـــة الثانيـــة :

قاعدتها د (س) = ٲ س^{٢} + ب س + حـ

حيث ٲ، ب، حـ ∈ ح و ٲ ≠ ٠

مجال د = ح أما مداها فيعتمد على ٲ، ب، حـ. وبيان دالة الدرجة الثانية يسمى **قطعاً مكافئاً**. ومن أمثلة دالة الدرجة الثانية الدوال التالية :

د (س) = ٣ س^{٢} − ٥ س + ١ ، د (س) = ٥ س^{٢} − ٩، د (س) = س^{٢} + س + ٣

د (س) = س^{٢} + س + ٦

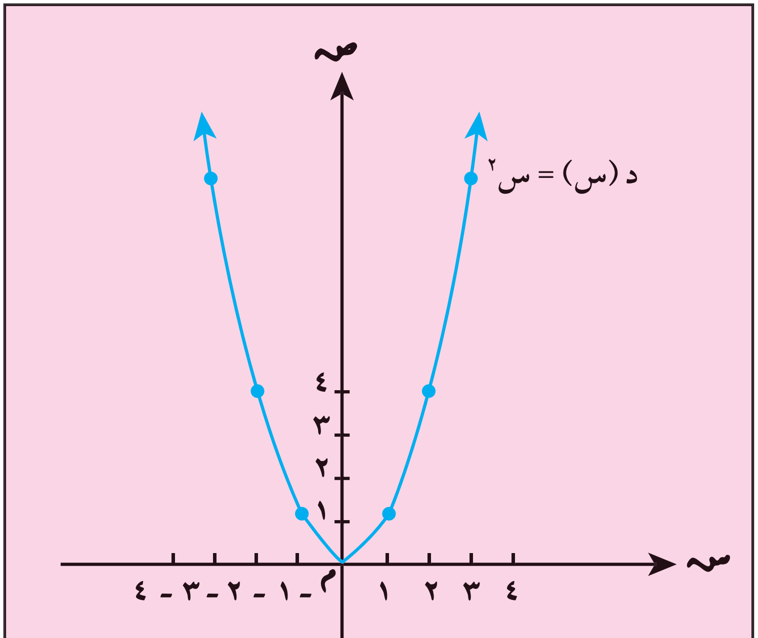
مثال (١−٣)

الدالـــة د (س) = س^{٢}

مجال د = ح و مدى د = { س^{٢} : س ∈ ح } = [٠، ∞ [. ويمكن رسم بيان الدالة د بوساطة جدول لقيم الدالة كما يلي :

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣
د (س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

ثم رسمه كما في الشكل (١ ـ ٥).



شكل (١ ـ ٥)

مثال (١-٤)

الدالة د (س) = س ^{٢} − ٤ س + ٣

مجال د = ح ولمعرفة مداها نكتب :

د (س) = س ^{٢} − ٤ س + ٤ − ١ (الإكمال إلى المربع)

= (س − ٢)^{٢} − ١

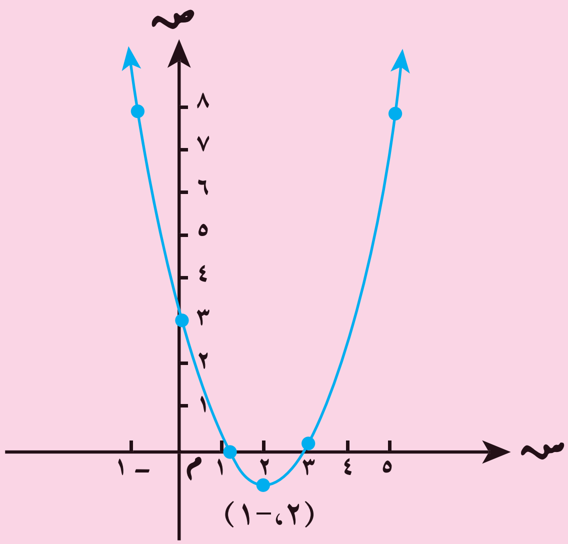
واضح أن أصغر قيمة تبلغها د هي د (٢) = − ١ حيث تصبح قيمة المقدار المربع (س − ٢)^{٢} صفراً

وعليه فإن :

مدى د = [− ١، ∞ [

ويمكن رسم بيان الدالة د بوساطة جدول لقيم الدالة كما يلي :ـ

س	١ـ	٠	١	٢	٣	٤	٥
د (س)	٨	٣	٠	١ـ	٠	٣	٨



شكل (١ ـ ٦)

الدالة د (س) = − س ٢ + س + ٢

مجال د = ح ولمعرفة مداها نكتب :

د (س) = − (س ٢ − س + $\frac{١}{٤}$) + $\frac{١}{٤}$ ٢ (الإكمال إلى المربع)

= − (س − $\frac{١}{٢}$)٢ + $\frac{٩}{٤}$

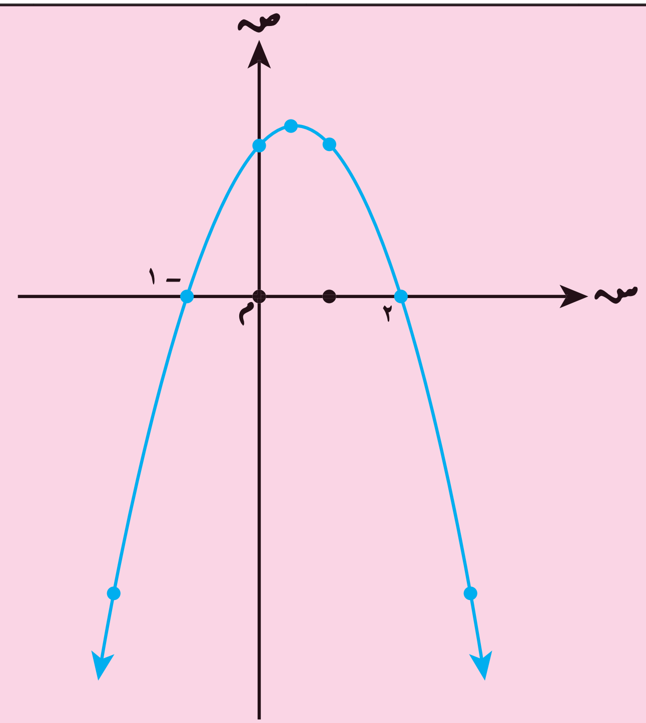
تبلغ د أكبر قيمة هي د $(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$ حيث تصبح قيمة المقدار

$-(س - \frac{1}{2})^2$ تساوي صفراً وعليه فإن مدى د = $] - \infty ، \frac{9}{4}]$

والجدول التالي يساعدنا على رسم بيان الدالة د :

س	-2	-1	٠	$\frac{1}{2}$	١	٢	٣
د (س)	-4	٠	٢	$\frac{9}{4}$	٢	٠	-4

انظر الشكل (١ ـ ٧)



شكل (١ ـ ٧)

ملاحظة :

في المثالين (١ ـ ٣)، (١ ـ ٤) القطع المكافئ يتقعر نحو الصادات الموجبة بينما في المثال (١ ـ ٥)

القطع المكافئ يتقعر نحو الصادرات السالبة .

وبشكل عام فإن بيان الدالة ص = أ س^{٢} + ب س + حـ **قطع مكافئ**

يتجه تقعره نحو الصادات الموجبة (الأعلى) إذا كانت **أ > ٠**

يتجه تقعره نحو الصادات السالبة (الأسفل) إذا كانت **أ < ٠**

انظر الشكلين (١ ـ ٦)، (١ ـ ٧).

دالة كثيرة الحدود :

كل الدوال سالفة الذكر هي حالات خاصة من دوال كثيرات الحدود ولقد سبق لك التعرف عليها **وهي على الصيغة :**

د (س) = أ$_{ن}$ س^{ن} + أ$_{ن-١}$ س$^{ن-١}$ + . . . + أ$_{١}$ س + أ$_{٠}$

حيث ن عدد صحيح غير سالب يسمى درجة كثيرة الحدود **و أ$_{٠}$ ، أ$_{١}$ ، . . . . ، أ$_{ن}$ ثوابت حقيقية تسمى معاملات كثيرة الحدود و أ$_{ن}$ ≠ ٠ ومجال دالة كثيرة الحدود هو ح بينما مداها يعتمد على درجتها ومعاملاتها ويصعب تعيينه بصورة عامة.**

مثال (١-٦)

عيّن ما إذا كانت كل من الدوال التالية كثيرة حدود وبيّن درجتها .

(١) د$_{١}$ (س) = ٤ س + ٢

(٢) د$_{٢}$ (س) = ١ + ٣ س − ٢ س^{٢}

(٣) د$_{٣}$ (س) = ٥ س^{٧} − ٣ س^{٩}

(٤) د$_{٤}$ (س) = ٥ س − $\frac{١}{س}$

(٥) د$_{٥}$ (س) = ٧ س + $\sqrt{س}$

الحـــل :

(١) د$_{١}$ (س) كثيرة حدود من الدرجة الأولى

(٢) د$_{٢}$ (س) كثيرة حدود من الدرجة الثانية

(٣) $د_٣$ (س) كثيرة حدود من الدرجة التاسعة

(٤) $د_٤$ ليست كثيرة حدود لأن $\frac{١}{س}$ = $س^{-١}$ وهو قوة سالبة للمتغير س

(٥) $د_٥$ (س) ليست كثيرة حدود لوجود $\sqrt{س}$ = $س^{\frac{١}{٢}}$ وهو قوة غير صحيحة للمتغير س .

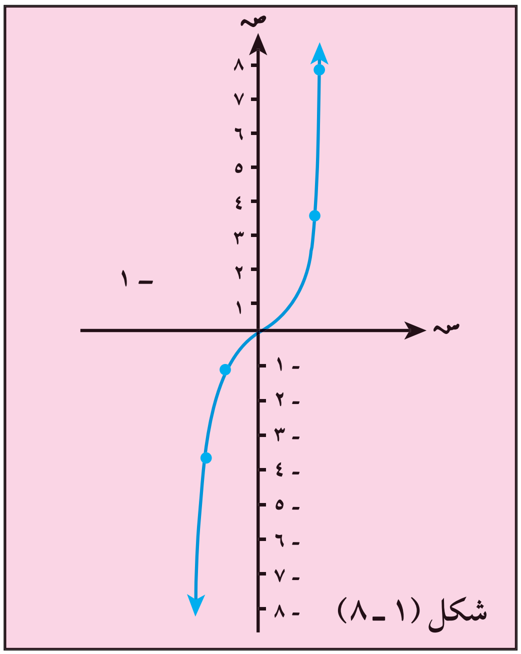
مثال (١-٧)

الدالة د (س) = $س^٣$

مجـال د = ح ومدى د = { $س^٣$: س ∈ ح } = ح إذ أن كـل عدد حقيقي يمكن كتـابته كمكعب عـدد حقيقي آخر . ويمكن رسم بيان الدالة بالاستعانة بجدول لقيمها كما يلي :

س	- ٢	$\frac{-٣}{٢}$	- ١	٠	١	$\frac{٣}{٢}$	٢
د (س)	- ٨	$\frac{-٢٧}{٨}$	- ١	٠	١	$\frac{٢٧}{٨}$	٨

ثم رسمه كما في الشكل (١ ـ ٨)



شكل (١ ـ ٨)

الدالة النسبية (أو القياسية) :

قاعدتها ر (س) = $\frac{\text{د}_1\text{ (س)}}{\text{د}_2\text{ (س)}}$ حيث كل من د_1 (س) و د_2 (س) كثيرة حدود وهما ليستا بالضرورة من الدرجة نفسها . **ومجال الدالة النسبية هو كل الأعداد الحقيقية عدا تلك التي تجعل المقام صفراً .**

مجال ر (س) = { س ∋ ح : د_2 (س) $\neq$ ٠ }

مثال (١-٨)

عين مجال الدالة :

$$\text{د (س)} = \frac{\text{٤ س}^{٢} + \text{٣ س} - \text{١}}{\text{س}^{٢} + \text{س} - \text{٢}}$$

الحل :

مجال د = { س ∋ ح : س^{٢} + س − ٢ $\neq$ ٠ }

= { س ∋ ح : (س + ٢) (س − ١) $\neq$ ٠ }

= { س ∋ ح : س $\neq$ −٢ ، س $\neq$ ١ }

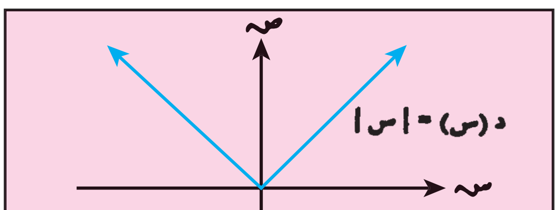
= ح − { −٢ ، ١ }

دالة القيمة المطلقة :

$$\text{قاعدتها د (س)} = |\text{س}| = \begin{cases} \text{س إذا كان س} \geqslant \text{٠} \\ -\text{س إذا كان س} < \text{٠} \end{cases}$$

مجال د = ح ومداها = [٠ ، ∞ [

وبيانها كما في الشكل (١ ـ ٩)



الشكل (١ ـ ٩)

مثال (١-٩)

اعد تعريف كل من الدالتين التاليتين ثم ارسم بيانها :

(أ) $\text{د}_1(\text{س}) = |\,٢\ \text{س} + ١\,|$

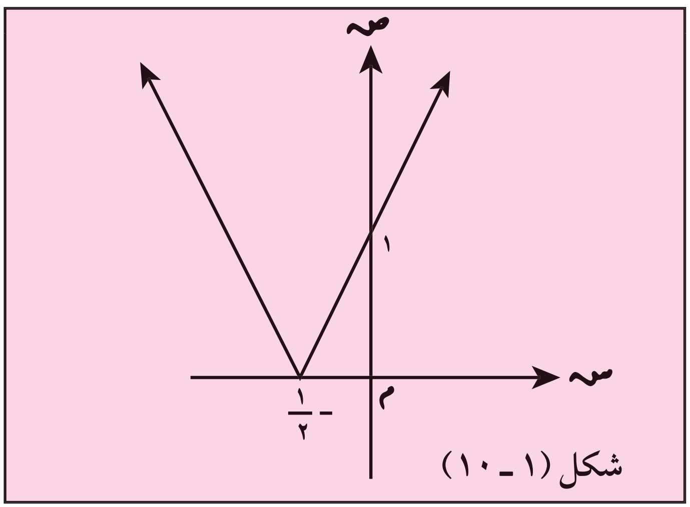
(ب) $\text{د}_2(\text{س}) = |\,\text{س} - ٣\,| - ٢$

الحـــل :

(أ) $\text{د}_1(\text{س}) = |\,٢\ \text{س} + ١\,| = \begin{cases} ٢\ \text{س} + ١ & \text{إذا كان } ٢\ \text{س} + ١ \geqslant ٠ \\ -\ ٢\ \text{س} - ١ & \text{إذا كان } ٢\ \text{س} + ١ < ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} ٢\ \text{س} + ١ & \text{إذا كان س} \geqslant -\frac{١}{٢} \\ -\ ٢\ \text{س} - ١ & \text{إذا كان س} < -\frac{١}{٢} \end{cases}$

انظر الشكل (١ ـ ١٠)

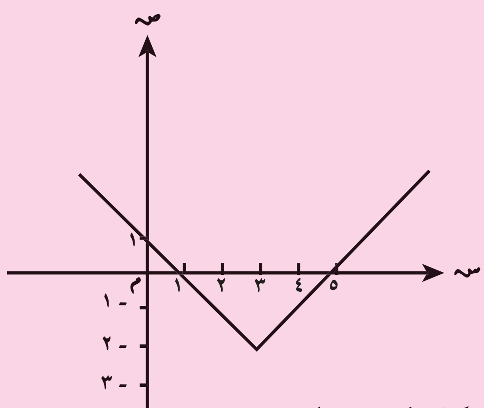


شكل (١ ـ ١٠)

(ب) $\text{د}_2(\text{س}) = |\text{س} - ٣| - ٢ = \begin{cases} \text{س} - ٣ - ٢ & \text{إذا كان س} - ٣ \geqslant ٠ \\ -\text{س} + ٣ - ٢ & \text{إذا كان س} - ٣ < ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} \text{س} - ٥ & \text{إذا كان س} \geqslant ٣ \\ -\text{س} + ١ & \text{إذا كان س} < ٣ \end{cases}$

انظر الشكل (١ ـ ١١)



شكل (١ ـ ١١)

الـدوال الزوجيـة والفرديـة :

إذا كانت د (س) دالة تحقق :

- س ∋ مجال د كلما كانت س ∋ مجال د

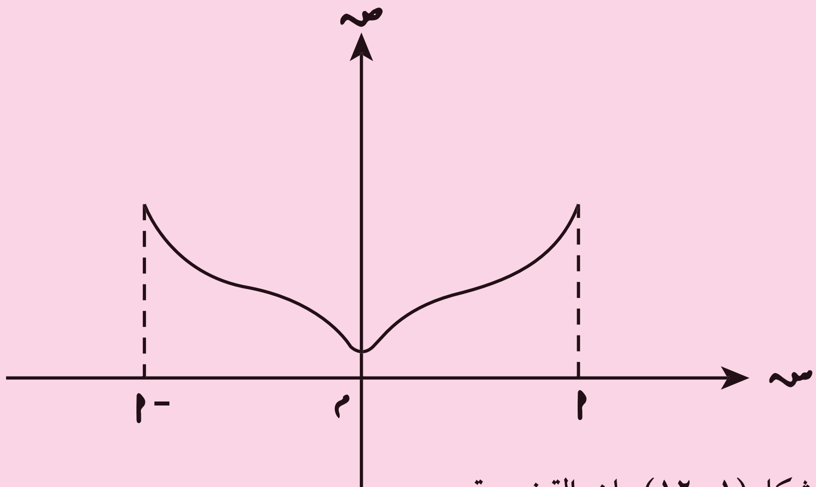
فإنها تسمى :

(١) زوجية إذا كان د (− س) = د (س) لكل س ∋ مجال د

و (٢) فردية إذا كان د (− س) = − د (س) لكل س ∋ مجال د

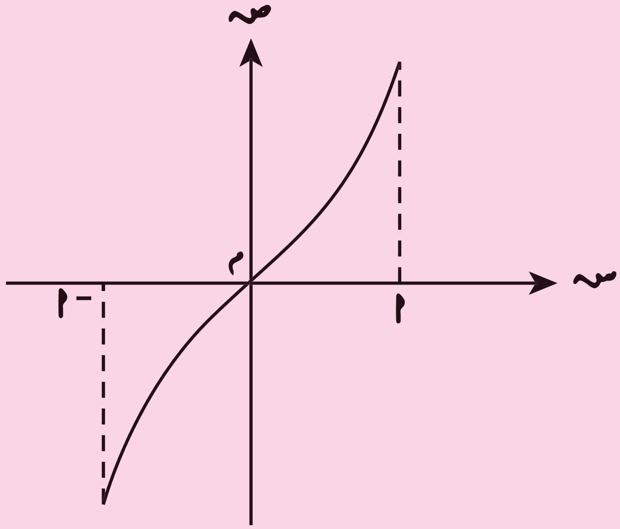
ملاحظات :

(١) بيان الدالة الزوجية يكون متناظراً حول محور الصادات أي أنه إذا كانت (س$_1$ ، ص$_1$) تقع على بيان الدالة فإن (− س$_1$ ، ص$_1$) تقع على بيان الدالة كذلك كما في الشكل (١ – ١٢).



شكل (١ ـ ١٢) بيان دالة زوجية

(٢) بيان الدالة الفردية يكون متناظراً حول نقطة الأصل، أي أنه إذا كانت (س$_1$ ، ص$_1$) تقع على بيان الدالة فإن (− س$_1$ ، − ص$_1$) تقع على بيان الدالة كذلك كما في الشكل (١ – ١٣)



شكل (١ ـ ١٣) بيان دالة فردية

مثال (١-١١)

أي من الدوال التالية فردية وأيها زوجية :

(أ) د (س) = ٣ س^{٢} + ١

(ب) د (س) = س^{٣} + س

(حـ) د (س) = س^{٢} - ٣ س + ٥

الحـــل :

(أ) د (- س) = ٣ (- س)^{٢} + ١ = ٣ س^{٢} + ١ = د (س)

⇐ د زوجيـــة

(ب) د (- س) = (- س)^{٣} + (- س) = - س^{٣} - س = - (س^{٣} + س) = - د (س)

⇐ د فرديـــة

(حـ) د (- س) = (- س)^{٢} - ٣ (- س) + ٥ = س^{٢} + ٣ س + ٥ ≠ س^{٢} - ٣ س + ٥ = د (س)

وكـذلك د (- س) ≠ - د (س)

⇐ د ليست زوجية ولا فردية .

ملاحظة :

كثير من الدوال ليست فردية ولا زوجية

الدوال المحدودة :

نقول إن الدالة د محدودة من أعلى إذا وجد عدد حقيقي ل بحيث :

د (س) $\geqslant$ ل لكل س $\in$ مجال د

ويسمى العدد ل حداً علوياً للدالة د .

كما نقول إن الدالة د محدودة من أسفل إذا وجد عدد حقيقي م بحيث :

د (س) $\leqslant$ م لكل س $\in$ مجال د

ويسمى العدد م حداً سفلياً للدالة د .

ملاحظات :

(١) لايشترط أن يكون الحد العلوي أو السفلي منتمياً إلى مدى الدالة

(٢) إذا كان ل حداً علوياً فإن أي عدد أكبر منه يكون حداً علوياً كذلك . وإذا كان م حداً سفلياً فإن أي عدد أصغر منه يكون حداً سفلياً كذلك .

مثال (١-١٢)

عيِّن ما إذا كانت كل من الدالتين التاليتين محدودة من أعلى ومن أسفل في الفترة [٠ ، ١]

(أ) $د_١$ (س) = ٢ س + ٣

(ب) $د_٢$ (س) = $\begin{cases} \frac{١}{س} & ، س \neq ٠ \\ ١ & ، س = ٠ \end{cases}$

الحل :

(أ) لكل س $\in$ مجال $د_١$ فإن :

٠ $\leqslant$ س $\leqslant$ ١

$\Leftarrow$ ٠ $\leqslant$ ٢ س $\leqslant$ ٢

$\Leftarrow$ ٣ $\leqslant$ ٢ س + ٣ $\leqslant$ ٥

$\Leftarrow$ د$_1$ محدودة من أسفل بالعدد ٣ (أو أي عدد $\geqslant$ ٣)

و د$_1$ محدودة من أعلى بالعدد ٥ (أو أي عدد $\leqslant$ ٥)

(ب) إذا كان ٠ $<$ س $\geqslant$ ١

فإن $\frac{١}{س} \leqslant$ ١

$\Leftarrow$ د$_2$ (س) $\leqslant$ ١ لكل س $\in$ مجال د$_2$

$\Leftarrow$ د$_2$ محدودة من أسفل بالعدد ١ .

ولكن د$_2$ ليست محدودة من أعلى، لأننا لو فرضنا أن ل $>$ ١ حداً علوياً فإنه :

د$_2$ (س) = $\frac{١}{س}$ $<$ ل لكل ٠ $<$ س $\geqslant$ ١ .

وإذا اخترنا العدد س بحيث :

٠ $<$ س $<$ $\frac{١}{ل}$ فإن س $\in$ مجال د$_2$

و د$_2$ (س) = $\frac{١}{س}$ $>$ ل، مما يناقض كون ل حداً علوياً .

ملاحظــة :

إذا كانت الدالة د محدودة من أعلى ومن أسفل فإننا نقول إن الدالـة د محدودة . وهـذا يكافئ وجـود عدد حقيقي ل بحيث :

| د (س) | $\geqslant$ ل لكل س $\in$ مجال د .

مثال (١-١٣)

(أ) الدالة د (س) = س^٢ - ٤ س + ٣ المرسوم بيـانها بالمثـال (١ ـ ٤) محدودة من أسفـل بالعـدد - ١ (أو أي عدد $\geqslant$ - ١) .

(ب) الدالة د (س) = - س^٢ + س + ٢ المرسوم بيانها بالمثال (١ ـ ٥) محدودة من أعلى بالعدد $\frac{٩}{٤}$ (أو أي عدد $\leqslant$ $\frac{٩}{٤}$)

عين مجال كل من الدالتين: د$_1$ (س) = $\sqrt{س - ١}$

د$_2$ (س) = $\sqrt{٥ - ٢ س}$

الحــل :

المقدار تحت الجذر التربيعي يجب أن لا يكون سالباً وبالتالي فإن :

شرط تعريف الدالة $د_1$ هو: س − ١ ⩾ ٠ ⟺ س ⩾ ١

فيكون مجال الدالة $د_1$ هو [١ ، ∞ [

وشرط تعريف الدالة $د_2$ هو: ٥ − ٢ س ⩾ ٠ ⟺ س ⩽ $\frac{٥}{٢}$

فيكون مجال الدالة $د_2$ هو:] − ∞ ، $\frac{٥}{٢}$]

مثال (١−١٥)

عيِّن مجال الدالة د (س) = $\sqrt{- س^2 + ٧ س - ٦}$

الحــل :

شرط تعريف الدالة د هو: $- س^2 + ٧ س - ٦ \geqslant ٠$

ومن الواضح أن :

$$- س^2 + ٧ س - ٦ = - (س^2 - ٧ س + ٦)$$

$$= - (س - ١)(س - ٦)$$

$$= (- س + ١)(س - ٦)$$

إن صفري الدالة هما: س = ١ ، س = ٦

والجدول الآتي يوضح لنا اشارة المقدار:

س	−∞		١		٦		+∞
− س + ١		+	٠	−		−	
س − ٦		−		−	٠	+	
(− س + ١)(س − ٦)		−	٠	+	٠	−	

$- س^2 + ٧ س - ٦ \geqslant ٠ \Leftrightarrow س \in [١ ، ٦]$

فتكون الفترة [١ ، ٦] هي مجال الدالة د (س)

إشارة المقدار ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية :

عند دراستنا لإشارة المقدار $-$ س^{٢} + ٧ س $-$ ٦ في المثال (١ ـ ١٥) قمنا بتحليله إلى عاملين من الدرجة الأولى ودراسة إشارة كل عامل ثم استنتجنا إشارة المقدار الذي هو حاصل الضرب.

غير أنه ليس من الضروري أن يكون المقدار ثلاثي الحدود قابلاً للتحليل إلى عاملين، فقد سبق أن درسنا أن ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية :

$$د(س) = ا س^{٢} + ب س + جـ \qquad ا \neq ٠$$

$$= ا \left(س^{٢} + \frac{ب}{ا} س + \frac{جـ}{ا} \right) \text{بالإكمال إلى المربع :}$$

$$= ا \left[(س^{٢} + \frac{ب}{ا} س + \frac{ب^{٢}}{٤ ا^{٢}}) - \frac{ب^{٢}}{٤ ا^{٢}} + \frac{جـ}{ا} \right]$$

$$= ا \left[(س + \frac{ب}{٢ ا})^{٢} - \frac{ب^{٢} - ٤ ا جـ}{٤ ا^{٢}} \right] \qquad (١)$$

ونلاحظ مايلي :

١ ـ إذا كان المقدار : $ب^{٢} - ٤ ا جـ > ٠$

فإن المعادلة : $ا س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ جذرين هما :

$$س_{١} = \frac{- ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤ ا جـ}}{٢ ا} \quad ، \quad س_{٢} = \frac{- ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤ ا جـ}}{٢ ا}$$

ندعوهما صفري الدالة $د(س) = ا س^{٢} + ب س + جـ$

ويمكن في هذه الحالة كتابة الدالة على شكل :

$$د(س) = ا (س - س_{١}) (س - س_{٢})$$

والجدول الآتي يوضح إشارة د (س) في هذه الحالة : (حيث افترضنا أن $س_{١} < س_{٢}$)

س	$-\infty$		$س_{١}$		$س_{٢}$		$+\infty$
إشارة $س - س_{١}$		$-$	٠	$+$		$+$	
إشارة $س - س_{٢}$		$-$		$-$	٠	$+$	
إشارة الجداء		$+$	٠	$-$	٠	$+$	
إشارة د (س)		مماثلة لإشارة ا	٠	مخالفة لإشارة ا	٠	مماثلة لإشارة ا	

أي أن إشارة د (س) هي دوماً مماثلة لإشارة ٲ ، إلاّ إذا وقعت قيمة س بين صفري د (س)، فإنها تكون مخالفة لإشارة ٲ.

٢ ـ إن كان المقدار : $ب^٢ - ٤ ٲ حـ = ٠$

فإن للمعادلة : $ٲ س^٢ + ب س + حـ = ٠$ جذرين متساويين : $س = \frac{-ب}{٢ ٲ}$ ،

ذلك أنه من (١) نجد أن الدالة د (س) تكتب بالشكل :

$$د (س) = ٲ (س + \frac{ب}{٢ ٲ})^٢$$

ونلاحظ أن المقدار $(س + \frac{ب}{٢ ٲ})^٢$ موجب ما لم تكن : $س = - \frac{ب}{٢ ٲ}$ حيث ينعدم .

وعليه فإن إشارة د (س)مماثلة لإشارة ٲ لكل $س \in ح - \{ \frac{-ب}{٢ ٲ} \}$

٣ ـ إذا كان المقدار : $ب^٢ - ٤ ٲ حـ < ٠$ فإنه ليس للمعادلة $ٲ س^٢ + ب س + حـ = ٠$ جذران في ح (مستحيلة الحل في ح) ومن (١) نجد أن د (س) تكتب بالشكل :

$$د (س) = ٲ \left((س + \frac{ب}{٢ ٲ})^٢ + \frac{٤ ٲ حـ - ب^٢}{٤ ٲ^٢} \right)$$

= ٲ × مجموع مقدارين موجبين

فإشارة د (س) في هذه الحالة تكون دوماً مماثلة لإشارة ٲ

من ملاحظة الحالات الثلاث آنفة الذكر نستطيع كتابة النظرية التالية :

نظرية (١ ـ ١):

إن إشارة ثلاثي الحدود $ٲ س^٢ + ب س + حـ$ ($\forall$ س $\in$ ح) تكون دوماً مماثلة لإشارة ٲ (معامل $س^٢$) إلاّ من أجل قيم س الواقعة بين الجذرين إن وجدا فتكون عندئذٍ مخالفة لإشارة ٲ.

مثال (١-١٦)

حدِّد الفترات التي تكون فيها كل من الدوال الآتية موجبة وتلك التي تكون فيها سالبة :

(ٲ) $د (س) = ٣ س^٢ - ٤ س - ٤$

(ب) د (س) = − س^{٢} + ٨ س − ١٦

(حـ) د (س) = س^{٢} − ٢ س + ١٠

الحـــل :

(أ) د (س) = ٣ س^{٢} − ٤ س − ٤

ب^{٢} − ٤ أ حـ = (− ٤)^{٢} − ٤ (٣) (− ٤)

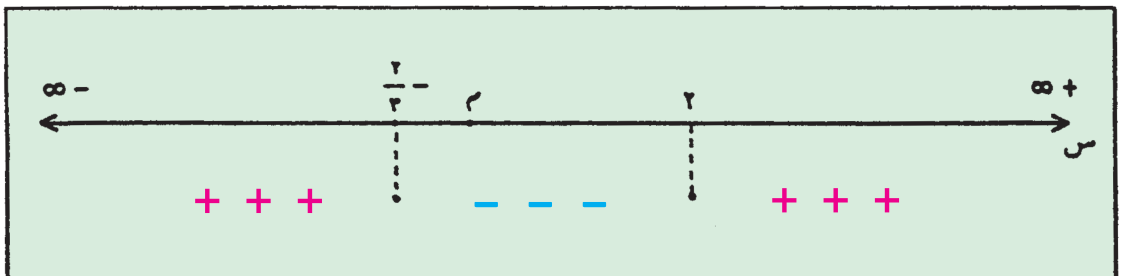
= ٦٤ > ٠ فالمعادلة ٣ س^{٢} − ٤ س − ٤ = ٠ ⇐ (٣ س + ٢) (س − ٢) = ٠

لها جذران : س$_{١}$ = $\frac{-٢}{٣}$ ، س$_{٢}$ = ٢

وبما أن أ = ٣ > ٠ فإشارة ثلاثي الحدود سالبة عندما س ∋] − $\frac{٢}{٣}$ ، ٢ [وموجبة عندما س ∋ ح −] − $\frac{٢}{٣}$ ، ٢ [ونلخص ذلك بالجدول الآتي :

س	− ∞		− $\frac{٢}{٣}$		٢		+ ∞
إشارة ٣ س^{٢} − ٤ س − ٤		+	٠	−	٠	+	

أو نمثله على خط الأعداد كما في الشكل (١ − ١٤)



شكل (١ − ١٤)

(ب) د (س) = − س^{٢} + ٨ س − ١٦

ب^{٢} − ٤ أ حـ = (٨)^{٢} − ٤ (− ١) (− ١٦) = ٠ والمعادلة − س^{٢} + ٨ س − ١٦ = ٠ ⇔ س = ٤

وبما أن أ = − ١ > ٠ فإشارة ثلاثي الحدود سالبة ∀ س ∋ ح − { ٤ }

ويمكن التوصل إلى الحل بالطريقة التالية:

$$د\,(س) = -\,(س^{٢} - ٨\,س + ١٦)$$

$$= -\,(س - ٤)^{٢}$$

واضح أن $د\,(س) < ٠$ ما لم تكن $س = ٤$ حيث $د\,(س) = ٠$

(حـ) $د\,(س) = س^{٢} - ٢\,س + ١٠$

$$ب^{٢} - ٤\,أ\,حـ = (-٢)^{٢} - ٤\,(١)\,(١٠)$$

$$= -٣٦ < ٠$$

وبما أن $أ = ١ > ٠$ فإشارة $د\,(س) > ٠ \;\forall\; س \in ح$

تمارين (١ - ٢)

(١) أعد تعريف كل من الدوال التالية وارسم بيانها:

(أ) $|س - ٥|$

(ب) $|س + ٣| + ٤$

(حـ) $|٣\,س - ١|$

(٢) عيِّن مجال ومدى الدالة التالية وارسم بيانها:

$$د\,(س) = |٤\,س + ٢| - ١$$

(٣) عيِّن مجال كل من الدوال التالية:

(أ) $د\,(س) = س^{٥} + ٢\,س^{٣} + ٣\,س$

(ب) $ر\,(س) = \dfrac{س + ١}{س^{٢} + ١}$

(حـ) $ن\,(س) = \dfrac{١ + ٣\,س - ٥\,س^{٢}}{س - ٤}$

(ء) $ك\,(س) = \dfrac{٥\,س}{س^{٢} + س - ٢}$

(هـ) $ع\,(س) = \sqrt{٣ - س}$

(و) $ل\,(س) = \sqrt{س^{٢} + ١١\,س + ٣٠}$

(٤) بيِّن أياً من الدوال التالية فردية وأياً منها زوجية :

(أ) $د(س) = س^{٣} + ٥$

(ب) $ر(س) = \sqrt{س^{٢} - ٢}$

(حـ) $ن(س) = |س|$

(ء) $ك(س) = س^{٢} + ٣\,س$

(هـ) $ع(س) = س\,|س|$

(٥) أثبت أن كلاً من الدوال الآتية محدودة وأوجد مداها :

(أ) $د(س) = ٢\,س + ١$ $\qquad ٠ \leqslant س \leqslant ٢$

(ب) $د(س) = ٣ - س$ $\qquad ١ \leqslant س \leqslant ٣$

(حـ) $د(س) = \dfrac{س^{٢}}{١ + س^{٢}}$ $\qquad \forall\, س \in ح$

(٦) (أ) أثبت أن الدالة : $د(س) = س^{٢} + ٤$ محدودة من أسفل وأوجد مداها.

(ب) أثبت أن الدالة : $د(س) = -\,س^{٢} + ٤$ محدودة من أعلى وأوجد مداها.

(٧) حدِّد الفترات التى تكون فيها كل من الدوال الآتية موجبة أو سالبة مع تمثيل ذلك على خط الأعداد :

(أ) $د(س) = س^{٢} - س - ١٢$

(ب) $د(س) = -\,س^{٢} + س - ١$

(حـ) $د(س) = ٤\,س^{٢} - ٤\,س + ١$

(ء) $د(س) = (٣ - س)\,(س - ١)$

(هـ) $د(س) = ٢ - س$

(٨) عيِّن مجال كل من الدوال الآتية :

(أ) $د(س) = \sqrt{س^{٢} - ٣\,س + ٢}$

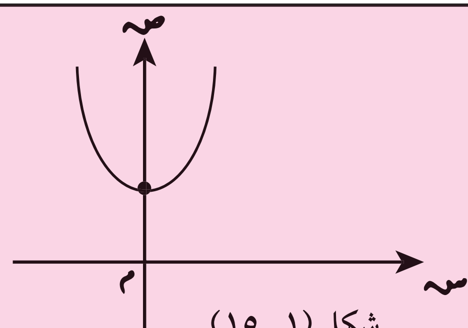
(ب) $د(س) = \sqrt{س^{٢} + س + ١}$

(حـ) $د(س) = \dfrac{س - ١}{\sqrt{س^{٢} - ٣س - ٨}}$

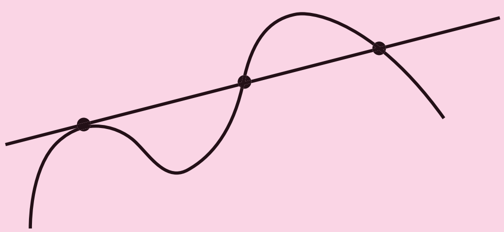
١ ـ ٣ النهـــايـــات

كما أسلفنا في مقدمة هذا الفصل فإن مفهوم النهاية يحتل مكاناً مميزاً في الرياضيات وهو ينشأ بصورة طبيعية في كثير من المسائل الهندسية والفيزيائية والإدارية وسنورد فيمايلي مسألة هندسية وثيقة الصلة بمفهوم النهاية وكانت من المسائل التى أدت إلى توضيح هذا المفهوم . والمسألة هي مسألة وجود المماس لمنحنٍ ما .

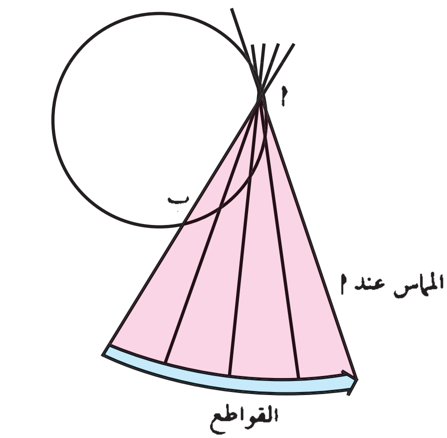
لعلك تذكر من دراستك في الهندسة المستوية أن المماس للدائرة هو ذلك المستقيم الذي يشترك مع الدائرة في نقطة واحدة فقط . وهذا الوصف للمماس لا يكون مقبولاً لمنحنيات أخرى إذ من الممكن أن يشترك مستقيم ما مع منحنٍ في نقطة واحدة فقط دون أن يكون مماساً للمنحني كما في الشكل (١ ـ ١٥) أو قد يكون المستقيم مماساً للمنحني ولكن يشترك معه في أكثر من نقطة كما في الشكل (١ ـ ١٦) .



شكل (١ ـ ١٥)


شكل (١ ـ ١٦)

لذا فمن الضروري إعطاء تعريف رياضي للمماس يتحقق بالنسبة لمماس الدائرة كما يتحقق بالنسبة لمماسات المنحنيات الأخرى . ولاستنباط هذا التعريف سنتناول مسألة المماس من منظور آخر . لتكن أ نقطة ثابتة على الدائرة ولننظر إلى القاطع من أ إلى نقطة أخرى ب تقع على الدائرة . إذا جعلنا النقطة ب تقترب من النقطة أ بحيث تظل ب على الدائرة فإنه لكل موقع من مواقع ب على الدائرة يكون لدينا قاطع من النقطة أ إلى النقطة ب . ومجموعة المواقع المختلفة للنقطة ب على الدائرة تقابلها مجموعة القواطع التي تصل بين النقطة أ ومواقع النقطة ب المختلفه . وتبعاً لحركة النقطة ب على الدائرة باتجاه أ فإن القاطع يدور حول أ. وكلما اقتربت ب من أ فإن القاطع يقترب من المماس عند أ . انظر الشكل (١ ـ ١٧) .

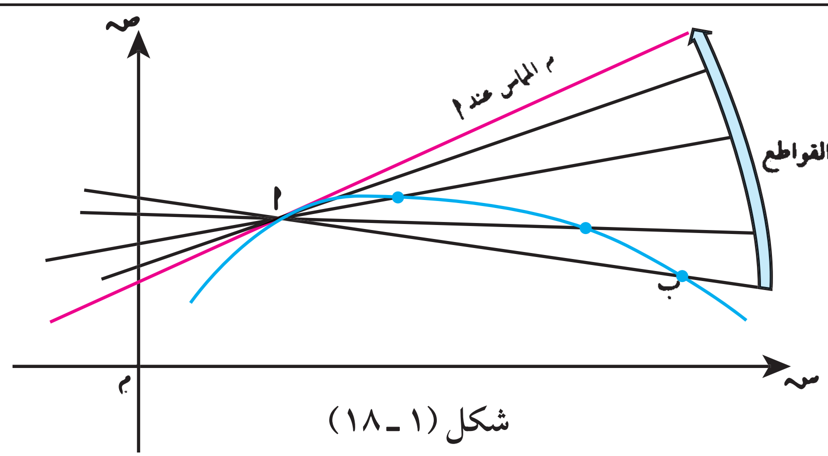


شكل (١ ـ ١٧)

ويمكننا القول بعبارة أخرى أن القاطع م ب يقترب من المماس عند م عندما تقترب ب من م.

وباستخدام هذه الفكرة يمكننا تعريف المماس لمنحنيات أخرى خلاف الدائرة.

لتكن م نقطة ثابتة على منحني دالة ما في المستوي؛ لتعيين المماس لمنحني الدالة عند م، نأخذ نقطة أخرى ب على منحني الدالة، المستقيم الذي يصل م بالنقطة ب هو القاطع م ب للمنحني. كما في حالة الدائرة فإننا نرى أنه عندما تتحرك ب على المنحني باتجاه م فإن القاطع م ب يدور حول النقطة م ليأخذ وضعاً نهائياً عندما تنطبق النقطة ب على النقطة م ويسمى عندئذ مماساً للمنحني عند النقطة م. انظر الشكل (١ ـ ١٨)



شكل (١ ـ ١٨)

وعلى ضوء هذه المناقشة نستطيع القول بأن المماس عند ٩ هو المستقيم الذي تنتهي إليه الأوضاع المختلفة للقاطع ٩ب عندما تقترب ب من ٩.

ومسألة المماس هذه هي حالة خاصة لمسألة أكثر شمولا تتلحص في دراسة سلوك داله ما د (س) عندما تقترب قيمة المتغير س من قيمة ثابتة ٩ ولكن س ≠ ٩ فإذا كان أحد المصانع مثلاً ينتج سلعة ما وكان ربحه دَ (س) حيث المتغير س هو عدد الوحدات المنتجة في فترة زمنية معينة، فإنه من الضروري أن تعرف إدارة المصنع قيمة س = ٩ التي تجعل د (س) سالبة - أي عندما يبدأ المصنع في الخسارة. وبالطبع فإن إدارة المصنع لاتود الانتظار حتى تبلغ س القيمة ٩ بل تحاول تجنب الخسارة وذلك بمعرفة قيم د (س) عندما تقترب قيم س من ٩.

مثال (١-١٧)

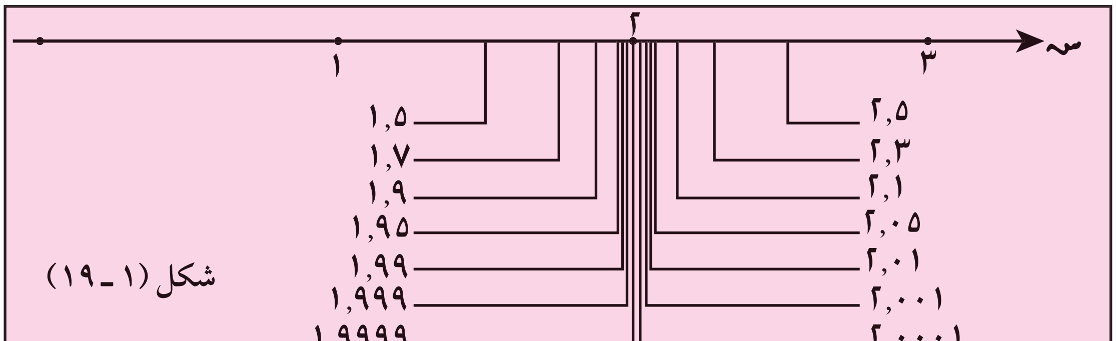
لتكن الدالة د معرفة بالقاعدة:

د (س) = ٢ س + ١

ادرس سلوك الدالة د عندما تقترب س من القيمة ٢ دون أن تساويها.

الحـــل:

سندرس حالتين مختلفتين تقترب فيهما قيم س من العدد ٢ إحداهما بواسطة قيم أكبر من ٢ (أي عن يمين العدد ٢) والأخرى بواسطة قيم أقل من ٢ (أي عن يسار العدد ٢) وهما الحالتان الممكنتان لاقتراب س من العدد ٢. انظر الشكل (١ ـ ١٩) لاحظ أننا لزيادة الإيضاح لم نحافظ على مقياس الرسم.



شكل (١ ـ ١٩)

وسنبين في الجدول الأول القيم التي تأخذهـا د (س) عندمـا تقترب س من العـدد ٢ بقيم اخترنـاها عن يمين العدد ٢ . وفي الجدول الثاني التي تأخذها د (س) عندما تقترب س من العـدد ٢ بقيم اخترنـاها عن يسار العدد ٢ .

س	٣	٢,٥	٢,٣	٢,١	٢,٠٥	٢,٠١	٢,٠٠١	٢,٠٠٠١
د (س) = ٢ س + ١	٧	٦	٥,٦	٥,٢	٥,١	٥,٠٢	٥,٠٠٢	٥,٠٠٠٢

الجدول الأول : عندما تقترب س من العدد ٢ من اليمين

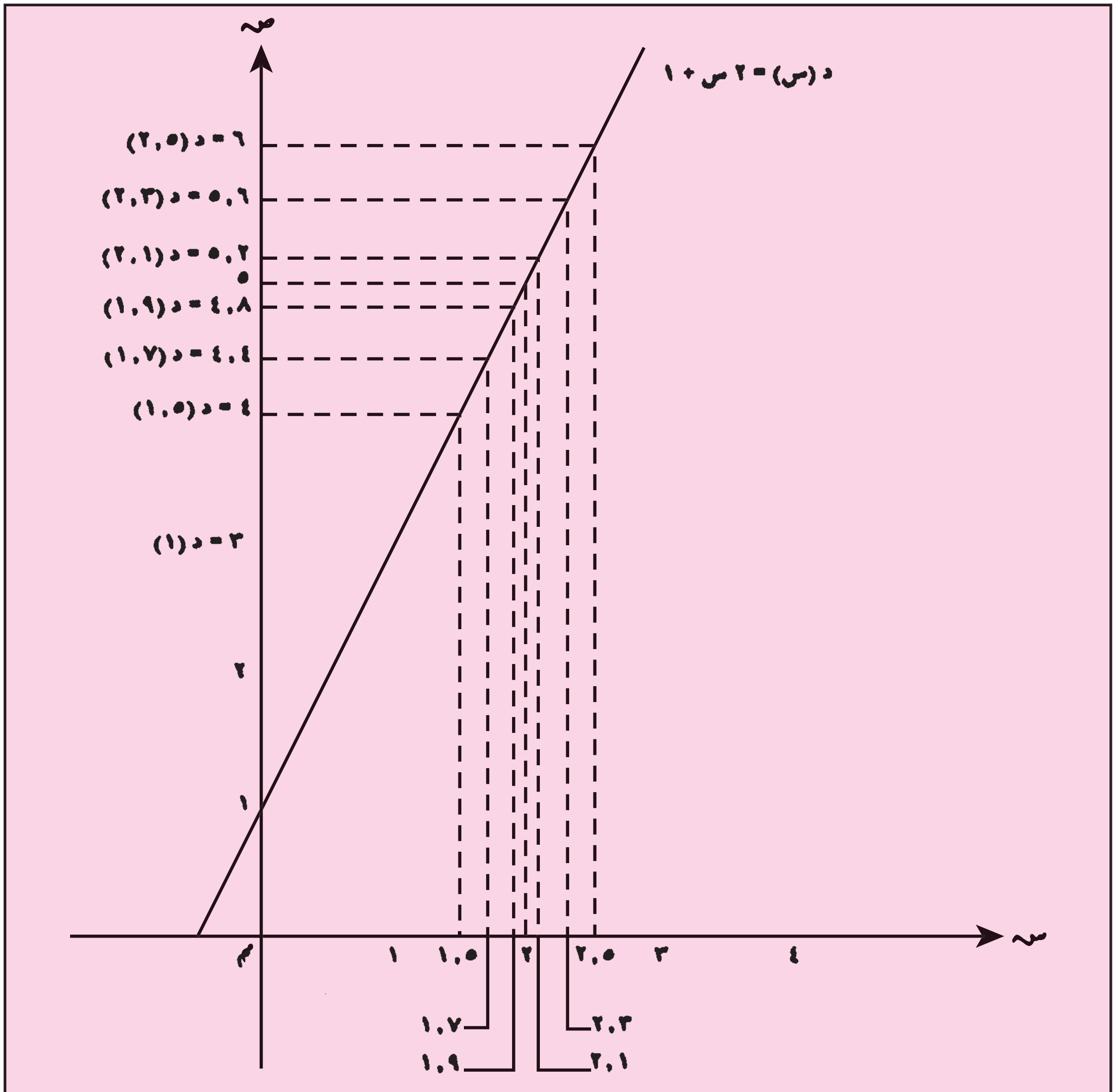
س	١	١,٥	١,٧	١,٩	١,٩٥	١,٩٩	١,٩٩٩	١,٩٩٩٩
د (س) = ٢ س + ١	٣	٤	٤,٤	٤,٨	٤,٩	٤,٩٨	٤,٩٩٨	٤,٩٩٩٨

الجدول الثاني : عندما تقترب س من العدد ٢ من اليسار

ويبـدو جلياً من الشكـل (١ ـ ٢٠) أن قيم الدالـة د (س) تنتهي إلى العدد ٥ عنـدما تنتهي س إلى العدد ٢ سواءً من جهة اليمين أو من جهة اليسار.

وتقول إن العدد ٥ هو نهاية الدالة س عندما تنتهي س إلى العدد ٢ ونرمز لذلك بـ :

$$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ د(س) = ٥ \quad \text{أو :} \quad \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ (٢ س + ١) = ٥ \qquad (١)$$



شكل (١ - ٢٠)

الرمز س ← ٢ هنا يعني «س تنتهي إلى العدد ٢ (سواء من اليمين أو من اليسار) دون أن تأخذ القيمة ٢ بالضرورة» والمعادلة (١) تقرأ هكذا:

«نهاية د (س) عندما س تنتهي إلى ٢ تساوي ٥».

وينبغي أن نذكر أن قيمة نهاية د (س) عندما س ← ٢ في المعادلة (١) قد حصلنا عليها بطريقة حدسية. ومن الممكن بالطبع إعطاء تعريف رياضي دقيق لمفهوم نهاية الدالة ثم بيان أن العدد ٥ في المعادلة (١) يحقق تعريف النهاية ولكننا هنا سنكتفي بهذا التعريف الحدسي لمفهوم النهاية.

تعريف (١ ـ ١)

تقول إن الدالة د لها نهاية ل عند النقطة ٩ إذا كانت قيم د (س) تنتهي إلى العدد ل كلما اقتربت قيم س من العدد ٩ (دون أن تأخذ س القيمه ٩) ونرمز لذلك بـ :

$$\underset{س \leftarrow ٩}{\text{نهـــا}} \ د(س) = ل .$$

مثال (١-١٨)

جد $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـــا}} \ \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$

الحـــل :

لاحظ أن الدالة د (س) = $\frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$ غير معرفة عند س = ٤ . وسنسعى لإيجاد نهاية د عندما تقترب س من ٤ كما فعلنا في مثال (١ ـ ١٧). بالنظر إلى الجدولين التاليين اللذين يبينان القيمة التي تأخذها د (س) عندما تقترب س من ٤ من جهة اليمين واليسار على التوالي :

س	٥	٤,٥	٤,١	٤,٠١	٤,٠٠١	٤,٠٠٠١
د (س)	٩	٨,٥	٨,١	٨,٠١	٨,٠٠١	٨,٠٠٠١

عندما س تقترب من ٤ من جهة اليمين

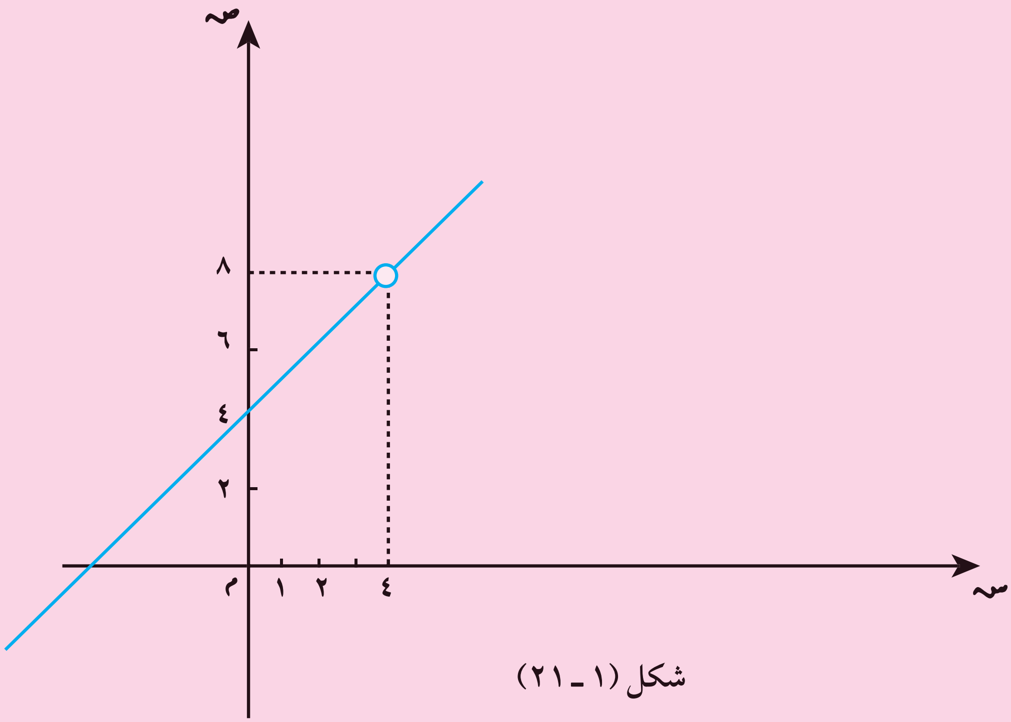
س	٣	٣,٥	٣,٩	٣,٩٩	٣,٩٩٩	٣,٩٩٩٩
د (س)	٧	٧,٥	٧,٩	٧,٩٩	٧,٩٩٩	٧,٩٩٩٩

عندما س تقترب من ٤ من جهة اليسار

وبالنظر إلى الجدولين فإننا نرى أنه عندما تقترب س من العدد ٤ سواء من جهة اليمين أو من جهة اليسار فإن قيم د (س) تقترب من العدد ٨ ولذا فإن :

$$\lim_{س \leftarrow ٤} \frac{س^{٢} - ١٦}{س - ٤} = ٨$$ (انظر الشكل (١ – ٢١))

ملاحظة : $د(س) = \frac{س^{٢} - ١٦}{س - ٤} = س + ٤$ إذا كانت $س \neq ٤$



شكل (١ ـ ٢١)

ملاحظــة : في هذا المثال نرى أن نهاية الـدالة د عنـد ٤ موجـودة وتساوى ٨ رغم أن الـدالة غـير معرفـة عند ٤ .

مثال (١-١٩)

لتكن د (س) = $\frac{|س|}{س}$

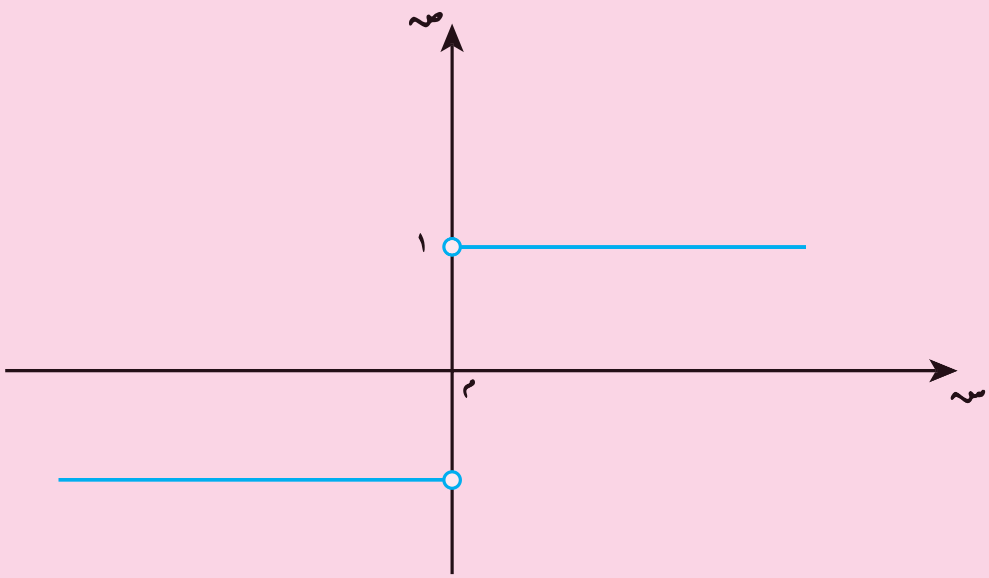
ما هي $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}$ د (س) ؟

الحــل :

لاحظ أولاً أن الدالة غير معرفة عند الصفر ، وثانيا يمكننا كتابة د (س) على النحو التالي :

$$د(س) = \begin{cases} ١ & \text{لقيم } س > ٠ \\ -١ & \text{لقيم } س < ٠ \end{cases}$$

وبيان الدالة موضح في الشكل (١ – ٢٢) .



شكل (١ ـ ٢٢)

عندما تقترب س من الصفر من جهة اليمين دون أن تساوي الصفر فإن قيم د (س) تكون مساوية لواحد لذا فإن الدالة د تقترب من الواحد عندما تقترب س من الصفر من جهة اليمين. وعندما تقترب س من الصفر من جهة اليسار دون أن تساويه فإن قيم الدالة د تكون مساوية لسالب واحد. لذا فإن الدالة د تقترب من سالب واحد عندما تقترب س من الصفر من جهة اليسار. لذا فإن قيم الدالة د لا تقترب من عدد وحيد عندما س تقترب من الصفر (انظر بيان الدالة) وفي هذه الحالة نقول إن نهاية الدالة د عند الصفر غير موجودة.

وعموماً نقول:

تعريف (١ ـ ٢)

نقول إن $\underset{س \leftarrow ا}{\text{نهـا}}$ د (س) غير موجودة إذا كانت قيمة د (س) لاتقترب من عدد حقيقي وحيد، عندما تقترب س من ا.

إذا كتبنا:

س = ا + هـ

فإننا نرى أن س تقترب من ا إذا وفقط إذا كانت هـ تقترب من الصفر أي أن:

س ← ا ⇔ س = ا + هـ حيث هـ ← ٠

وعندما نقتصر على قيم هـ الموجبة فإن:

س > ا و س ←⁺ ا ⇔ س = ا + هـ حيث هـ > ٠ و هـ ← ٠

ولذا فإن س تقترب من ا من جهة اليمين ⇔ س = ا + هـ حيث هـ تقترب من الصفر من جهة اليمين.

وبالمثل فإن س تقترب من ا من جهة اليسار ⇔ س = ا + هـ حيث هـ تقترب من الصفر من جهة اليسار.

وسنستخدم الرمزين التالين:

(س ← ا +) ليعني أن س تقترب من ا من جهة اليمين،

(س ← أ −)   ليعني أن س تقترب من أ من جهة اليسار .

هذا بالإضافة إلى الرمز الذى استخدمناه سابقاً :

(س ← أ)   ويعني أن س تقترب من أ (دون تحديد جهة الاقتراب) .

مثال (١ - ٢٠)

لتكن د (س) = { س + ٢   لقيم س ≥ ١ ؛ ٢ س − ١   لقيم س < ١ }

ماهي   نهـــا (س ← ١)   د (س) ؟

الحـــل :

عندما س ← ١ +   فإن س = ١ + هـ حيث هـ ← ٠ +

وفـي هـــذه الحالـــة :

د (س) = د (١ + هـ) = ٢ (١ + هـ) − ١ = ١ + ٢ هـ

ولكن ١ + ٢ هـ ← ١ عندما هـ ← ٠ +

⇐ د (س) ← ١ عندما س ← ١ +

وعندما س ← ١ −   فإن س = ١ + هـ حيث هـ ← ٠ −

وفـي هـــذه الحالـــة :

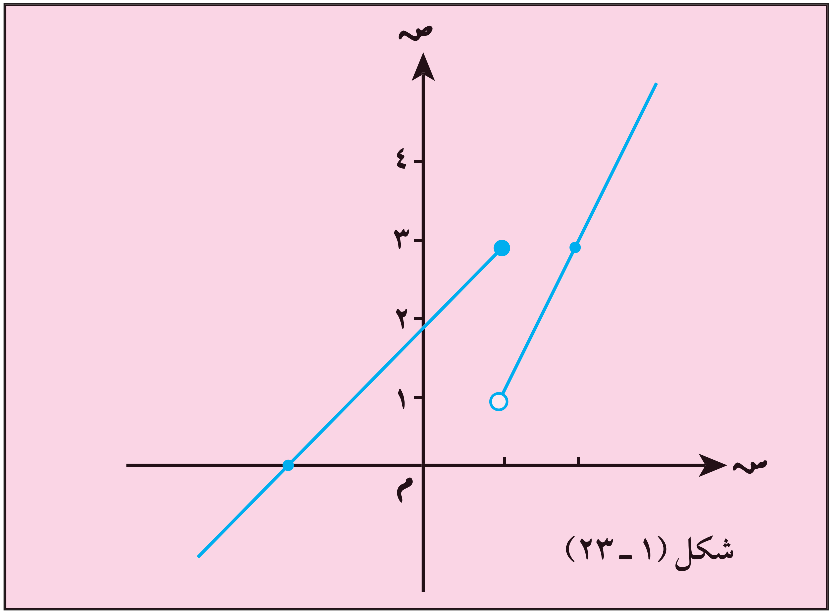
د (س) = د (١ + هـ) = (١ + هـ) + ٢ = ٣ + هـ

ولكن ٣ + هـ ← ٣ عندما هـ ← ٠ −

⇐ د (س) ← ٣ عندما س ← ١ −

وبما أن د (س) لا تقترب من قيمة وحيدة عندما س ← ١ فإن :

نهـــا (س ← ١) د(س)   غير موجودة (انظر الشكل (١ – ٢٣)) .



شكل (١ ـ ٢٣)

مثال (١-٢١)

للدالة د (س) = ٥ س + ١ جد قيم س القريبة من العدد ٢ بحيث يكون الفرق بين د(س) والعدد ١١ أقل من ٠,٠١

الحـــل :

الفرق بين د(س) والعدد ١١ < ٠,٠١

⟺ − ٠,٠١ < د(س) − ١١ < ٠,٠١

⟺ − ٠,٠١ < (٥ س + ١) − ١١ < ٠,٠١

⟺ − ٠,٠١ < ٥ س − ١٠ < ٠,٠١

⟺ − ٠,٠١ < ٥ (س − ٢) < ٠,٠١

⟺ − ٠,٠٠٢ < س − ٢ < ٠,٠٠٢

⟺ ١,٩٩٨ < س < ٢,٠٠٢

⟺ س ∈]١,٩٩٨ ، ٢,٠٠٢[.

أي أنه إذا كان الفرق بين س والعدد ٢ أقل من ٠,٠٠٢ فإن الفرق بين د (س) والعدد ١١ يكـون أقل من ٠,٠١

مثال (١-٢٢)

للدالة د (س) = ٥ س + ١ جد قيم س القريبة من العدد ٢ بحيث يكون الفرق بين د (س) والعدد ١١ أقل من ثابت اختياري ي > ٠

الحل :

الفرق بين د (س) والعدد ١١ < ي

$\Leftrightarrow$ − ي < د (س) − ١١ < ي

$\Leftrightarrow$ − ي < ٥ (س − ٢) < ي

$\Leftrightarrow$ $\frac{-ي}{٥}$ < س − ٢ < $\frac{ي}{٥}$

$\Leftrightarrow$ س ∈] ٢ − $\frac{ي}{٥}$ ، ٢ + $\frac{ي}{٥}$ [.

من ذلك نرى أنه :

إذا كان : | س − ٢ | < $\frac{ي}{٥}$ فإن | د (س) − ١١ | < ي

وكلما جعلنا قيمة ي تقترب من الصفر فإن قيمة س تقترب من ٢ وقيمة د (س) تقترب من ١١ .

وهذا يعني وفقاً لتعريف (١ ـ ١) أن :

$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ (٥ س + ١) = ١١ .

النهاية اليمنى والنهاية اليسرى :

في التعليق اللاحق لتعريف (١ ـ ٢) استخدمنا الرمز (س ← أ +) ليعني اقتراب س من أ من جهة اليمين، والرمز (س ← أ −) ليعني اقتراب س من أ من جهة اليسار. وهذان الرمزان يفيدان في تعريف النهاية اليمنى واليسرى عند أ.

تعريـــف (١ ـ ٣)

نقول إن الدالة د لها نهاية يمنى $ل_١$ عند النقطة م، إذا كانت قيم د (س) تنتهي إلى العدد $ل_١$ كلما اقتربت قيم س من العدد م من جهة اليمين (دون أن تأخذ س القيمة م) ونرمز لذلك بـ :

$$\lim_{س \leftarrow م^+} د(س) = ل_١$$

ونقول إن الدالة د لها نهاية يسرى $ل_٢$ عند النقطة م، إذا كانت قيم د (س) تنتهي إلى العدد $ل_٢$ كلما اقتربت قيم س من العدد م من جهة اليسار (دون أن تأخذ س القيمة م) ونرمز لذلك بـ :

$$\lim_{س \leftarrow م^-} د(س) = ل_٢$$

ملاحظـــات :

بتطبيق هذا التعريف على الأمثلة (١ ـ ١٨)، (١ ـ ١٩) و (١ ـ ٢٠) نرى أن :

(١) في مثـــال (١ ـ ١٨) :

$$\lim_{س \leftarrow ٤^+} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤} = \lim_{س \leftarrow ٤^-} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤} = ٨$$

أي أن النهاية اليمنى للدالة عند ٤ تساوي النهاية اليسرى عند ٤ وتتساويان مع نهاية الدالة عند ٤ .

(٢) في مثال (١ ـ ١٩) .

$$\lim_{س \leftarrow ٠^+} \frac{|س|}{س} = ١$$

$$\lim_{س \leftarrow ٠^-} \frac{|س|}{س} = -١$$

أي أن النهاية اليمنى عند الصفر تختلف عن النهاية اليسرى ولم تكن للدالة نهاية عند الصفر.

(٣) في مثال (١ ـ ٢٠).

$$\lim_{س \to ١^+} د(س) = ١$$

$$\lim_{س \to ١^-} د(س) = ٣$$

أي أن النهاية اليمنى للدالة عند ١ تختلف عن النهاية اليسرى ولم تكن للدالة نهاية عند ١.

مثال (١-٢٣)

$$\text{للدالة } د(س) = \begin{cases} ٧ - ٢ س & \text{لقيم } س \geqslant ٢ \\ س + ١ & \text{لقيم } س < ٢ \end{cases}$$

أثبت أن:

(١) $\lim_{س \to ٢^+} د(س) = ٣$

(٢) $\lim_{س \to ٢^-} د(س) = ٣$

الحل:

$س \to ٢^+ \Leftrightarrow س = ٢ + هـ \quad \text{حيث } هـ \to ٠^+$

وفي هذه الحالة:

$د(س) = د(٢ + هـ) = ٧ - ٢(٢ + هـ) = ٣ - ٢ هـ$

وعندما $هـ \to ٠^+$ فإن $٣ - ٢ هـ \to ٣$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢^+} د(س) = ٣$

$س \to ٢^- \Leftrightarrow س = ٢ + هـ \quad \text{حيث } هـ \to ٠^-$

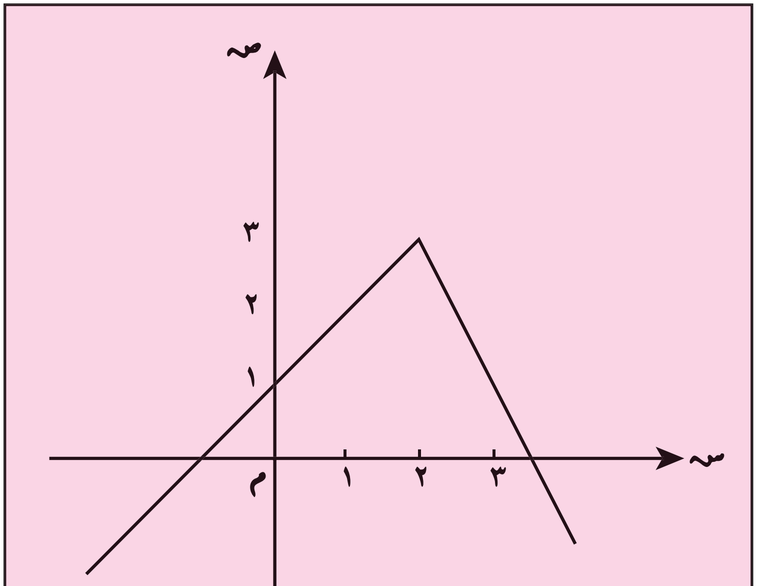
وفي هذه الحالة:

$د(س) = د(٢ + هـ) = (٢ + هـ) + ١ = ٣ + هـ$

وعندما $هـ \to ٠^-$ فإن $٣ + هـ \to ٣$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{د}(\text{س}) = ٣$$

أنظـر الشكل (١-٢٤)



شكل (١ ـ ٢٤)

نهاية الدالة عند س = ﺃ:

نلاحظ في مثال (١ ـ ٢٣) أنه رغم أن الدالة معرفة بقاعدتين مختلفتين عن يمين ٢ وعن يسارها فـإن نهايتها اليمنى تساوى نهايتها اليسرى عند ٢ . ولذا فإنه بغض النظر عن الطريقـة التي تقترب بهـا س من ٢ (سـواء من جهة اليمـين أو جهة اليسـار) فإن د (س) تقتـرب من عدد حقيقي وحيـد هو ٣ في هـذه الحالة، وهذا يعني أن نهاية الدالة عند س = ٢ موجودة وتساوي ٣ :

$$\lim_{\text{س} \to ٢} \text{د}(\text{س}) = ٣$$

وبوجه عام لأي دالة تكون نهايتها اليمنى عند س = ﺃ تساوي نهايتها اليسرى عند س = ﺃ فإن نهايـة الدالة عند س = ﺃ تكون موجودة وتساوي القيمة المشتركة للنهايتين اليمنى واليسرى.

$$\lim_{س \to ا} د(س) = \lim_{س \to ا^+} د(س) = \lim_{س \to ا^-} د(س).$$

وبالعكس إذا كانت نهاية الدالة د عند س = ا موجودة فهذا يعني أن د (س) تقترب من عدد حقيقي وحيد ل بغض النظر عن الطريقة التي تقترب بها س من ا. وعلى وجه الخصوص إذا حددنا اقتراب س من ا من جهة اليمين فإن النهاية اليمنى للدالة د عند س = ا تكون موجودة وتحقق :

$$\lim_{س \to ا^+} د(س) = ل.$$

وبالمثل إذا اقتصرنا على اقتراب س من ا من جهة اليسار فإن النهاية اليسرى للدالة د عند س = ا تكون موجودة وتحقق :

$$\lim_{س \to ا^-} د(س) = ل.$$

أي أن :

$$\lim_{س \to ا^-} د(س) = \lim_{س \to ا^+} د(س) = \lim_{س \to ا} د(س).$$

وهذا يمكن تلخيصه في النظرية التالية :

نظريـــة (١ ـ ٢):

نهاية الدالة د عند س = ا تكون موجودة إذا و فقط إذا كانت كل من النهاية اليمنى والنهاية اليسرى للدالة د عند س = ا موجودة وكانت هاتان النهايتان متساويتين.

ملاحظـــات :

النظرية (١ ـ ٢) تقتضي أنه لوجود نهاية الدالة د عند نقطة ما لابد أن تحقق ثلاثة شروط :

(١) وجود النهاية اليمنى عند تلك النقطة.

(٢) وجود النهاية اليسرى عند تلك النقطة.

(٣) تساوي النهايتين اليمنى واليسرى عند تلك النقطة

ولن تكون النهاية موجودة عند النقطة إذا اختل أي من الشروط الثلاثة.

وباستعراض الأمثلة السابقة نرى أنه في الأمثلة (١ ـ ١٨) (١ ـ ٢٢)، (١ ـ ٢٣) **تتحقق الشروط الثلاثة ولذا كانت للدالة في كلٍ من الأمثلة نهاية عند النقطة المعطاة**. بينما في مثالي (١ ـ ١٩)، (١ ـ ٢٠) ورغم وجود كلٍ من النهاية اليمنى واليسرى عند النقطة المعطاة إلا أن **أختلافهما في كل حالة جعل النهاية غير موجودة عند النقطة المعطاة**.

وملاحظة أخرى نتبينها لدى استعراضنا للأمثلة السابقة وهي أن قيمة الدالة عند النقطة م لا تلعب أي دور في وجود نهاية الدالة عند م، بل إن الدالة قد لا تكون معرَّفة عند م ومع ذلك تكون نهايتها عند م موجودة (انظر مثال (١ ـ ١٨)). وقد تكون الدالة معرفة عند م ولكن نهايتها عند م لا تساوى قيمتها عند م.

١ ـ ٤ الدوال التي تسعى إلى ما لا نهاية

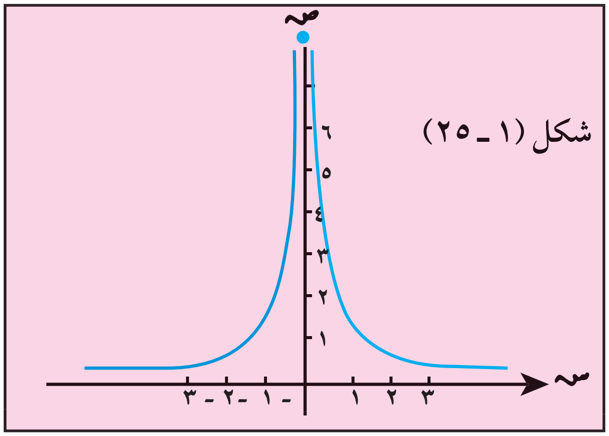
مثال (١-٢٤)

جد $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{١}{\text{س}^{٢}}$.

الحــل :

الدالة د (س) = $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$ غير معرفة عند الصفر

انظر بيان الدالة في شكل (١ ـ ٢٥)



شكل (١ ـ ٢٥)

سنبدأ أولاً بدراسة النهاية اليمنى، ونلاحظ أنه عندما تقترب س من الصفر من جهة اليمين، فإن قيم د (س) تكبر بلا حدود، كما يتضح من الجدول التالي :

س	٢	١	٠,٧	٠,٥	٠,٢	٠,١	٠,٠٥	٠,٠١	٠,٠٠١
$\frac{١}{س^{٢}}$	٠,٢٥	١	٢,٠٤	٤	٢٥	١٠٠	٤٠٠	$١٠^{٤}$	$١٠^{٦}$

أي أن د (س) تصبح غير محدودة من أعلى عندما تقترب س من الصفر من جهة اليمين ولذا فإن د (س) لا تقترب من أي عدد حقيقي، ونعبر عن ذلك بقولنا إن د (س) تسعى إلى ما لا نهاية عندما $س \leftarrow ٠^{+}$

ونرمز لذلك بما يلي : $\lim\limits_{س \leftarrow ٠^{+}} \frac{١}{س^{٢}} = \infty$.

ثم ندرس النهاية اليسرى؛ ونلاحظ أنه عندما تقترب س من الصفر من جهة اليسار، فإن قيم د (س) تكبر بلا حدود، كما يتضح من الجدول التالي :

س	−٢	−١	−٠,٧	−٠,٥	−٠,٢	−٠,١	−٠,٠٥	−٠,٠١	−٠,٠٠١
$\frac{١}{س^{٢}}$	٠,٢٥	١	٢,٠٤	٤	٢٥	١٠٠	٤٠٠	$١٠^{٤}$	$١٠^{٦}$

أي أن د (س) تصبح غير محدودة من أعلى عندما تقترب س من الصفر من جهة اليسار، ولذا فإن د (س) لا تقترب من أي عدد حقيقي، ونعبر عند ذلك بأن د (س) تسعى إلى ما لا نهاية عندما $س \leftarrow ٠^{-}$

ونرمز لذلك بمايلي :

$$\lim\limits_{س \leftarrow ٠^{-}} \left(\frac{١}{س^{٢}}\right) = \infty$$

وبما أن : $\underset{س \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{س^{٢}} \right) = \infty$

و $\underset{س \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{س^{٢}} \right) = \infty$

فإننا نقـول إن : $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{س^{٢}} \right) = \infty$

مثال (١-٢٥)

جـد $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \left(\frac{-١}{(س - ١)^{٢}} \right)$

الحـل :

الدالة غير معرفة عند س = ١ ، وعندما تقترب س من ١ من جهة اليمين فإن قيم د (س) تكـون سالبة وتصغر بلا حدود، كما يتضح من الجدول التالي :

س	٣	٢	١,٧	١,٥	١,٢	١,١	١,٠٥	١,٠١	١,٠٠١
$\frac{-١}{(س-١)^{٢}}$	$-٠,٢٥$	-١	$-٢,٠٤$	-٤	-٢٥	-١٠٠	-٤٠٠	$-١٠^{٤}$	$-١٠^{٦}$

أي أن د (س) تصبح غير محـدودة من أسفل عـندما تقتـرب س من أ من جهـة اليميـن ولـذا فـإن د (س) لا تقترب من أي عدد حقيقي ، ونعبر عن ذلك بـأن د (س) تسعى إلى **سالب مـا لا نهاية** عنـدما $س \leftarrow ١^{+}$

ونرمـز لذلك بـ : $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \left(\frac{-١}{(س - ١)^{٢}} \right) = -\infty$

وعندما تقترب س من ١ من جهة اليسار ، فإن قيم د (س) تكون سالبـة ، وتُصغر بلا حدود ، كـما يتضح من الجدول التالي :

س	-1	٠	٠,٣	٠,٥	٠,٨	٠,٩	٠,٩٥	٠,٩٩	٠,٩٩٩
$\frac{-1}{(س-1)^2}$	$-$ ٠,٢٥	$-$ ١	$-$ ٢,٠٤	$-$ ٤	$-$ ٢٥	$-$ ١٠٠	$-$ ٤٠٠	$-$ 10^4	$-$ 10^6

أي أن د (س) تصبح غير محدودة من أسفل، عندما تقترب س من ١ من جهه اليسار، ولذا فإن د (س) لا تقترب من أي عدد حقيقي، ونعبر عن ذلك بأن د (س) تسعى إلى **سالب ما لا نهاية** عندما س ← ١ -

ونرمز لذلك بمايلي :
$$\lim_{س \to 1^-} \left(\frac{-1}{(س-1)^2} \right) = -\infty$$

وبما أن كلاً من النهاية اليمنى واليسرى عند ١ هي $-\infty$ فإننا نقول إن :

$$\lim_{س \to 1} \left(\frac{-1}{(س-1)^2} \right) = -\infty$$

مثال (١-٢٦)

ما هي $\lim_{س \to 0} \frac{1}{س}$ ؟

الحل :

عندما س ← ٠ + ، فإن $\frac{1}{س}$ تكون موجبة وتكبر بلا حدود ولذا فإن :

$$\lim_{س \to 0^+} \frac{1}{س} = \infty$$

وعندما س ← ٠ - ، فإن $\frac{1}{س}$ تكون سالبة وتصغر بلا حدود ولذا فإن :

$$\lim_{س \to 0^-} \frac{1}{س} = -\infty$$

وبما أن النهايتين مختلفتان فإن :

$\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{١}{س}$ غير موجودة .

١ ـ ٥ خواص النهايات

سنقدم هنا بعض خواص النهايات التي تعيننا في حل المسائل :

(١) الخاصة الأولى :

إذا كانت د دالة ثابتة قاعدتها د (س) = ث ،

فإنه لكل أ تكون : $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ د (س) = ث .

فمثلاً إذا كانت د (س) = ٢ فإن :

$\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ د (س) = ٢ ، $\lim\limits_{س \leftarrow ٠}$ د (س) = ٢ ، $\lim\limits_{س \leftarrow -١}$ د (س) = ٢

(٢) الخاصة الثانية :

إذا كانت د دالة التطابق : د (س) = س ،

فإنه لكل أ تكون : $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ د (س) = أ

فمثلاً : $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ س = ١ ، $\lim\limits_{س \leftarrow ٠}$ س = ٠ ، $\lim\limits_{س \leftarrow -١}$ س = -١

(٣) الخاصة الثالثة :

إذا كان لكل من الدالتين $د_١$ ، $د_٢$ نهاية عند أ ، فإن لمجموع هاتين الدالتين نهاية هي مجموع نهايتيها عند أ أي :

$$\lim\limits_{س \leftarrow أ} [\, د_١(س) + د_٢(س) \,] = \lim\limits_{س \leftarrow أ} د_١(س) + \lim\limits_{س \leftarrow أ} د_٢(س) .$$

وكذلك :

$$\lim\limits_{س \leftarrow أ} [\, د_١(س) - د_٢(س) \,] = \lim\limits_{س \leftarrow أ} د_١(س) - \lim\limits_{س \leftarrow أ} د_٢(س) .$$

فمثـــلا :

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} (\text{س} + ٣) = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \text{س} + \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} ٣ = ٢ + ٣ = ٥$$

و $$\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} (\text{س} - ٣) = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \text{س} - \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} ٣ = ٢ - ٣ = -١$$

ويمكن تعميم هذه الخاصة لتشمل أي عدد منته من الدوال :

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} [\text{د}_١(\text{س}) + \text{د}_٢(\text{س}) + \dots + \text{د}_{\text{ن}}(\text{س})] = \underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} \text{د}_١(\text{س}) + \underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} \text{د}_٢(\text{س}) + \dots + \underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} \text{د}_{\text{ن}}(\text{س}).$$

(٤) الخاصــة الرابعــة :

إذا كان لكل من الدالتين $\text{د}_١$ ، $\text{د}_٢$ نهاية عند أ فإن لحاصل ضربهما نهاية عند أ تحقق :

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} [\text{د}_١(\text{س}) \times \text{د}_٢(\text{س})] = \underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} \text{د}_١(\text{س}) \times \underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} \text{د}_٢(\text{س}).$$

وبعبـــارة أخــرى :

نهايه حاصل ضرب دالتين = حاصل ضرب نهايتي الدالتين .

وهذه الخاصة يمكن تعميمها أيضاً لحاصل ضرب عدد منته من الدوال .

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} [\text{د}_١(\text{س}) \times \text{د}_٢(\text{س}) \times \dots \times \text{د}_{\text{ن}}(\text{س})] = \underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} \text{د}_١(\text{س}) \times \underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} \text{د}_٢(\text{س}) \times \dots \times \underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} \text{د}_{\text{ن}}(\text{س}).$$

مثال (١-٢٧)

جد كلاً من النهايتين التاليتين :

(١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} [\text{س} (\text{س} + ٣)]$

(٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \text{س}^٢$.

الحـــل :

(١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \left[\text{س} (\text{س} + ٣)\right] = \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \text{س} \times \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} (\text{س} + ٣)$

$= ٤ \times \left[\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \text{س} + \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} ٣\right] = ٤ \times [٤ + ٣] = ٢٨$

(٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \text{س}^{٢} = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} (\text{س} \times \text{س}) = \left(\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \text{س}\right) \times \left(\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \text{س}\right)$

$= ٢ \times ٢ = ٤$

وكحالة خاصة من الخاصة الرابعة لدينا :

(٥) الخاصـــة الخامســـة :

إذا كان للدالة د نهاية عند م، وَ ث أي عدد ثابت، فإن الدالة (ث.د) لها نهاية عند م :

ويكون : $\underset{\text{س} \leftarrow \text{م}}{\text{نهـا}} \text{ث} \,.\, \text{د}(\text{س}) = \text{ث} \,.\, \underset{\text{س} \leftarrow \text{م}}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$.

(أي أن الثابت يمكن إخراجه خارج رمز النهاية).

مثال (١-٢٨)

جد كلاً من النهايتين التاليتين :

(١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} (٤\,\text{س})$

(٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{٢} \text{س}^{٢}\right)$

الحـــل :

(١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} (٤\,\text{س}) = ٤ \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \text{س} = ٤ \times ٤ = ١٦$

(٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{٢} \text{س}^{٢}\right) = \frac{١}{٢} \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \text{س}^{٢} = \frac{١}{٢} \times ٤ = ٢$.

وبتطبيق الخاصة الرابعة عدة مرات نرى

(٦) الخاصـــة السادســة :

إذا كانت الدالة د لها نهاية عند $أ$ ، و $ن$ أي عدد صحيح موجب فإن

$$\lim_{س \leftarrow أ} [د(س)]^{ن} = [\lim_{س \leftarrow أ} د(س)]^{ن}$$

مثال (١-٢٩)

جد $\lim_{س \leftarrow ٥} (س - ٣)^{٤}$

الحـــل :

$$\lim_{س \leftarrow ٥} (س - ٣)^{٤} = [\lim_{س \leftarrow ٥} (س - ٣)]^{٤}$$

$$= ٢^{٤} = ١٦ .$$

بتطبيق هذه الخواص نستطيع أن نثبت النظرية التالية :

نظريـــة (١ - ٣)

إذا كانت د دالة كثيرة حدود :

$$د(س) = ب_{ن} س^{ن} + ب_{ن-١} س^{ن-١} + \ldots + ب_{١} س + ب$$

وكان $أ$ أي عدد حقيقي فإن :

$$\lim_{س \leftarrow أ} د(س) = ب_{ن} أ^{ن} + ب_{ن-١} أ^{ن-١} + \ldots + ب_{١} أ + ب$$

أي أن : $\lim_{س \leftarrow أ} د(س) = د(أ)$

وعليه نقول :

نهاية دالة كثيرة حدود عند أي عدد تساوى قيمة دالة كثيرة الحدود عند ذلك العدد.

مثال (١-٣٠)

جد $\lim\limits_{س \to ٢} (س^{٤} - ٥ س^{٣} + س - ١)$

الحل :

$$\lim_{س \to ٢} (س^{٤} - ٥ س^{٣} + س - ١) = ٢^{٤} - ٥ \times ٢^{٣} + ٢ - ١ = - ٢٣$$

(٧) الخاصة السابعة :

إذا كان عند النقطة م نهاية $د_{١}$ موجودة ونهاية $د_{٢}$ موجودة ولا تساوي صفراً فإن :

$$\lim_{س \to م} \frac{د_{١}(س)}{د_{٢}(س)} = \frac{\lim\limits_{س \to م} د_{١}(س)}{\lim\limits_{س \to م} د_{٢}(س)} \quad ، \quad د_{٢}(س) \neq ٠$$

بعبارة أخرى :

نهاية خارج قسمة دالتين = خارج قسمة نهايتي الدالتين بشرط ألا يتضمن ذلك القسمة على الصفر

مثال (١-٣١)

جد $\lim\limits_{س \to ٤} \left(\frac{س^{٢} + ٥}{٢ س - ٣}\right)$

الحل :

بما أن : $\lim\limits_{س \to ٤} (س^{٢} + ٥) = \lim\limits_{س \to ٤} س^{٢} + ٥ = ٢١$

وأن : $\lim\limits_{س \to ٤} (٢ س - ٣) = \lim\limits_{س \to ٤} ٢ س - ٣ = ٥ \neq$ صفراً

فإن :

$$\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٢} + ٥}{٢ س - ٣} = \frac{\lim\limits_{س \to ٤} (س^{٢} + ٥)}{\lim\limits_{س \to ٤} (٢ س - ٣)} = \frac{٢١}{٥}$$

ملاحظـــة هـامـــة :

لا يجوز تطبيق الخاصة السابقة عندما تكون نهاية المقام صفراً. ففي مثال (١ ـ ١٨) مثلاً رأينا أن:

$$\lim_{س \leftarrow ٤} \frac{س^{٢} - ١٦}{س - ٤} = ٨$$

وهذه النتيجة لا يمكن التوصل إليها باستخدام الخاصة السابقة

لأن : $\lim_{س \leftarrow ٤} (س - ٤) = $ صفراً.

ولكـن يمكننـا القـول بأن :

$$\lim_{س \leftarrow ٤} \frac{س^{٢} - ١٦}{س - ٤} = \lim_{س \leftarrow ٤} \frac{(س - ٤)(س + ٤)}{(س - ٤)}$$

$$= \lim_{س \leftarrow ٤} (س + ٤) = ٨ .$$

وهنا قسمنا كلاً من البسط والمقام على المقدار (س − ٤) قبل أخذ النهاية. وذلـك ممكن بالـطبع لأن س − ٤ $\neq$ صفراً، رغم أنها قريبة من الصفر.

بتطبيق النظرية (١ ـ ٣) والخاصـة السابعـة يمكننا إيجـاد نهاية أي دالـة نسبية عنـدما تكـون الدالـة معرفة.

نظريـــة (١ ـ ٤)

إذا كانت د دالة نسبية بحيث :

$د(س) = \frac{د_{١}(س)}{د_{٢}(س)}$ ، حيث $د_{١}$، $د_{٢}$ كثيـرتـا حـدود، و م أي عـدد حقيقي بحيث

$د_{٢}(م) \neq$ صفراً

فإن : $\lim_{س \leftarrow م} د(س) = د(م)$.

ومعنى هذه النظرية أن أي دالة نسبية تكون نهايتها موجودة عند أي نقطة أ بشرط أن لا تكون أ من جذور المقام. ونهاية الدالة عند أ حينئذٍ تساوي قيمتها عند أ .

مثال (١-٣٢)

جد $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \left(\frac{٣ س^{٢} + ٧ س - ١}{س^{٢} - ٢} \right)$

الحل :

لأن $٢^{٢} - ٢ \neq$ صفراً، فإن :

$$\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \left(\frac{٣ س^{٢} + ٧ س - ١}{س^{٢} - ٢} \right) = \frac{٣ \times ٢^{٢} + ٧ \times ٢ - ١}{٢^{٢} - ٢} = \frac{٢٥}{٢}$$

(٨) الخاصـة الثامنـة :

إذا كانت د دالة لها نهاية عند أ وكان ن أي عدد صحيح موجب، فإن :

$$\lim\limits_{س \leftarrow أ} [\, د(س) \,]^{\frac{١}{ن}} = [\, \lim\limits_{س \leftarrow أ} د(س) \,]^{\frac{١}{ن}}$$

كلما كانت $[\, د(س) \,]^{\frac{١}{ن}}$ معرفـة

بعبـارة أخـرى :

نهاية الجذر النوني للدالة عند أ = الجذر النوني لنهاية الدالة عند أ، كلما كان الجذر النوني للدالة معرفاً.

والجذر النوني يكون معرفاً إذا كان ن عدداً فردياً أو إذا كان ن عدداً زوجياً وما بداخل الجذر غير سالب.

مثال (١-٣٣)

جد كلاً من النهايتين التاليتين :

(١) $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} \sqrt{٢ س + ٥}$

(٢) $\lim\limits_{س \leftarrow -١} \sqrt[٣]{س^{٢} + ٧ س - ٢}$

الحـــل :

(١) الدالة $\sqrt{٢س + ٥}$ معرفة وموجبة بالقرب من س = ٣

$$\Leftarrow \lim_{س \to ٣} \sqrt{٢س + ٥} = \sqrt{\lim_{س \to ٣} (٢س + ٥)} = \sqrt{١١}$$

(٢) بما أن الجذر التكعيبي معرف دوماً فإن :

$$\lim_{س \to -١} \sqrt[٣]{س^٢ + ٧س - ٢} = \sqrt[٣]{\lim_{س \to -١} (س^٢ + ٧س - ٢)}$$

$$= \sqrt[٣]{(-١)^٢ + ٧(-١) - ٢} = \sqrt[٣]{-٨} = -٢ \, .$$

مثال (١-٣٤)

جـد $\lim_{س \to ٢} (س^٢ + ٤)^{\frac{٢}{٣}}$

الحـــل :

رغم أن الخاصة الثامنة لا تنطبق مباشرة على هذا المثال إلا أن :

$(س^٢ + ٤)^{\frac{٢}{٣}} = \left(\sqrt[٣]{(س^٢ + ٤)}\right)^٢$ ولذا فإن

$$\lim_{س \to ٢} (س^٢ + ٤)^{\frac{٢}{٣}} = \lim_{س \to ٢} \left[\sqrt[٣]{(س^٢ + ٤)}\right]^٢$$

$$= \left[\lim_{س \to ٢} \sqrt[٣]{(س^٢ + ٤)}\right]^٢ = \left[\sqrt[٣]{\lim_{س \to ٢} (س^٢ + ٤)}\right]^٢$$

$$= \left[\sqrt[٣]{٨}\right]^٢ = ٢^٢ = ٤$$

ملاحظـــة :

كل الخواص التي ذكرناها للنهايات تظل صحيحة إذا استعضنا عن النهاية عند أ بالنهاية اليمنى عند أ أو النهاية اليسرى عند أ . فمثلاً :

$$\lim_{س \to أ^+} [د_١(س) * د_٢(س)] = \lim_{س \to أ^+} د_١(س) * \lim_{س \to أ^+} د_١(س)$$

حيث الرمز * يعني أياً من عمليات الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة مع ملاحظة أنه في حالة القسمة يشترط أن تكون :

$$\lim_{س \to ﻫ^+} د_٢(س) \neq ٠$$

وكذلك الحال بالنسبة للنهاية اليسرى عند ﻫ

تمارين (١ - ٣)

لكل من الدوال د (س) التالية، انظر في وجود النهاية اليمنى والنهاية اليسرى والنهاية عند ﻫ المبينة :

(١) د (س) = ٣ س + ٥ ، ﻫ = ٤

(٢) د (س) = س^{٢} + ٧ س ، ﻫ = - ٧

(٣) $د(س) = \frac{٥}{س}$ ، ﻫ = - ٥

(٤) $د(س) = \frac{س}{|س|}$ ، $ﻫ = \sqrt{٢}$

(٥) $د(س) = \frac{٢ س}{س^{٢} + ١}$ ، ﻫ = - ١

(٦) $د(س) = \frac{٣ - س}{س^{٢} - ٣}$ ، ﻫ = ٣

(٧) $د(س) = \frac{\sqrt{س^{٢} - ٥}}{س^{٢} + ١}$ ، ﻫ = - ٣

(٨) $د(س) = \frac{|س - ٥|}{٥ - س}$ ، ﻫ = ٥

(٩) $د(س) = \frac{|س - ٣|}{س^{٢} - ٩}$ ، ﻫ = ٣

(١٠) $د(س) = (س - ١)^{\frac{٣}{٥}}$ ، ﻫ = ٣٣

(١١) $د(س) = \frac{١ + س^{٢}}{س - ٤}$ ، ﻫ = ٤

(١٢) د (س) = $\begin{cases} ٢ س + ١ & \text{لقيم س} \geqslant ٢ ، \quad ﻫ = ٢ \\ ٧ - س & \text{لقيم س} < ٢ \end{cases}$

(١٣) د (س) = $\begin{cases} س^٢ - ٥ & \text{لقيم س} \leqslant ٣ ، \quad ﻫ = ٣ \\ \sqrt{س + ١٣} & \text{لقيم س} > ٣ \end{cases}$

(١٤) د (س) = $\begin{cases} س^٢ & \text{لقيم س} > ١ ، \quad ﻫ = ١ \\ ٣ - ٢ س & \text{لقيم س} < ١ \end{cases}$

١ ـ ٦ النهاية عندما يسعى المتغير إلى مالا نهاية

كثيراً ما نود دراسة سلوك دالة د (س) عندما تصبح قيم المتغير س كبيرة بلا حدود.

مثال (١-٣٥)

لتكن الدالة د معرفة بالقاعدة :

$$د (س) = ٢ + \frac{١}{س} \quad \text{لقيم س} \geqslant ١$$

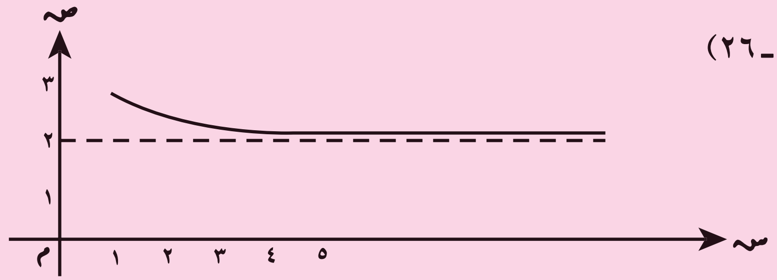
ادرس سلوك الدالة د عندما تكبر قيم س بلا حدود.

الحل :

ننظر إلى قيم د (س) عندما تتزايد قيم س. (انظر الجدول التالي وبيان الدالة د في شكل (١ - ٢٦))

س	١	٢	٥	١٠	١٠٠	١٠٠٠	$١٠^٤$	$١٠^٦$
د (س) = ٢ + $\frac{١}{س}$	٣	٢,٥	٢,٢	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢,٠٠٠١	٢,٠٠٠٠٠١

شكل (١ ـ ٢٦)



نلاحظ من الجدول ومن شكل (١ – ٢٦) أنه كلما كبرت قيم س فإن قيم د (س) تقترب أكثر وأكثر من العدد ٢ . ونعبر عن هذه الحقيقة بالرمز :

$$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \text{ د (س)} = ٢$$

وتقرأ نهاية د (س) عندما تسعى س إلى ما لا نهاية تساوي ٢ . أو تقول ـ اختصاراً ـ **إن نهاية د (س) عند مالا نهاية تساوي ٢ .**

والرمز س ⟵ ∞ يعني أنه مهما يكن العدد م كبيراً فإن س > م

وبالمثل فالرمز س ⟵ − ∞ أنه مهما يكن العدد السالب ك صغيراً فإن س < ك .

تعريـف (١ ـ ٤)

نقول إن الدالة د لها نهاية ل عندما تسعى س إلى ما لا نهاية إذا كانت قيم د (س) تقترب أكثر فأكثر من ل كلما صارت قيم س كبيرة بلا حدود.

ونرمـز لذلـك بـ :

$$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \text{ د (س)} = \text{ل}$$

كما نقول إن الدالة د لها نهاية ل عندما تسعى س إلى سالب ما لا نهاية إذا كانت قيم د (س) تقترب أكثر فأكثر من ل كلما صارت قيم س صغيرة (وسالبة) بلا حدود.

ونرمز لذلك بـ :

$$\underset{\text{س} \to -\infty}{\text{نهـا}} \text{ د (س)} = \text{ل}$$

مثال (١-٣٦)

جد $\lim_{س \to \infty} \frac{٣}{س^٢ + ٢}$.

الحل :

عندما تكبر قيم س بلا حدود فإن المقام أيضاً يكبر بلا حدود بينما البسط ثابت . لذا فإن المقدار

$\frac{٣}{س^٢ + ٢}$ يقترب أكثر فأكثر من الصفر .

إذن : $\lim_{س \to \infty} \frac{٣}{س^٢ + ٢}$ = صفراً .

مثال (١-٣٧)

جد $\lim_{س \to -\infty} (٣ س^٢)$

الحل :

عندما تصغر س بلا حدود آخذةً قيماً سالبة فإن المقدار ٣ $س^٢$ يكبر بـلا حدود ولـذا فلن يقترب من أي عددٍ حقيقي .

$\Leftarrow \lim_{س \to -\infty} (٣ س^٢) = \infty$.

ملاحظـــة :

كل خواص النهايات التي ذكرناها سابقاً تظل صحيحة إذا استبدلنا

$\lim_{س \to أ}$ د (س) : $\lim_{س \to \infty}$ د (س) ، أو : $\lim_{س \to -\infty}$ د (س)

بالإضافة إلى الخاصة التالية :

(٩) الخاصــة التاسعــة :

إذا كان أ ثابتاً و ن أي عدد صحيح موجب فإن :

$\lim_{س \to \infty} \frac{أ}{س^ن}$ = صفراً

وكذلك $\lim\limits_{س \to -\infty} \frac{أ}{س^ن}$ = صفراً

مثال (١-٣٨)

(١) جد $\lim\limits_{س \to \infty} \left(١ - \frac{٥}{س^٣} \right)$

(٢) جد $\lim\limits_{س \to -\infty} \left(\frac{٢}{س^٢} - ٣ \right)$

الحل :

(١) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(١ - \frac{٥}{س^٣} \right) = \lim\limits_{س \to \infty} ١ - \lim\limits_{س \to \infty} \frac{٥}{س^٣}$

$= ١ - ٠ = ١$

(٢) $\lim\limits_{س \to -\infty} \left(\frac{٢}{س^٢} - ٣ \right) = \lim\limits_{س \to -\infty} \frac{٢}{س^٢} - \lim\limits_{س \to -\infty} ٣$

$= ٠ - ٣ = -٣$

١ ـ ٧ طرائق حسابات النهايات

عند حساب نهايات بعض الدوال، كثيراً ما ينتج عن التعويض المباشر حالة من حالات عدم التعيين وهي الحالات التي تكون على إحدى الصيغ التالية ـ على سبيل المثال ـ :

$\frac{صفر}{صفر}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\infty - \infty$.

وفي الأمثلة التالية سنحاول علاج مثل هذه الحالات :

مثال (١-٣٩)

جد $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٢ - ٦س + ٥}{س^٢ - ١}$

الحل :

لتكن : د (س) = $\frac{س^٢ - ٦س + ٥}{س^٢ - ١}$

التعويض المباشر يعطينا د (١) = $\frac{صفر}{صفر}$ وهو شكل غير معين.

تكتب د (س) = $\frac{(س - ١)(س - ٥)}{(س - ١)(س + ١)}$ ، عندما س ≠ ١ .

⇐ د (س) = $\frac{س - ٥}{س + ١}$ عندما س ≠ ١ .

⇐ $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا}$ د (س) = $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا}$ $\frac{س - ٥}{س + ١}$ =

$$\frac{\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} (س - ٥)}{\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} (س + ١)} = \frac{-٤}{٢} = -٢$$

مثال (١-٤٠)

جد $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ $\frac{\sqrt{٢س + ٣} - ٣}{س - ٣}$

الحـل :

لتكن : د (س) = $\frac{\sqrt{٢س + ٣} - ٣}{س - ٣}$

التعويض المباشر ينتج عنه :

د (٣) = $\frac{\sqrt{٢ \times ٣ + ٣} - ٣}{٣ - ٣}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ (مقدار غير معين).

تكتب د (س) = $\frac{\sqrt{٢س + ٣} - ٣}{س - ٣} \times \frac{\sqrt{٢س + ٣} + ٣}{\sqrt{٢س + ٣} + ٣}$

= $\frac{(٢س + ٣) - ٩}{(س - ٣)(\sqrt{٢س + ٣} + ٣)}$ = $\frac{٢(س - ٣)}{(س - ٣)(\sqrt{٢س + ٣} + ٣)}$ حيث س ≠ ٣

⇐ د (س) = $\frac{٢}{\sqrt{٢س + ٣} + ٣}$ حيث س ≠ ٣

$$\Leftarrow \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ د(س) = \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{٢}{(\sqrt{٢س + ٣} + ٣)}$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}(٢س + ٣)} + ٣} = \frac{٢}{\sqrt{٩} + ٣} = \frac{٢}{٣ + ٣} = \frac{١}{٣}$$

نهاية الدوال النسبية عندما تسعى س إلى ما لا نهاية :

مثال (١-٤١)

جد $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥س^٢ + ٢س - ١}{٣س^٢ + ٥س + ٩}$

الحـل :

تكتب $د(س) = \frac{٥س^٢ + ٢س - ١}{٣س^٢ + ٥س + ٩}$

وبقسمه كلٍ من البسط والمقام على $س^٢$ فإن :

$$د(س) = \frac{٥ + \frac{٢}{س} - \frac{١}{س^٢}}{٣ + \frac{٥}{س} + \frac{٩}{س^٢}}$$

$$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}\ د(س) = \frac{\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}\left(٥ + \frac{٢}{س} - \frac{١}{س^٢}\right)}{\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}\left(٣ + \frac{٥}{س} + \frac{٩}{س^٢}\right)}$$

$$= \frac{٥ + ٠ - ٠}{٣ + ٠ + ٠} = \frac{٥}{٣} .$$

وأيضاً : $\underset{س \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}}\ د(س) = \frac{٥}{٣}$ (علل ذلك)

مثال (١-٤٢)

جد $\underset{س \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}} \frac{١ - ٣س}{س^٢ + ٧}$

الحـــل :

تكتب د (س) = $\frac{١ - ٣ س}{س^٢ + ٧}$

$= \frac{\frac{١}{س^٢} - \frac{٣}{س}}{١ + \frac{٧}{س^٢}}$ (بقسمة البسط والمقام على $س^٢$).

$\lim\limits_{س \leftarrow -\infty}$ د (س) $= \frac{\lim\limits_{س \leftarrow -\infty} (\frac{١}{س^٢} - \frac{٣}{س})}{\lim\limits_{س \leftarrow -\infty} (١ + \frac{٧}{س^٢})}$

$= \frac{٠ - ٠}{١ + ٠} = ٠$

وأيضاً : $\lim\limits_{س \leftarrow \infty}$ د (س) = ٠ (علّل ذلك)

مثال (١-٤٣)

جـد $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} \frac{٢ س^٤ - ٣ س}{س^٣ + ٥ س^٢}$

الحـــل :

تكتب د (س) = $\frac{٢ س^٤ - ٣ س}{س^٣ + ٥ س^٢}$

د (س) $= \frac{٢ س - \frac{٣}{س^٢}}{١ + \frac{٥}{س}}$ (بقسمة البسط والمقام على $س^٣$).

وعندما س ← ∞ فإن : المقام ← ١ ، بينما : البسط ← ∞

$\Leftarrow \lim\limits_{س \leftarrow \infty}$ د (س) = ∞ .

بالرجوع الأمثلة (١ ـ ٤١)، (١ ـ ٤٢)، (١ ـ ٤٣) نستطيع أن نستخلص القاعدة التالية

إذا كان لدينا دالة قياسية د (س) = $\frac{ر (س)}{ع (س)}$

حيث كل من $ر(س)$ و $ع(س)$ كثيرة حدود، فإنه :

(١) إذا كانت درجة $ر(س)$ < درجة $ع(س)$

فإن $\lim_{س \to \infty} \frac{ر(س)}{ع(س)} = \lim_{س \to -\infty} \frac{ر(س)}{ع(س)} =$ صفراً

(٢) إذا كانت درجة $ر(س)$ = درجة $ع(س)$ = $ن$

فإن $\lim_{س \to \infty} \frac{ر(س)}{ع(س)} = \lim_{س \to -\infty} \frac{ر(س)}{ع(س)}$

$$= \frac{\text{معامل } س^{ن} \text{ في الدالة } ر(س)}{\text{معامل } س^{ن} \text{ في الدالة } ع(س)}$$

(٣) إذا كانت درجة $ر(س)$ > درجة $ع(س)$

فإن $\lim_{س \to \infty} \frac{ر(س)}{ع(س)} = \infty$.

مثال (١-٤٤)

أوجـــد

(أ) $\lim_{س \to \pm\infty} \frac{س + ١}{س^{٢} + ٤}$ (ب) $\lim_{س \to \pm\infty} \frac{٣س^{٢} - ١}{٢س^{٢} + ١}$

(جـ) $\lim_{س \to \pm\infty} \frac{س^{٣} + ١}{س + ٢}$

الحـــل :

(أ) درجة البسط < درجة المقام ⇐ $\lim_{س \to \pm\infty} \frac{س + ١}{س^{٢} + ٤} = ٠$

(ب) درجة البسط = درجة المقام ⇐ $\lim_{س \to \pm\infty} \frac{٣س^{٢} - ١}{٢س^{٢} + ١} = \frac{٣}{٢}$

(جـ) درجة البسط > درجة المقام ⇐ $\lim_{|س| \to \infty} \frac{س^{٣} + ١}{س + ٢} = \infty$

وإذا أردنا معرفة هذه النهاية من حيث كونها $+\infty$ أم $-\infty$ نلاحظ أن :

$$\frac{س^3+1}{س+2} = \frac{س^2+\frac{1}{س}}{1+\frac{2}{س}}$$ (قسمنا البسط والمقام على س)

فتكون : $\lim_{س \to \pm\infty} \frac{س^3+1}{س+2} = \lim_{س \to \pm\infty} س^2 = \infty$

لأن : $\lim_{س \to \pm\infty} \frac{1}{س} = 0$ ، $\lim_{س \to \pm\infty} \frac{2}{س} = 0$

مثال (١-٤٥)

جد $\lim_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^2+3} - س \right)$

الحـل :

(هذه على الصيغة : $\infty - \infty$) .

تكتب $د(س) = \sqrt{س^2+3} - س$

$$= \left(\sqrt{س^2+3} - س \right) \times \frac{\left(\sqrt{س^2+3}+س\right)}{\left(\sqrt{س^2+3}+س\right)}$$

(بضرب كلٍ من البسط والمقام في المرافق) .

$$\Leftarrow د(س) = \frac{(س^2+3) - س^2}{\sqrt{س^2+3}+س} = \frac{3}{\sqrt{س^2+3}+س}$$

$$\Leftarrow \lim_{س \to \infty} د(س) = \lim_{س \to \infty} \left(\frac{3}{\sqrt{س^2+3}+س} \right)$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{3}{\left(\sqrt{س^2+3}+س\right)}$$ = صفراً .

مثال (١-٤٦)

جد $\lim\limits_{س \to ٠^+} \left(\frac{١}{س} - \frac{١}{س^٢} \right)$

الحـل :

هذه على الصيغة ∞ - ∞

نكتب د (س) = $\frac{١}{س} - \frac{١}{س^٢} = \frac{١}{س^٢}$ (س - ١)

وعندما س ← ٠⁺ فإن (س - ١) ← - ١

بينما $\frac{١}{س^٢}$ ← ∞

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ٠^+}$ د (س) = - ∞

مثال (١-٤٧)

جـد $\lim\limits_{س \to -\infty}$ د (س) إذا كانت د (س) = $\frac{\sqrt{س^٢ + ١}}{٢ س - ٥}$.

الحـل :

بقسمة البسط والمقام على $\sqrt{س^٢}$ = |س| = - س

د (س) = $\frac{\sqrt{١ + \frac{١}{س^٢}}}{- ٢ + \frac{٥}{س}}$

$\lim\limits_{س \to -\infty}$ د (س) = $\frac{\lim\limits_{س \to -\infty} \sqrt{١ + \frac{١}{س^٢}}}{\lim\limits_{س \to -\infty} (- ٢ + \frac{٥}{س})} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{س \to -\infty} (١ + \frac{١}{س^٢})}}{- ٢} = - \frac{١}{٢}$

تمارين (١ ـ ٤)

احسب النهايات التالية إن كانت موجودة :

(١) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٥}{س - ١٢}$

(٢) $\lim\limits_{س \to -\infty} \frac{٣}{١ - س}$

(٣) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(١ + \frac{١}{س} + \frac{١}{س^{٢}} \right)$

(٤) $\lim\limits_{س \to -\infty} \left(٢ س + ١ - \frac{١}{س} \right)$

احسب النهايات التالية إن كانت موجودة :

(٥) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$

(٦) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س^{٢} - ٤}$

(٧) $\lim\limits_{س \to -١} \frac{س^{٣} + ١}{س + ١}$

(٨) $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{س^{٢} - ٢ س - ٨}{س^{٢} - ١٦}$

(٩) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٢ س} - ٢}{س^{٢} - ٤}$

(١٠) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{(٢ - س)}{\sqrt{س + ٢} - ٢}$

(١١) $\lim\limits_{س \to ٩} \frac{٣ - \sqrt{س}}{س - ٩}$

لكل من الدوال د (س) التالية احسب $\lim\limits_{س \to \infty}$ د (س) و $\lim\limits_{س \to -\infty}$ د (س)،

إن كانتا موجودتين :

(١٢) $د (س) = \frac{٢ س^{٢} + س - ١}{٣ س^{٢} - ١٠ س + ٧}$

(١٣) $د(س) = \frac{٦ س + ٧}{٨ س^٣ + ٥}$

(١٤) $د(س) = \frac{س^٦}{٥ س^٥ + ١٣ س^٤ + س^٣ - ١}$

(١٥) $د(س) = \frac{١ - س^٤}{٢ س^٤ + ٣ س^٣ - ٥ س + ٢}$

(١٦) $د(س) = \frac{٥ س - ٣}{\sqrt{س^٢ + ١٢}}$

(١٧) $د(س) = \frac{٢ س - ٥}{\sqrt{٣ - س^٢}}$

(١٨) $د(س) = \frac{|س - ٢|}{س + ٣}$

(١٩) $د(س) = \left(\frac{٣ س^٢}{س - ١} - \frac{٦ س^٢}{٢ س - ١} \right)$

الخلاصـة :

في هذا الباب :

(١) راجعنا الأعداد الحقيقية والفترات الحقيقية والقيمة المطلقة .

(٢) استعرضنا بعض الدوال الحقيقية التي نستخدمها كثيراً مثل الدوالة الثابتة ودالة المطابقة ودالة الدرجة الأولى ودالة الدرجة الثانية ودالة كثيرة الحدود، والدوال النسبية، ودالة القيمة المطلقة ودالة الجزء الصحيح ، والدوال الزوجية والفردية والدوالة المحدودة، وإشارة المقدار ثلاثي الحدود .

(٣) قدمنا مفهوم نهاية الدالة عند نقطة والنهاية اليمنى والنهاية اليسرى . ورأينا أن نهاية الدالة عند نقطة تكون موجودة إذا وفقط إذا كانت كل من نهايتيها اليمنى واليسرى عند تلك النقطة موجودة وكانتا متساويتين .

(٤) تعرَّفنا على نهاية الدالة عندما يسعى متغيرها إلى $\pm \infty$. وكذلك عندما تكون نهاية الدالة هي ∞ أو $-\infty$.

(٥) درسنا خواص النهايات والتي يمكن تلخيصها بمايلي :

(أ) نهــــا (د١ ★ د٢) (س) = (نهــــا د١) ★ (نهــــا د٢)

(ب) نهــــا (دᐢ (س)) = [نهــــا د (س)]ᐢ

(حـ) نهــــا ᐢ√ د (س) = ᐢ√ نهــــا د (س)

حيث نهـا قد تعني النهاية أو النهاية اليمنى أو اليسرى عند نقطة ما أو قد تعني

نهــــا س ← ∞ أو نهــــا س ← - ∞

حيث الرمز ★ يرمز لأي من عمليات الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمه (مع اجتنـاب القسمة على الصفر) و ᐢ عدد صحيح موجب.

(٦) ثم درسنـا بعض طرائق تعييـن النهايـات وذلك في الحـالات التي ينتج عن التعـويض المبـاشر إحدى أشكال عدم التعيين مثل :

$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$.

تـمـاريـن عامـة

لكل من الدوال د (س) التالية عين النهاية اليمنى والنهاية اليسرى والنهاية، إن كانت موجودة، عند النقطة أ المبينة :

(١) د (س) = ٤ س^{٢} + س - ١ ، أ = ٥

(٢) د (س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ١}{\text{س} + ٣}$ ، أ = ٢

(٣) د (س) = $\frac{٢\,\text{س}}{١ + \text{س}^{٢}}$ ، أ = - ١

(٤) د (س) = $\frac{٢\,\text{س}}{١ - \text{س}^{٢}}$ ، أ = - ١

(٥) د (س) = $\frac{|\text{س} - ٦|}{٦ - \text{س}}$ ، أ = ٦

(٦) $د(س) = \frac{|س + ٢|}{س^٢ - ٤}$ ، $أ = -٢$

(٧) $د(س) = (٢س + ٢)^{\frac{٤}{٣}}$ ، $أ = ٣$

(٨) $د(س) = \begin{cases} ٤س - ٥ \text{ ، لقيم } س \geqslant ١ \\ س^٢ - ١ \text{ ، لقيم } س < ١ \end{cases}$ $أ = ١$

(٩) $د(س) = \begin{cases} س^٢ - ١ \text{ ، لقيم } س < ٢ \\ \sqrt{١٣ - ٢س} \text{ ، لقيم } س \geqslant ٢ \end{cases}$ $أ = ٢$

احسب النهايات التالية، إن كانت موجودة :

(١٠) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٤}{س + ١}$ (١١) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{١}{١ - س}$

(١٢) $\lim\limits_{س \to -\infty} \left(١ + \frac{٣}{س} + \frac{٥}{س^٣}\right)$

(١٣) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(٢س + \frac{١}{٢س}\right)$

(١٤) $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٢٥}{س - ٥}$

(١٥) $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{س - ٥}{س^٢ - ٢٥}$

(١٦) $\lim\limits_{س \to -٣} \frac{س^٣ + ٢٧}{س + ٣}$

(١٧) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{س}{\sqrt{٩ + س} - ٣}$

(١٨) $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \dfrac{\sqrt{٣ س} - \sqrt{٣}}{س - ١}$

لكل من الدوال د (س) التالية احسب $\lim\limits_{س \leftarrow \infty}$ د (س) و $\lim\limits_{س \leftarrow -\infty}$ د (س)،

إن كانتا موجودتين :

(١٩) د (س) = $\dfrac{٥ س + ٣ س^{٢}}{٢ س + ١}$

(٢٠) د (س) = $\dfrac{٣ س + ٢١}{س^{٥} - ١}$

(٢١) د (س) = $\dfrac{٢ س + س^{٢} + ٢ س^{٣}}{١ + ٥س + ٣ س^{٣}}$

(٢٢) د (س) = $\dfrac{٢ س + ٧}{\sqrt{س^{٢} - ٥ س + ١}}$

(٢٣) د (س) = $\dfrac{|س + ٧|}{س - ٢}$

(٢٤) د (س) = $\dfrac{س - ٣}{\sqrt{٣ - س^{٢}}}$

الباب الثاني

اتصال الدوال

الباب الثاني

اتصال الدوال

٢ ـ ١ تمهيد

سندرس الآن طائفة من الدوال ذات أهمية بالغة وهي الدوال المتصلة. والدالة المتصلة على فترة حقيقية تتميز هندسياً بأننا نستطيع رسم بيانها بصورة غير متقطعة ـ أي دون رفع القلم عن الورقة.

في المثال (١ ـ ١٨) نلاحظ من الشكل (١ ـ ٢١) أن بيان الدالة $\frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$ به «ثغرة» (الدائرة المفرغة) عند النقطة س = ٤ وذلك لأن الدالة غير معرفة عند س = ٤ . ولرسم بيان الدالة نضطر للتوقف عند تلك النقطة ثم معاودة الرسم بعدها.

فالدالة $\frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$ إذن غير متصله عند النقطة س = ٤

ونستطيع أن نقول مسبقاً إن هذه الدالة تصبح متصلة فيها لو أعدنا تعريفها بالشكل التالي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤} & \text{عندما } س \neq ٤ \\ ٨ & \text{عندما } س = ٤ \end{cases}$$

وفي المثال (١ ـ ٢٠) نلاحظ من الشكل (١ ـ ٢٣) أن بيان الدالة «يقفز» عند النقطة س = ١ وذلك لأن نهاية الدالة عند تلك النقطة غير موجودة وبيان الدالة كما هو واضح من الشكل (١ ـ ٢٣) يتكون من جزءين منفصلين . فالدالة إذن غير متصلة عن س = ١

وفى المثال التالى (٢ ـ ١) نرى دالة معرفة عند نقطة معينه (س = ٤) ونهايتها موجودة عند تلك النقطة ولكن اختلاف النهاية عن قيمة الدالة عند تلك النقطة يحول دون اتصالها هنالك.

مثال (٢ ـ ١):

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤} & \text{عندما } س \neq ٤ \\ ٥ & \text{عندما } س = ٤ \end{cases}$$

$$د(س) = \frac{س^2 - 16}{س - 4} = \frac{(س - 4)(س + 4)}{(س - 4)} = س + 4$$

عندما $س \neq 4$

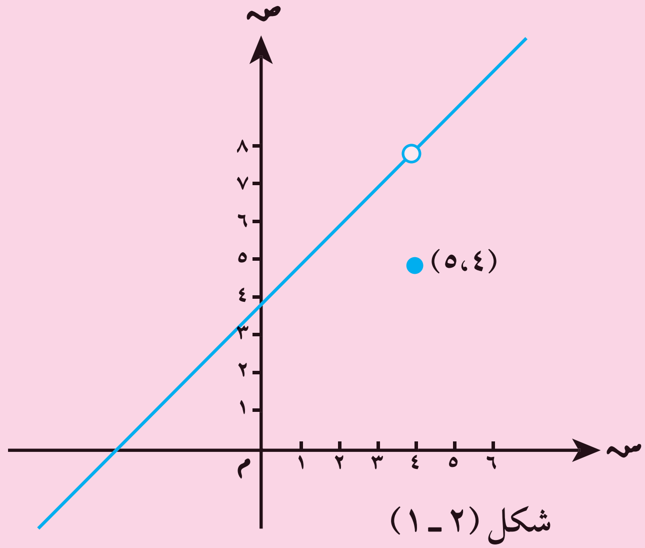
إذن يمكننا كتابة د (س) على النحو التالي:

$$د(س) = \begin{cases} س + 4 & \text{عندما } س \neq 4 \\ 5 & \text{عندما } س = 4 \end{cases}$$

وبيان د (س) مبين في الشكل (٢ ـ ١)

$$\lim_{س \to 4} د(س) = \lim_{س \to 4} (س + 4) = 8$$

بينما $د(4) = 5$



شكل (٢ ـ ١)

٢ ـ ٢ الدوال المتصلة عند نقطة

سنورد فيمايلي تعريف الدالة المتصله عند نقطة:

تعريف (٢ ـ ١):

لتكن الدالة د معرفة على فترة مفتوحة ف. نقول إن د متصلة عند أ إذا تحقق:

(١) د معرفة عند أ

(٢) $\lim_{س \to أ} د(س)$ موجودة

(٣) $\lim_{س \to أ} د(س) = د(أ)$

ونقول إن الدالة د متصلة إذا كانت متصلة عند كل نقطة من نقاط مجموعة تعريفها.

ملاحظة :

إذا كانت ف = [أ ، ب] فترة مغلقة فاتصال الدالة د عند أ يعني :

$$\lim_{س \leftarrow أ^+} د(س) = د(أ)$$

واتصالها عند ب يعني :

$$\lim_{س \leftarrow ب^-} د(س) = د(ب) .$$

إذا اختل أي شرط من شروط الاتصال الثلاثة الواردة في التعريف (٢ ـ ١) فإننا نقول إن الدالة غير متصله عند أ أو إن النقطة أ، نقطة عدم اتصال (انقطاع) للدالة د .

مثال (٢–٢)

اثبت ان كلاّ من الدالتين التاليتين متصلة عند كل عدد حقيقي :

(١) $د_١$ (س) = ث حيث ث ثابت

(٢) $د_٢$ (س) = س

الحل :

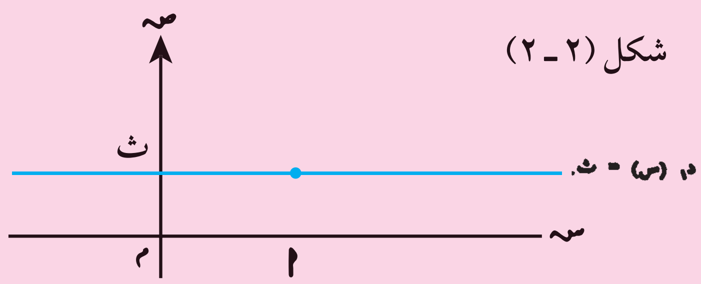
لكل أ ∈ ح فإن :

(١) $د_١$ (أ) = ث

(٢) $\lim_{س \leftarrow أ} د_١(س)$ موجودة

(٣) $\lim_{س \leftarrow أ} د_١(س) = ث = د_١(أ)$

⇐ $د_١$ متصله عند أ، لكل أ ∈ ح (انظر الشكل (٢ ـ ٢))



شكل (٢ ـ ٢)

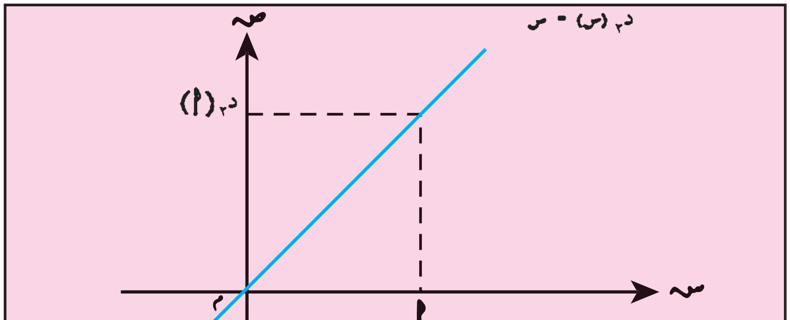
(٢) لكل $ء \in$ ح فإن :

(١) $د_٢ (ء) = ء$

(٢) $\lim\limits_{س \leftarrow ء}$ $د_٢$ (س) موجودة

(٣) $\lim\limits_{س \leftarrow ء}$ $د_٢$ (س) $= ء = د_٢ (ء)$

$\Leftarrow$ $د_٢$ متصلة لكل $ء \in$ ح (انظر الشكل (٢ ـ ٣))



شكل (٢ ـ ٣)

٢ ـ ٣ خواص الدوال المتصلة

بما أن تعريف الاتصال يعتمد كلياً على تعريف النهاية فإن الدوال المتصلة لها خواص شبيهة بخواص النهايات وتنتج عنها مباشرة:

(١) الخاصة الأولى:

إذا كانت الدالتان $د_١$ و $د_٢$ متصلتين عند س = ء فإن كلّاً من الدوال التالية تكون متصلة عند س = ء:

(١) $د_١ + د_٢$.

(٢) $د_١ - د_٢$.

(٣) $د_١ \times د_٢$.

بعبارة أخرى مجموع دالتين متصلتين والفرق بينهما وحاصل ضربهما تكون دوال متصلة. ويمكن تعميم هذه الخاصة لمجموع أو حاصل ضرب أي عدد منته من الدوال، فإذا كانت الدوال $د_١$ ، $د_٢$ ، . . . ، $د_ر$ متصلة عند ء فإن الدالتين

$د_1 + د_2 + \ldots + د_ن$

و $د_1 \times د_2 \times \ldots \times د_ن$

تكونان أيضاً متصلتين عند $ء$.

وبوضع $د_1 = د_2 = \ldots = د_ن$ فإنه يتبع أيضاً:

(٢) الخاصة الثانية:

إذا كانت الدالة د متصلة عند س = ء و ن أي عدد صحيح موجب فإن الدالة $د^ن$ التي قاعدتها:

$د^ن (س) = [د (س)]^ن$ تكون متصله عند س = ء.

(٣) الخاصة الثالثة:

إذا كانت الدالتان $د_1$ و $د_2$ متصلتين عند س = ء وكانت $د_2 (ء) \neq$ صفر فإن خارج القسمة

$$\frac{د_1 (س)}{د_2 (س)}$$

دالة متصلة (عند النقاط التي لا تجعل المقام صفراً).

(٤) الخاصة الرابعة:

إذا كانت الدالة د متصلة عند س = ء والعدد ن أي عدد صحيح موجب فإن الدالة $\sqrt[ن]{د (س)}$ تكون أيضاً متصلة عند س = ء، بشرط أن تكون الدالة $\sqrt[ن]{د (س)}$ معرّفة عند العدد ء.

بعبارة أخرى: الجذر النوني لدالة متصلة يكون دالة متصلة، كلما كان الجذر النوي معرّفاً.

مثال (٢-٣)

أثبت أن الدالة: د (س) = $س^2 + ٣ س - ١$ متصلة عند كل قيمة من قيم س.

الحـــل:

الدالة د (س) هي مجموع الحدود الثلاثة $س^2$، ٣س، -١ وكل حد منها هو دالة متصله لكل قيم س. ومجموع الدوال المتصله يكون دالة متصلة. إذن د (س) متصلة لكل قيم س

المثـال (٢ - ٣) هو حالة خاصة من النظرية التالية:

نظـرية (٢ - ١):
دالة كثيرة الحدود متصلة لكل الأعداد.

والنظرية (٢ ـ ١) تنتج عن النظرية (١ ـ ٢) والتي تنص على أن نهاية دالة كثيرة الحدود عند أي عدد تكون موجودة وتساوي قيمة الدالة عند ذلك العدد.

مثال (٢-٤)

أثبت أن الدالة د (س) = $\frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} + ٢}$ متصلة لكل الاعداد

الحـــل :

كل من بسط ومقام الدالة د (س) كثيرة حدود وبالتالي متصلة لكل الأعداد [نظرية (٢ ـ ١)].

وبما أن المقام س^{٢} + ٢ $\neq$ صفراً لأي عدد س ، فينتج عن الخاصة الثالثة أن:

د (س) = $\frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} + ٢}$ متصلة لكل الأعداد.

والمثال (٢ ـ ٤) هو حالة خاصة من النظرية التالية :

نظريـــة (٢ ـ ٢)

كل دالة نسبية د (س) = $\frac{\text{د}_{١}\ (\text{س})}{\text{د}_{٢}\ (\text{س})}$ (حيث أن كلاً من د$_{١}$ و د$_{٢}$ كثيرة حدود) تكون متصلة لكـل الأعداد، عدا تلك التي تجعل المقام د$_{٢}$ (س) = صفراً.

ونظرية (٢ ـ ٢) تنتج مباشرة عن نظرية (١ ـ ٣)

مثال (٢-٥)

ناقش اتصال كلٍ من الدالتين :

(١) د$_{١}$ (س) = ٥ س^{٣} + ٤ س^{٤} + س^{٥}

(٢) د$_{٢}$ (س) = $\frac{٢\text{س}^{٢} - ٧}{٢\text{س}^{٢} + ٥}$

الحـــل :

(١) د$_{١}$ (س) متصلة لكل الأعداد لأنها كثيرة حدود.

(٢) د$_{٢}$ (س) دالة نسبية فتكون متصلة لكل الأعداد عدا تلك التي تحقق :

٢ س^٢ + ٥ = صفراً.

ولكن ٢ س^٢ + ٥ $\neq$ صفراً لأي عدد س.

$\Leftarrow$ د$_٢$ (س) متصلة لكل الأعداد.

مثال (٢-٦)

ناقش اتصال كلٍ من الدالتين :

(١) د$_١$ (س) = $\dfrac{٢ س + ١}{س^٢ - ٤}$

(٢) د$_٢$ (س) = $\begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٤}{س - ٢} & \text{عند س} \neq ٢ \\ ٤ & \text{عندما س} = ٢ \end{cases}$

الحــل :

(١) د$_١$ (س) دالة نسبية فهي إذن متصلة لكل س بحيث :

س^٢ − ٤ $\neq$ صفراً

ولكن س^٢ − ٤ = صفراً عندما س = ٢ أو س = − ٢ .

$\Leftarrow$ د$_١$ متصلة لكل س $\in$ ح − {٢ ، − ٢} .

(٢) د$_٢$ معرفة لكل قيم س $\in$ ح. إذا كانت س $\neq$ ٢

فإن الدالة د$_٢$ (س) = $\dfrac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ تكون متصلة لأن المقام $\neq$ صفراً.

أما إذا كانت س = ٢ فإن :

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٢)}$$

$$= \lim_{س \to ٢} (س + ٢) = ٤$$

وكذلك د$_٢$ (٢) = ٤

$\Leftarrow$ $\lim_{س \to ٢}$ د$_٢$ (س) = د$_٢$ (٢) $\Leftarrow$ د$_٢$ متصلة عند س = ٢

⇐ $د_1$ متصلة لكل الأعداد الحقيقيـــة .

مثال (٢-٧)

ناقش اتصال الدالتين :

(١) $د_1$ (س) = $\sqrt{٥س^٢ + ١٧}$

(٢) $د_2$ (س) = $\sqrt[٣]{٢ س - ١}$

الحـــل :

(١) المقدار ٥ س^٢ + ١٧ > ٠ لكل قيم س

⇐ $د_1$ (س) معرفة لكل قيم س .

وبما أن ٥ س^٢ + ١٧ كثيرة حدود فهي متصلة لكل قيم س،

⇐ ينتج عن الخاصة الرابعة أن $د_1$ متصلة لكل قيم س .

(٢) الدالة $د_2$ معرفة لكل قيم س لأنها دالة جذر فردي . كما وأن ما تحت الجـذر دالة كثيـرة حدود فهي إذن متصلة لكل س .

⇐ $د_2$ متصلة لكل الأعداد .

مثال (٢-٨)

ناقش اتصال كلٍ من الدالتين :

(١) $د_1$ (س) = | ٥ س - ٧ |

(٢) $د_2$ (س) = $\frac{س}{|س|}$

الحـــل :

(١) $د_1$ (س) = $\begin{cases} ٥ س - ٧ & \text{لقيم } ٥ س - ٧ \geq ٠ . \\ -(٥ س - ٧) & \text{لقيم } ٥ س - ٧ < ٠ . \end{cases}$ = $\begin{cases} ٥ س - ٧ \text{ ، لقم س } \geq \frac{٧}{٥} \\ - ٥ س + ٧ \text{ ، لقيم س } < \frac{٧}{٥} \end{cases}$

إذا كان أ > $\frac{٧}{٥}$ فإن :

$\underset{س \leftarrow أ}{نهـــا}$ $د_1$ (س) = $\underset{س \leftarrow أ}{نهـــا}$ (٥ س - ٧) = ٥ أ - ٧ = د (أ)

$\Leftarrow$ د$_1$ متصلة لكل $\text{م} > \frac{٧}{٥}$

وإذا كان $\text{م} < \frac{٧}{٥}$ فإن :

$$\lim_{\text{س} \to \text{م}} \text{د}_1(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to \text{م}} (-٥\,\text{س} + ٧) = -٥\,\text{م} + ٧ = \text{د}(\text{م})$$

$\Leftarrow$ د$_1$ متصلة لكل $\text{م} < \frac{٧}{٥}$.

أما عند $\text{م} = \frac{٧}{٥}$ فإن $\text{د}_1(\text{م}) = $ صفراً، و :

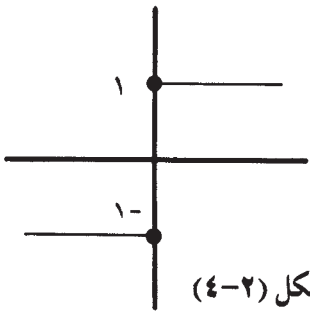
$$\lim_{\text{س} \to \frac{٧}{٥}^{+}} \text{د}_1(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to \frac{٧}{٥}^{+}} (٥\,\text{س} - ٧) = \frac{٥ \times ٧}{٥} - ٧ = \text{صفراً}.$$

و
$$\lim_{\text{س} \to \frac{٧}{٥}^{-}} \text{د}_1(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to \frac{٧}{٥}^{-}} (-٥\,\text{س} + ٧) = -\frac{٥ \times ٧}{٥} + ٧ = \text{صفراً}.$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to \frac{٧}{٥}} \text{د}_1(\text{س}) = \text{صفراً} = \text{د}_1\left(\frac{٧}{٥}\right)$$

$\Leftarrow$ د$_1$ متصلة عند $\frac{٧}{٥}$ وبالتالي فهي متصلة لكل الأعداد .

(٢) $\text{د}_2(\text{س}) = \begin{cases} ١ & \text{إذا كان س} > ٠ \\ -١ & \text{إذا كان س} < ٠ \end{cases}$



شكل (٢-٤)

د$_2$ غير معرفة عند الصفر $\Leftarrow$ د$_2$ ليست متصلة عند الصفر . وكذلك نهاية د$_2$ غير موجودة عند الصفر وعليه فكيفما عرفنا د$_2$ عند الصفر فلن تكون متصلة عند الصفر .

أما عند النقاط الأخرى ـ المختلفة عن الصفر ـ فإن الدالة ثابتة وبالتالي فهي متصلة لكل الأعداد التي لا تساوي صفراً .

تمارين (٢ - ١)

ناقش اتصال الدوال التالية :

(١) $\text{د}(\text{س}) = ٩١\,\text{س}^{٥} - ١٣\,\text{س}^{٢} + ١$

(٢) $\text{د}(\text{س}) = ١ - ١٣\,\text{س} + \text{س}^{٢}$

(٣) $د(س) = \frac{٧س^٢ - ٢س + ١}{٢س^٢ + ٥}$

(٤) $د(س) = \frac{٣س - ١}{٣س + ١}$

(٥) $د(س) = \frac{\sqrt[٣]{٢س - س^٢}}{س - ٣}$

(٦) $د(س) = |٢س + ٦|$

ابحث اتصال الدوال التالية عند النقطة المبينة :

(٧) $د(س) = \begin{cases} س + ٣ \text{ ، عندما } س \geqslant ٠ \\ ٣ - س \text{ ، عندما } س < ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

(٨) $د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} & \text{عندما } س \neq ٣ \\ ٥ & \text{عندما } س = ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

(٩) $د(س) = \begin{cases} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣} & \text{عندما } س \neq ٣ \\ ٢ & \text{عندما } س = ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

عرّف الدوال التالية عند النقطة المبينة حتى تصبح متصلة :

(١٠) $د(س) = \frac{س^٣ - ٢٧}{س - ٣}$ عند س = ٣

(١١) $د(س) = \frac{س^٢ + ٥س - ٦}{س - ١}$ عند س = ١

(١٢) $د(س) = \frac{\sqrt{٢س + ٣} - ٣}{س - ٣}$ عند س = ٣

٢ ـ ٤ خواص الدوال المتصلة على فترة مغلقة

فيما يلي سنفترض أن لدينا دالة د متصلة على فترة مغلقة ف بالاضافة إلى الخواص السابقة فلدينا الخاصتان التاليتان :

(٥) الخاصـــة الخامســـة :

إذا كانت $ص_١$ و $ص_٢$ قيمتين مختلفتين ($ص_١ < ص_٢$) تأخذهما الدالة على الفترة المغلقة ف فإن د تأخذ كل القيم الواقعة بين $ص_١$ و $ص_٢$.

أي أنه لكل ص بحيث $ص_١ < ص < ص_٢$ فإنه توجد على الأقل قيمة واحدة س ∈ ف بحيث ص = د (س) .

بمعنى آخر أن الدالة المتصلة لا تستطيع أن « تقفز » من قيمة إلى قيمة أخرى ـ بل لابد أن تأخذ كل القيم الواقعة بين هاتين القمتين .

وكنتيجة لهذه الخاصة إذا كانت د متصلة على الفترة المغلقة [أ ، ب] وكانت أشارتا د (أ) و د (ب) مختلفتين فإن هناك نقطة واحدة على الأقل حـ ، أ < حـ < ب بحيث د (حـ) = صفراً .

وذلك لأن الصفر يقع بين د (أ) و د (ب)

(٦) الخاصـــة السادســـة :

إذا كانت الدالة د متصلة على فترة مغلقة ف فإن د تأخذ كلاً من قيمتهـا العظمى وقيمتهـا الصغرى على ف .

أي أنه إذا كانت ك القيمه العظمى للدالـة د على ف (ك ≥ د (س) لكـل س ∈ ف)، وكانت ل القيمـة الصغرى للدالـة د على ف (ل ≤ د (س) لكـل س ∈ ف)، تـوجـد نقـطة واحـدة عـلى الأقـل $س_١$ ∈ ف بحيث :

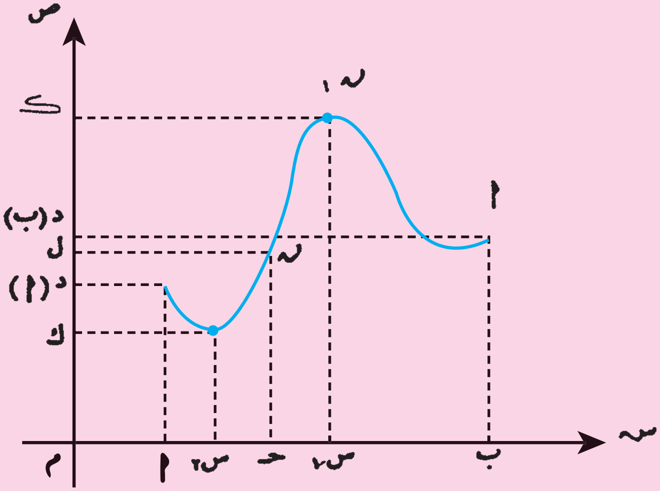
$$د (س_١) = ك$$

ونقطة واحدة على الأقل $س_٢$ ∈ ف بحيث :

$$د (س_٢) = ل .$$

ونتيجة لهذه الخاصة فإنه إذا كانت د دالة متصلة على فترة مغلقة فإنها تكون محدودة في تلك الفترة .

الشكل (٢ ـ ٥) يوضح هاتين الخاصتين .



شكل (٢ ـ ٥)

مثال (٢-٩)

الدالة د (س) = ٢ س^{٢} متصلة على الفترة [- ١ ، ٢]

(انظر الشكل) (٢ ـ ٦)

وتكون النهاية العظمى عند النقطة س = ٢ ، أي أن:

ك = د (٢) = ٨

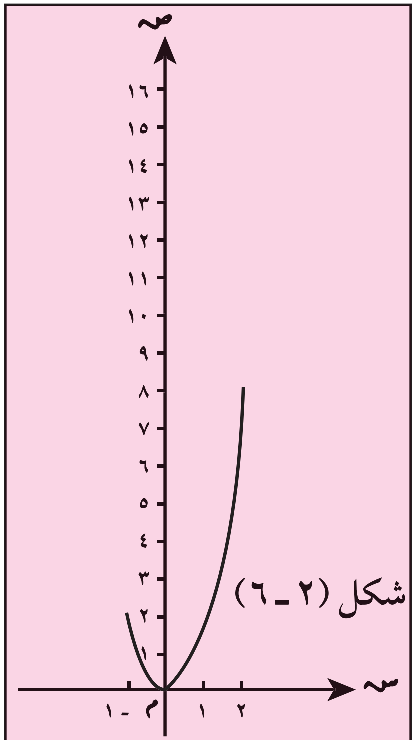
بينما نجد أن النهاية الصغرى تكون عند النقطة س = صفراً أي

أن: **ك** = د (٠) = صفر

وتبعاً لذلك نرى أن الدالة في هذه الحالة تكون محصورة بين

القيمتين : صفر ، ٨ أي أن: صفر ≤ د (س) ≤ ٨

∀ س ∈ [- ١ ، ٢]



شكل (٢ ـ ٦)

مثال (٢-١٠)

برهن أن للمعادلة :

$$س^٤ + ٤ س - ٦ = ٠$$

جذراً واقعاً في الفترة [١ ، ٢]

الحــل :

إن الدالة د التي قاعدتها :

$$د (س) = س^٤ + ٤ س - ٦$$

دالة متصلة لأنها كثيرة حدود وهي متصلة بصورة خاصة على الفترة [١ ، ٢]. نلاحظ أن :

$$د (١) = - ١ \quad ، \quad د (٢) = ١٨$$

العـدد صفر واقـع بين د (١) و د (٢) وهـذا يعني أنه يـوجـد عـدد ٢ > $س_٠$ > ١ بحيث يكـون

د ($س_٠$) = صفر أي أن :

$$س_٠^٤ + ٤ س_٠ - ٦ = ٠$$

إذن $س_٠$ جذر للمعادلة المفروضة وبذلك يثبت المطلوب.

مثال (٢-١١)

برهن أن للمعادلة :

$$٣ س^٣ + ١١ س^٢ - ٥ س - ٢ = ٠$$

جذراً واحداً على الأقل.

الحــل :

لكي نتوصل إلى المطلوب علينا أن نجد عددين بحيث تكون قيمتا الدالة :

$$د (س) = ٣ س^٣ + ١١ س^٢ - ٥ س - ٢$$

من إشارتين مختلفتين. نلاحظ مثلاً أن :

$$د (٠) = - ٢ > ٠ \quad ، \quad د (١) = ٣ + ١١ - ٥ - ٢ = ٧ < ٠$$

الدالة د دالة متصلة على الفترة [٠ ، ١] ، الصفر يقع بين د (٠) و د (١)

إذن يوجد عدد $س_١$ واقع في هذه الفترة، بحيث يكون

$د(س_١) = ٠$ ، $١ > س_١ > ٠$

نلاحظ أيضاً أن :

$د(-١) = -٣ + ١١ + ٥ - ٢ = ١١ > ٠$

إذن يوجد عدد آخر $س_٢$ واقع بين الصفر وَ -١ بحيث يكون :

$د(س_٢) = ٠$

نلاحظ أيضاً أن :

$د(-٢٠) = ٣ \times (-٢٠)^٣ + ١١ (-٢٠)^٢ - ٥ \times -٢٠ - ٢$

$= ٣ \times -٨٠٠٠ + ١١ \times ٤٠٠ + ١٠٠ - ٢$

$= -١٩٥٠٢ < ٠$

$د(-١) > ٠$ ، $د(-٢٠) < ٠$

الصفر يقع بين $د(-١)$ و $د(-٢٠)$ إذن يوجد عدد $س_٣$ واقع بين الصفر و -٢٠ بحيث يكون

$د(س_٣) = ٠$

للمعادلة المفروضة ثلاثة جذور تحقق مايلي :

$١ > س_١ > ٠$ ، $٠ > س_٢ > -١$ ، $-١ > س_٣ > -٢٠$

مثال (٢-١٢)

وضّح بالرسم أن للدالة المعرفة بالعلاقة :

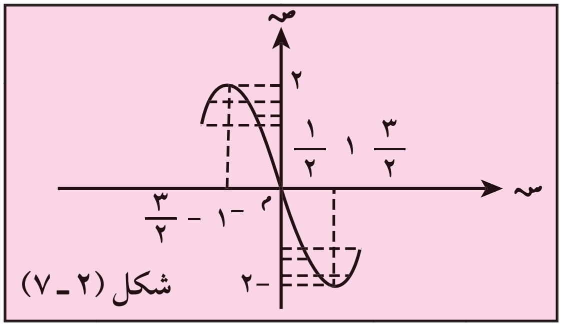
$د(س) = س^٣ - ٣س$

قيمة عظمى وقيمة صغرى في الفترة $[-\frac{٣}{٢} ، \frac{٣}{٢}]$

الحـــل :

لرسم جزء بيان هذه الدالة المقابل للفترة $[-\frac{٣}{٢} ، \frac{٣}{٢}]$ نستعين بالجدول التالي حيث يتكون سطره الأول من قيم للمتغير س منتمية إلى الفترة المذكوره ويتكون سطره الثاني من قيم الدالة عند قيم س.

س	$-\frac{٣}{٢}$	$-\frac{٥}{٤}$	-١	$-\frac{١}{٢}$	٠	$\frac{١}{٢}$	١	$\frac{٥}{٤}$	$\frac{٣}{٢}$
د (س)	$\frac{٩}{٨}$	$\frac{١١٥}{٦٤}$	٢	$\frac{١١}{٨}$	٠	$-\frac{١١}{٨}$	-٢	$-\frac{١١٥}{٦٤}$	$-\frac{٩}{٨}$



شكل (٢ ـ ٧)

نلاحظ من الشكل (٢-٧) أن القيمة العظمى للدالة هي ٢ وتبلغها عند س = - ١ أما القيمة الصغرى فهي - ٢ وتبلغها عند س = ١ وكل من - ١ ، ١ واقع في الفترة [$-\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$].

تمارين (٢ – ٢)

(١) برهن أن الدالة المعرفة بالقاعدة :

$$ص = \sqrt{٩ - س^{٢}}$$

متصلة على الفترة المغلقة [- ٣ ، ٣] .عيِّن مدى هذه الدالة وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لها في الفترة [- ٣ ، ٣]

(٢) الدالة المعرفة بالقاعدة :

$$ص = س^{٢} - ٢ س$$

متصلة على الفترة [- ١ ، ٤] أوجد مدى هذه الدالة ، برهن أن العدد ٥ ينتمي إلى هذا المدى.

أوجد قيمة للمتغير س تكون صورتها في هذه الدالة هي العدد ٥ .

(٣) عين مدى الدالة التي قاعدتها :

$$ص = ٢^{س}$$

إذا كان مجالها [٠ ، ٣]. أوجد أكبر قيمة وأصغر قيمة لهذه الدالة على مجالها المذكور. بيِّن أن العدد **٤ ينتمي إلى مدى هذه الدالة أوجد قيمة س التي تقبل العدد ٤ صورة لها.**

(٤) الدالة التي قاعدتها :

$$ص = س^{٣} - س$$

معرفة على الفترة [- ٢ ، ٢]. **أوجد مدى هذه الدالة إذا اعتبرنا مجالها الفترة** المذكورة. **أوجد أكبر قيمة وأصغر قيمة لهذه الدالة** على مجالها. بيِّن أن **الصفر ينتمي إلى مدى هذه الدالـة**. عيِّن **قيمـة** س التي **تقبل الصفر** صورة لها.

(٥) هل للمعادلة :

$٢^{س} - ٣ س = ٠$ حل يقع في الفترة [٠ ، ١]؟

(٦) برهـن أن للمعادلة :

$س + حا س = ١$ حل واقع في الفترة [٠ ، $\frac{ط}{٢}$].

الخلاصـة :

(١) في هذا الباب تعرفنا على مفهوم اتصال الدالة د عند نقطة ٲ ورأينا أن :

$$د \text{ متصلة عند } ٲ \Leftrightarrow \begin{cases} (\text{أ}) & د(ٲ) \text{ معرفة} \\ (\text{ب}) & \lim\limits_{س \to ٲ} د(س) \text{ موجودة} \\ (\text{جـ}) & \lim\limits_{س \to ٲ} د(س) = د(ٲ) \end{cases}$$

ثم تعرفنا على اتصال الدالة على فترة .

(٢) ثم درسنا خواص الدوال المتصلة والتي يمكن تلخيصها في الآتي :

إذا كانت $د_١$ ، $د_٢$ متصلة فإن كلاً من : $د_١ \pm د_٢$ ، $د_١ \times د_٢$ ، $\frac{د_١}{د_٢}$ (**بشـرط اجتنـاب القسمـة**

على الصفر) تكون متصلة وكذلك إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً فإن $(\text{د}_1)^{\text{ن}}$ ، $\sqrt[\text{ن}]{\text{د}_1}$ (عندما يكون الجذر معرّفاً) تكون متصلة أيضاً .

(٣) ثم رأينا أن الدالة المتصلة على فترة مغلقة تأخذ كل القيم الواقعة بين أي **قيمتين تأخذهما** الدالة في تلك الفترة، كما وأنها **تأخذ قيمتها العظمى وقيمتها الصغرى في تلك الفترة** .

تمارين عامة

عيّن النقاط ـ إن كانت موجودة ـ التي تكون عندها الدوال د (س) التالية غير متصلة :

(١) $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} + ٧$

(٢) $\text{د}(\text{س}) = (\text{س} - ٣)^{٥}$

(٣) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{١ + \text{س}^{٢}}$

(٤) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{١ - \text{س}^{٢}}$

(٥) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - ٤}{\text{س}^{٢} - ١٦}$

(٦) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{٣\,\text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س} + ٦}$

(٧) $\text{د}(\text{س}) = |\text{س} + ١|$

(٨) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{|\text{س} + ١|}{\text{س} + ١}$

ابحث اتصال كل من الدوال التالية عند النقطة المبينة :

(٩) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}}{\text{س} + ١} & \text{عندما س} \neq -١ \text{ ،} \\ ٥ & \text{عندما س} = -١ \end{cases}$ ، عند س = − ١

(١٠) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ١ + \text{س}^{٢} & \text{عندما س} \leqslant ١ \text{ ،} \\ ٥ - ٣\,\text{س} & \text{عندما س} > ١ \end{cases}$ ، عند س = ١

(١١) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{٥ - ٢\,س} - ١}{س - ٢} & \text{عندما س} \neq ٢ \\ -١ & \text{عندما س = ٢} \end{cases}$ عند س = ٢

عرِّف الدوال التالية عند النقطة المبينة كي تصبح هذه الدوال متصلة :

(١٢) د (س) = $\dfrac{س^{٣} - ١٢٥}{س - ٥}$ عند س = ٥

(١٣) د (س) = $\dfrac{س^{٢} - س - ١٢}{س + ٣}$ عند س = - ٣

(١٤) د (س) = $\dfrac{\sqrt{س + ٥} - ٣}{س - ٤}$ عند س = ٤

(١٥) برهن أن للمعادلة

$س^{٣} = ٢^{س}$ جذراً واقعاً في الفترة [١ ، ٢]

(**إرشاد :** ادرس الدالة التي قاعدتها د (س) = $س^{٣} - ٢^{س}$).

(١٦) برهن أن لكل من المعادلات جذراً واقعاً في الفترة المرافقة :

(أ) $س^{٣} + س + ١ = ٠$ [- ١ ، ١]

(ب) $س^{٢} - ٦\,س + ٣ = ٠$ [- ٢ ، ٤]

(جـ) $س^{٢} + \dfrac{١}{س} = ٣$ [١ ، ٣]

(د) $س^{٢} + \dfrac{١}{س} = ١$ [- ٢ ، - $\dfrac{١}{٢}$]

(هـ) $س^{٧} - ٤\,س^{٥} + ٣\,س^{٢} - ٢ = ٠$ [- ١ ، ١]

(و) $س^{\frac{٥}{٣}} + س^{\frac{٧}{٣}} - ١ = ٠$ [- ١ ، ١]

الباب الثالث

معدل التغير والدالة المشتقة

٣ – ١ النماذج الرياضية.
٣ – ٢ معدل تغير دالة.
٣ – ٣ معدل التغير الآني .
٣ – ٤ مشتقة دالة.
٣ – ٥ قواعد الاشتقاق.
٣ – ٦ التفاضل.
٣ – ٧ مشتقة دالة الدالة (قاعدة التسلسل).

٣ ـ ١ النمـاذج الرياضيـة

إن المسائل التي نتعرض إليها في مجـالات الانتاج المختلفـة تتطلب صيـاغة نمـوذج رياضي للمسـألة المعروضة وإيجاد حل لهذا النموذج يتنـاسب مع الـواقع الحقيقي للمسـألة . ويتم ذلـك باتبـاع الخطوات الآتية :

١ ـ تعيين رموز رياضية للمتغيرات الواردة في المسألة .

٢ ـ إيجاد علاقة رياضية تربط بين هذه المتغيرات .

٣ ـ حل النموذج الرياضي .

٤ ـ مطابقة الحل مع الـواقع الحقيقي للمسـألة . فـإذا لم يتفق هذا الحـل مع طبيعـة المقاديـر الداخلة في المسألة نأخذ أقرب قيمة مناسبة لطبيعة المسألة .

وإن إحدى أهم المسائل التي تواجه مديري المصانع هي تحديد الكمية التي ينبغي للمصنع أن ينتجها خلال فترة زمنية معينة . وبالرغم من أن هـذه الكمية قـد تكون في بعض المسـائل العمليـة ممثلة بأعـداد صحيحة ، حيث لا يعقل أن ينتج المصنع ٤ , ٦٥٠ سيارة مثلاً ، إلا أنـه في كثير من الأحيـان تكون هـذه الكمية ممثلة بأعداد حقيقية كأن تكون وزناً لزيت أو مبلغاً من مال .

٣ ـ ٢ معـدل تغـيـر دالـة

إن كثيراً من الكميات التي نتعرض إليها في حياتنا تتغير، فسرعة السيارة تتغـير من لحظة إلى أخـرى، وربح المصنع يتغير بتغير كمية إنتاجه ، كما أن عدد القطع المباعة يرتبط بشكلٍ مـا بالثمن المقـرر للقطعـة الواحدة .

إن الأمر الذي يثير اهتمامنا بصورة أساسية هو سرعة أو بطء هذا التغير والذي نقـدمه تحت مفهـوم معدل التغير، وسنمهد له بأمثلة متنوعة .

مثال (٣-١)

لنفترض أن سيارة ابتدأت سيرها في الساعة الثامنة صباحاً وأن المسافات التي قطعتها كانت حسب الجدول الآتي :

الزمن (بالساعة)	المسافة التي قطعت (بالكيلو متر)
٨	صفر
١١	١٥٠
١٥	٣١٠
١٩	٥٣٠

فما هي السرعة المتوسطة للسيارة (معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن) بين الساعة الثامنة والحادية عشرة، وماهي السرعة المتوسطة بين الساعة الخامسة عشرة والتاسعة عشرة .

الحـــل :

السرعة المتوسطة بين الثامنة والحادية عشرة = $\frac{١٥٠ - ٠}{٣}$ = ٥٠ كم / ساعة

السرعة المتوسطة بين الخامسة عشرة والتاسعة عشرة = $\frac{٥٣٠ - ٣١٠}{٤}$ ٥٥ كم / ساعة

مثال (٣-٢)

وجد مدير أحد المصانع أن الربح الأسبوعي (ر) يتغير تبعاً لعدد القطع س المنتجة أسبوعياً وفقاً للصيغة الآتية :

$$ر(س) = - س^{٢} + ١٨٠ س - ٤٠٠٠$$

حيث س ترمز لعدد القطع المنتجة ، ر ترمز لدالة الربح .

ماهو معدل تغير الربح بالنسبة لعدد القطع المنتجة أسبوعياً بين ١٠٠ و ١٢٠ قطعة .

الحــل :

إذا أنتج المصنع ١٠٠ قطعة كان الربح ر (١٠٠) = ٤٠٠٠ ريال.

وإذا انتج المصنع ١٢٠ قطعة كان الربح ر (١٢٠) = ٣٢٠٠ ريال.

$$\text{معدل تغير الربح} = \frac{ر(١٢٠) - ر(١٠٠)}{١٢٠ - ١٠٠} = \frac{٣٢٠٠ - ٤٠٠٠}{٢٠} = -٤٠ \text{ ريالاً للقطعة}$$

إن أشارة الناقص هذه تدل على أن الربح يتناقص عندما يزداد الانتاج من ١٠٠ قطعة إلى ١٢٠ قطعة، وأن معدل نقص الربح في القطعة الواحدة هو ٤٠ ريالاً.

باستطاعتنا أن نعمم ماورد في المثالين السابقين على النحو التالي :

تعريف (٣-١)

لتكن د دالة في س أي أن ص = د (س).

إذا تغيرت س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإن ص تتغير تبعاً لذلك من

$ص_١ = د(س_١)$ إلى $ص_٢ = د(س_٢)$.

تسمى النسبة : $$\frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

متوسط تغير الدالة ص بالنسبة للمتغير س خلال التغير من $س_١$ إلى $س_٢$.

مثال (٣-٣)

أوجد معدل تغير الدالة

$$د(س) = ٣ س^٢ - س^٣$$

عندما يتغير س من ١ إلى ٢

ارسم جزءاً من منحني هذه الدالة مستعيناً بالنقاط التي إحداثياتها السينية هي الأعداد :

-١، ٠، ١، ١٫٥، ٢، ٣

الحـــل :

إذا رمزنا لمعدل تغير الدالة بالرمز م فإن :

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

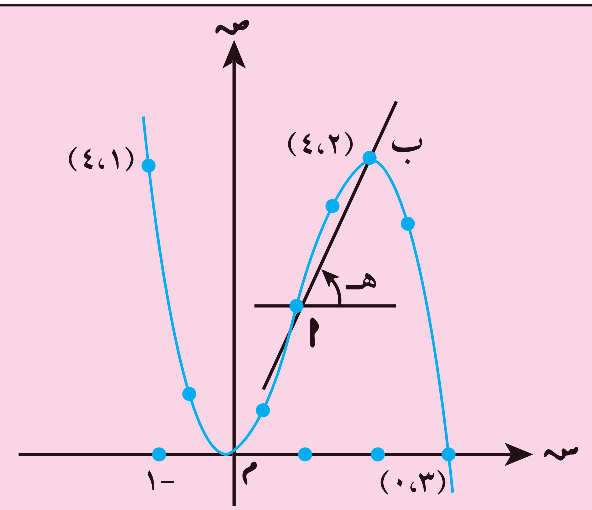
حيث $ص_١$ = د (١) = ٢ ، $ص_٢$ = د (٢) = ٤ وعليه يكون :

$$م = \frac{د(٢) - د(١)}{٢ - ١} = \frac{٤ - ٢}{٢ - ١} = ٢$$

لرسم جزء المنحني المطلوب نبحث عن قيم ص الموافقة لقيم س المعطاة فنجد :

س .	-١	٠	١	١,٥	٢	٣
ص	٤	٠	٢	٣,٣٧٥	٤	٠

والشكل (٣-١) يمثل المنحني المطلوب .



شكل (٣ـ ١)

ملاحظــة (٣ـ١) :

١ ـ لاحــظ أن :

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

هو ميل المستقيم المار من النقطتين أ (س$_١$ ، ص$_١$) ، ب (س$_٢$ ، ص$_٢$)

٢ ـ إن ميل أب يساوي ظـل الزاويـة التي يصنعها أب مـع الإتجاه المـوجب لمحور السينـات فإذا كـان قياس هذه الزاوية مساوياً هـ فإن :

ظاهـ = ميل أب = ٢

نتيـجـة (٣ـ١) :

إذا كـان هـ ∈] ٠ ، ٩٠° [أي أن المستقيم أب يصنع مع الإتجاه المـوجب لمحور السينـات زاوية حادة كما في الشكل (٣ ـ ٢ ، أ)، فإنه من الواضح أن :

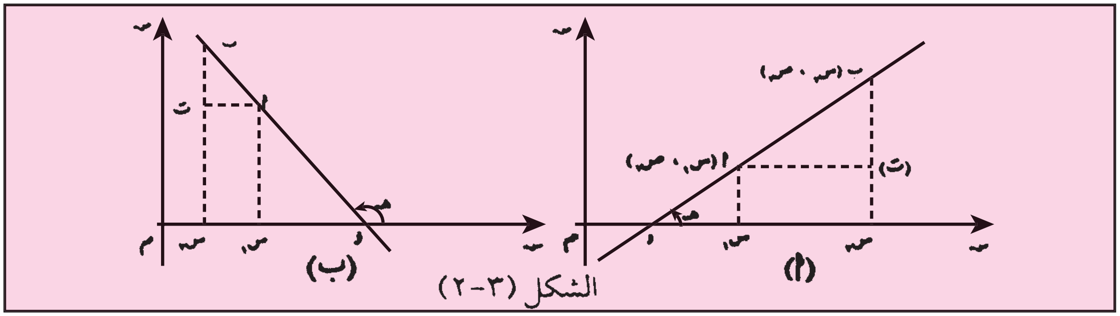
$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} >$$

أي أن ميل أب موجب.

وإذا كانت هـ ∈] ٩٠° ، ١٨٠° [أي أن المستقيم أب يصنع مع الإتجاه المـوجب لمحور السينـات زاوية منفرجة، كما هو في الشكل (٣ ـ ٢ ، ب)، فإنه من الواضح أن :

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} < ٠$$

أي أن ميل أب سالب.



الشكل (٣-٢)

ينتــج عــن ذلك أنــه :

إذا كانت $\hat{\text{س و ب}}$ حادة فإن ظا هـ > ٠ (الشكل (١ ـ ٢)أ).

وإذا كانت $\hat{\text{س و ب}}$ منفرجة فإن ظا هـ < ٠ (الشكل (١ ـ ٢) ب)

مثال (٣-٤)

أوجد معدل تغير مساحة مربع طول ضلعه ٨ سم عُرِّض للحرارة فزاد طول كل ضلع من أضـلاعه ٠,٣ سم (دون أي تغير في زواياه) .

الحــل :

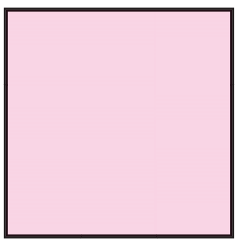
إذا كان طول ضلع المربع س سم فإن مساحة ص = $\text{س}^{٢}$ $\text{سم}^{٢}$

ومعدل تغير مساحة هذا المربع عندما يتغير طول الضلع من ٨ سم إلى ٨,٣ سم هــو:

$$\text{م} = \frac{(٨,٣)^{٢} - ٨^{٢}}{٨,٣ - ٨} = \frac{(٨,٣ + ٨)(٨,٣ - ٨)}{٠,٣}$$

$$\text{م} = \frac{١٦,٣ \times ٠,٣}{٠,٣} = ١٦,٣ \ \text{سم}^{٢}$$

س



شكل (٣ـ٣)

تماريـن (٣ - ١)

(١) ليكن المستقيم ل الذي معادلته : ص = ٢ س + ٧

(أ) أوجد معدل تغير ص بالنسبه إلى س في الفترة بين $\text{س}_{١}$ = ١ و $\text{س}_{٢}$ = ٤

(ب) أوجد معدل تغير ص بالنسبه إلى س في الفترة بين $\text{س}_{١}$ = ٣ و $\text{س}_{٢}$ = ٣ + هـ

(جـ) المستقيم ل يمر بالنقـطتين (٠ ، ٧) و (١ ، ٩) احسب ميـل هذا المستقيم مستخـدماً هـاتين النقطتين .

(د) قارن بين الأجـوبه التي حصلت عليهـا في كلٍ من أ، ب، جـ وبيـن معامـل س في معادلـة المستقيم .

(٢) ليكن المنحني الذي معادلته : ص = $\text{س}^{٢}$ + ٣

(أ) أوجد معدل تغير ص بالنسبة إلى س في الفترة من $س_١ = ٠$ إلى $س_٢ = ١$.

(ب) أوجد معدل تغير ص بالنسبة إلى س في الفترة من $س_١ = -١$ إلى $س_٢ = -١ + هـ$

(٣) ليكن المنحني الذي معادلته : $ص = س^٢ + ٣ س$

(أ) أوجد معدل تغير ص بالنسبة إلى س في الفترة من $س_١ = ٠$ و $س_٢ = ٢$

(ب) أوجد معدل تغير ص بالنسبة إلى س في الفترة من $س_١ = ١$ و $س_٢ = ١ + هـ$

(٤) أوجد معدل تغير ص بالنسبة إلى س في الفترة من :

$س_١ = ١$ إلى $س_٢ = ٣$ علماً أن $ص = \frac{١}{س}$

(٥) جسيم يتحرك على خط مستقيم فيقطع مسافة ف متراً في ﻫ ثانية وذلك حسب الصيغة الآتية :

$ف = ﻫ^٢ + ﻫ$.

(أ) احسب السرعة المتوسطة لهذا الجسيم في الفترة بين الثانية الأولى والثانية الثالثة .

(ب) احسب السرعة المتوسطة لهذا الجسيم في الفترة بين $ﻫ = ١$ او بين $ﻫ = ١ + هـ$

٣ ـ ٣ معدل التغير الآني

إن مفهوم معدل تغير دالة قد يكون غير كافٍ في كثير من التطبيقات . فهو لا يعطينا صورة دقيقة عما نود معرفته . فنحن مثلاً لا نستطيع من خلال مُعدَّل التغير معرفة سرعة السيارة في المثال (٣-١) في لحظة معينَّة . لهذا السبب نحتاج إلى مفهومٍ آخر ذي صلة وثيقة بمعدل التغير

لنوضح ذلك على المثال الآتي :

مثال (٣-٥)

إذا سقط جسيم سقوطاً حراً فإن المسافة ف (ﻥ) التي يقطعها الجسيم بعد ﻥ ثانية تساوي تقريباً

$٥ ﻥ^٢$ مقدرة بالأمتار أي أن :

$ف (ﻥ) = ٥ ﻥ^٢$

إذا أردنا معرفة سرعة الجسيم بعد ثلاث ثوان من سقوطه فإننا نحسب متوسط سرعة هذا الجسيم في فترات زمنية متناقصة الطول تقع حول نهاية الثانية الثالثة ، كما هو مبينٌ في الجدول الآتي :

الفترة الزمنية بالثواني	السرعة المتوسطة للجسيم (م / ثا)
من ٢,٩٩ إلى ٣	٢٩,٩٥
من ٣ إلى ٣,١	٣٠,٥
من ٣ إلى ٣,٠١	٣٠,٠٥
من ٣ إلى ٣,٠٠١	٣٠,٠٠٥

يتبين من هذا الجدول أنه كلما صغرت الفترة الزمنية حول نهاية الثانية الثالثة فإن السرعة المتوسطة تزداد قرباً من سرعة الجسيم عند نهاية الثانية الثالثة ونلاحظ أنها تقترب من العدد ٣٠ لذا يمكننا أن نعتبر أن سرعة الجسيم الساقط تساوي ٣٠ م/ ثا في نهاية الثانية الثالثة .

وبصورة عامة : فإن متوسط تغير المسافة بالنسبة للزمن في الفترة الزمنية بين الثانية ٣ والثانية ٣ + هـ (حيث هـ عدد حقيقي يمكن أن يكون موجباً أو سالباً) تحسب كما يلي :

$$\frac{\text{ف}(٣ + \text{هـ}) - \text{ف}(٣)}{(٣ + \text{هـ}) - ٣} = \frac{٥(٣ + \text{هـ})^{٢} - ٥(٣)^{٢}}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{٥ \,[\, (٣ + \text{هـ})^{٢} - (٣)^{٢} \,]}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{٥ \,\text{هـ}\, (٦ + \text{هـ})}{\text{هـ}}$$

$$= ٣٠ + ٥ \,\text{هـ} \quad \text{حيث هـ} \neq ٠$$

نحسب الآن نهاية السرعة المتوسطة عندما تصغر الفترة الزمنية مابين الثانية ٣ والثانية ٣ + هـ بحيث تقترب هـ من الصفر .

$$\lim_{\text{هـ} \to ٠} (٣٠ + ٥ \,\text{هـ}) = ٣٠$$

يمكننا بعد الاسترشاد بهذا المثال التمهيدي أن نقدم التعريف الآتي :

تعريف (٣-٢)

لتكن د دالة في س أي ص = د (س). نعرف معدل التغير الآني للدالة د بالنسبة إلى س عند س = $س_١$ على أنه النهاية الآتية إن وجدت :

$$\lim_{هـ \to 0} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

نسمي العدد الذي يمثل هذه النهاية معدل التغير الآني للدالة ص عند $س_١$.

مثال (٣-٦)

احسب معدل التغير الآني لدالة الربح التي وردت في المثال (٣-٢)

عند (أ) $س_١ = ٥٠$ (ب) $س_١ = ١٢٠$ (جـ) $س_١ = ٩٠$

الحـل :

$$\text{معدل التغير الآني عند } س_١ = \lim_{هـ \to 0} \frac{ر(س_١ + هـ) - ر(س_١)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{-(س_١ + هـ)^٢ + ١٨٠ (س_١ + هـ) + س_١^٢ - ١٨٠ س_١}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{-٢ س_١ هـ - هـ^٢ + ١٨٠ هـ}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} (-٢ س_١ - هـ + ١٨٠)$$

$$= -٢ س_١ + ١٨٠$$

(أ) معدل التغير الآني عند $س_١$ = ٥٠ هو - ٢ × ٥٠ + ١٨٠ = ٨٠ ريالاً

(ب) معدل التغير الآني عند $س_١$ = ١٢٠ هو - ٢ × ١٢٠ + ١٨٠ = - ٦٠ ريالاً

(جـ) معدل التغير الآني عند $س_١$ = ٩٠ هو - ٢ × ٩٠ + ١٨٠ = ٠

مثال (٣-٧)

احسب معدل التغير الآني لمساحة مربع بالنسبة لطول ضلعه س عندما يكون :

(أ) س = $\frac{١}{٤}$ (ب) س = ١

الحـــل :

مساحة المربع : م (س) = $س^٢$

معدل التغير الآني للمساحة = $\lim\limits_{هـ \leftarrow ٠} \frac{م(س + هـ) - م(س)}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \leftarrow ٠} \frac{(س + هـ)^٢ - س^٢}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \leftarrow ٠} \frac{هـ(٢س + هـ)}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \leftarrow ٠} (٢س + هـ) = ٢س$

(أ) معدل التغير الآني للمساحة عند س = $\frac{١}{٤}$ يساوي $\frac{١}{٢}$.

(ب) معدل التغير الآني للمساحة عند س = ١ يساوي ٢

تمارين (٣ - ٢)

(١) صفيحة على شكل مربع تتمدد محافظة على شكلها. أوجد معدل التغير الآني لمساحة الصفيحة بالنسبة لطول ضلعها. كم هو معدل هذا التغير عندما يكون :

طول ضلع المربع : (أ) ل = $\frac{١}{٢}$ (ب) ل = ٢

(٢) صفيحة على شكل مثلث متطابق الأضلاع. أوجد معدل التغير الآني لمساحتها بالنسبة لطول ضلعها. كم يبلغ هذا المعدل عندما يكون طول ضلع المثلث $٢\sqrt{٣}$.

(٣) ماهو معدل التغير الآني لمساحة دائرة بالنسبة لنصف قطرها وكم يبلغ هذا المعدل عندما يكون طول نصف قطر الدائرة مساوياً ٢ سم ؟

(٤) ما هو معدل التغير الآني لحجم كرة بالنسبة لنصف قطرها؟ وكم يبلغ هذا المعدل عندما يكون طول نصف قطر الكرة مساوياً ٣ سم؟

علماً أن حجم الكرة يساوي $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣} حيث نق هو طول نصف قطرها.

(٥) جسيم يتحرك على خط مستقيم فيقطع مسافة ف متراً في ن ثانية وذلك حسب الصيغة الآتية ف = ٥ ن^{٢}. احسب سرعة هذا الجسيم في نهاية الثانية الثالثة من بدء حركته.

٣ ـ ٤ مشتقة دالة

إن معدل التغير الآني الذي تعرفنا عليه في البند (٣-٣) سيقودنا إلى مفهوم جديد يعتبر محور علم التفاضل وهو مشتقة دالة.

تعريف (٣-٣)

يقال إن الدالة د قابلة للاشتقاق عند س$_{١}$ إذا كانت النهاية:

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_{١} + هـ) - د(س_{١})}{هـ} \text{ موجودة.}$$

ندعو هذه النهاية مشتقة الدالة د عند س$_{١}$ ونمثلها بالرمز دَ.

وإذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق عند كل قيمة من مجموعة تعريفها قلنا إنها دالة قابلة للاشتقاق.

تعريف (٣-٤)

مشتقة الدالة د هي دالة أخرى يرمز لها بـ دَ معرفة كما يلي:

$$دَ(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$$

مجال دَ مكون من قيم س التي تكون عندها الدالة د معرفة وقابلة للاشتقاق.

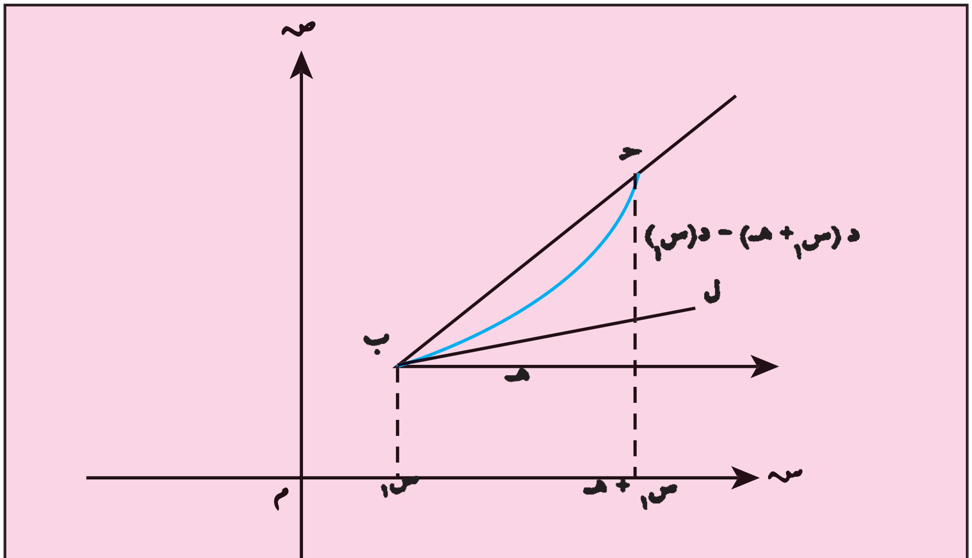
ملاحظة (٣ ـ ٢):

إذا كانت قاعدة الدالة د من الشكل ص = د(س) فإنه يرمز أيضاً لمشتقة هذه الدالة بالرمز صَ.

التفسير الهندسي للمشتقة :

إذا كانت الدالة د قابله للاشتقاق عند س فإنه يمكن إعطاء تفسير هندسي لمشتقتها كما يلي :

على الشكل (٣-٤) نلاحظ النقطتين :



الشكل (٣-٤)

ب = (س١، د (س١)) ، جـ = (س١ + هـ، د (س١ + هـ))

وهما نقطتان من منحني الدالة د ٠

النسبة $\dfrac{\text{د (س}_1\text{ + هـ) - د (س}_1\text{)}}{\text{هـ}}$ **(٣-١)**

تمثل ظل الزاوية التي يصنعها القاطع ب حـ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

عندما تقترب هـ من الصفر يدور القاطع ب حـ حول النقطة ب، إذا كانت النهاية (٣-١) موجودة فإن القاطع ب حـ يأخذ وضعاً نهائياً ب ل هو مماس منحني الدالة د عند النقطة ب . أما النهاية المذكورة فهي ظل زاوية هذا المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات . نسمي ظل الزاوية هذا ميل المماس في النقطة ب .

إذن ميل المماس في النقطة ب (س١ ، د (س١)) = د (س١)

طريقة حساب $\acute{د}$ (س) باستخدام التعريف :

١ ـ نحسب الكسر $\dfrac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

٢ ـ نبسط هذا الكسر إلى أقصى حد ممكن .

٣ ـ نحسب $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \dfrac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$ إن وجدت

مثال (٣-٨)

إذا كانت د (س) = ٲ س + ب حيث ٲ، ب عددان ثابتان فإن :

$$\acute{د}(س) = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \dfrac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \dfrac{ٲ(س + هـ) + ب - (ٲس + ب)}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \dfrac{ٲهـ}{هـ} = ٲ$$

لاحظ أن منحني الدالة د مستقيم، ميله يساوي مشتقة الدالة، أي أن : م = ٲ .

مثال (٣-٩)

هل الداله الآتيه د (س) = |س| قابلة للاشتقاق عند س = ٠؟

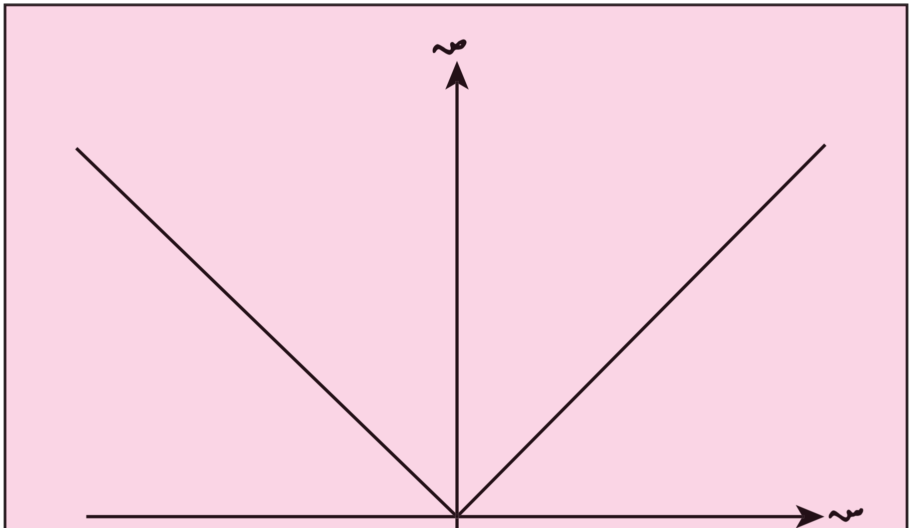
الحـــل :

$$\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \dfrac{د(٠ + هـ) - د(٠)}{هـ} = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \dfrac{|هـ| - ٠}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \dfrac{|هـ|}{هـ}$$

هذه النهاية غير موجودة

نلاحظ من الشكل (٣-٥) أنه لا يوجد لمنحني هذه الدالة مماس وحيد عند نقطة الأصل .



شكل (٣ ـ ٥)

مثال (٣-١٠)

هل الدالة الآتية د (س) = س $^{\frac{٢}{٣}}$ قابلة للاشتقاق عند س = ٠ ؟

الحــل :

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(٠ + هـ) - د(٠)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ^{\frac{٢}{٣}}}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{هـ^{\frac{١}{٣}}}$$

بما أن هذه النهاية غير موجوده لذا فإن الداله د (س) = س $^{\frac{٢}{٣}}$ غير قابلة للاشتقاق عند س = ٠

مثال (٣-١١)

اكتب معادلة المماس لمنحني دالة د عند النقطة ($س_١$ ، د ($س_١$))

الحــل :

بما أن ميل المماس عند هذه النقطة هو دَ ($س_١$) لذا فإن معادلة المماس هي :

ص - د ($س_١$) = دَ ($س_١$) (س - $س_١$)

مثال (٣-١٢)

اكتب معادلة المماس لمنحني الدالة د (س) = س^{٢} − ٣ س عند النقطه (٠ ، ٠)

الحـــل :

إن ميل المماس عند النقطة (٠ ، ٠) هو دَ (٠)

$$دَ(٠) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{(٠ + هـ)^{٢} - ٣(٠ + هـ) - ٠}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(هـ - ٣)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} (هـ - ٣) = -٣$$

اذن معادلة المماس هي: ص − ٠ = − ٣ (س − ٠)

أي: ص = − ٣ س

تمارين (٣ – ٣)

في التمارين ١ ـ ٤ أوجد باستخدام التعريف مشتقة كل من الدوال المذكورة:

١ ـ ص = ٣ س − ٢

٢ ـ ص = ٤

٣ ـ ص = ٢ − س^{٢}

٤ ـ $ص = \frac{١}{س + ١}$

٥ ـ اوجد ميل المماس لمنحني الدالة ص = ٢ س^{٢} + ٤ عند كل من النقاط:

(أ) س = − ١ (ب) س = ٠ (جـ) س = ١

٦ ـ أوجد النقطة التي يكون عندها ميل المماس لمنحني الدالة ص = ٣ س^{٢} + ٣ س − ٤ موازياً لمحور السينات.

٧ ـ سقط جسم من مكان مرتفع فقطع مسافه ف متراً في زمن قدره ن ثانية حسب الصيغة الآتية:

ف = ٥ ن^{٢}

(أ) أوجد سرعة الجسم بعد ٥ ثوانٍ من سقوطه

(ب) كم ينقضي من الزمن عندما تصبح سرعته ٢٠ متراً في الثانية.

٣ ـ ٥ قـــواعـــد الاشتقـاق

لقد تعرفنا في الفقرة الأخيرة على مشتقة الدالة د على أنهـا النهاية الآتية (إن وجدت):

$$دَ(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$$

وسوف نستخدم الآن هذا التعريف لإيجاد مشتقات بعض الدوال البسيطة التي سوف تساعـد في صياغـة بعض قواعد الاشتقاق، وحينئذٍ لن نضطر للرجوع إلى التعـريف حينما نـريد إيجاد مشتقة دالـة ما، بـل نرجع لهذه القواعد.

١ ـ مشتقة الدالة الثابتة :

إذا كانت د(س) = حـ حيث حـ عدد ثابت فإن دَ(س) = ٠

البـرهــان :

$$دَ(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{حـ - حـ}{هـ} = ٠$$

٢ ـ مشتقة الدالة $س^{ن}$:

(أ) إذا كانت د(س) = س فإن دَ(س) = ١

البـرهــان :

$$دَ(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{س + هـ - س}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ}{هـ} = ١$$

(ب) إذا كانت د (س) = $س^٢$ فإن دَ (س) = ٢ س

البرهان :

$$دَ(س) = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{(س + هـ)^٢ - س^٢}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{هـ(٢ س + هـ)}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} (٢ س + هـ) = ٢ س$$

(جـ) إذا كانت د (س) = $س^٣$ فإن دَ (س) = ٣ $س^٢$

البرهان :

$$دَ(س) = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{(س + هـ)^٣ - س^٣}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{(س^٣ + ٣ س^٢ هـ + ٣ س هـ^٢ + هـ^٣) - س^٣}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{٣ س^٢ هـ + ٣ س هـ^٢ + هـ^٣}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} (٣ س^٢ + ٣ س هـ + هـ^٢) = ٣ س^٢$$

(د) إذا كانت د (س) = $س^{\frac{١}{٢}}$ فإن دَ (س) = $\frac{١}{٢}$ $س^{-\frac{١}{٢}}$

البرهان :

$$دَ(س) = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{\sqrt{س + هـ} - \sqrt{س}}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{\sqrt{س + هـ} - \sqrt{س}}{هـ} \cdot \frac{\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س}}{\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س}}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{س + هـ - س}{هـ [\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س}]}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{1}{\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س}} = \frac{1}{2\sqrt{س}} = \frac{1}{2} س^{-\frac{1}{2}}$$

من الأمثلة السابقة نجد :

الدالة د (س)	$س = س^1$	$س^2$	$س^3$	$\sqrt{س} = س^{\frac{1}{2}}$
الدالة المشتقة دَ (س)	$1 = 1 \times س^{1-1}$	$2 س = 2 س^{2-1}$	$3 س^2 = 3 س^{3-1}$	$\frac{1}{2} س^{\frac{1}{2}-1}$

وبصورة عامة فإنه :

إذا كانت د (س) = $س^{ن}$ حيث ن عدد حقيقي فإن :

$دَ (س) = ن س^{ن - 1}$

٣ ـ مشتقة حاصل ضرب عدد ثابت بدالة :

مثال (٣-١٣)

إذا كانت د (س) = ٥ $س^2$ فاحسب مشتقة هذه الدالة .

الحـــل :

$$دَ (س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{5 (س + هـ)^2 - 5 س^2}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{5 [(س + هـ)^2 - س^2]}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{٥ \, هـ (٢ س + هـ)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} ٥ (٢ س + هـ) = ١٠ س$$

$$= ٥ (٢ س) = ٥ (س^٢)'$$

وبصورة عامة : إذا كانت الدالة $د_١$ قابلة للاشتقاق عند س وكان حـ عدداً ثابتاً فإن الدالة $د = حـ د_١$ تكون قابلة للاشتقاق عند س ويتحقق $[حـ . د_١ (س)]' = حـ د'_١ (س)$

٤ ـ مشتقة مجموع دالتين :

مثال (٣-١٤)

إذا كانت د (س) = $س^٢ - ٣$ س فأوجد دَ (س) .

الحل :

$$د'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{(س + هـ)^٢ - ٣ (س + هـ) - (س^٢ - ٣ س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{(س + هـ)^٢ - س^٢ - [٣ (س + هـ) - ٣ س]}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{هـ (٢ س + هـ) - ٣ هـ}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{هـ (٢ س + هـ - ٣)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} (٢ س + هـ - ٣) = ٢ س - ٣$$

$$= (س^٢)' + (- ٣ س)'$$

وبصورة عامة : إذا كانت كل من الدالتين $د_١$ و $د_٢$ قابلة للاشتقاق عند س فإن الدالة $د = د_١ + د_٢$ تكون أيضاً قابلة للاشتقاق عند س.

ويتحقق :

$$[د_١ (س) + د_٢ (س)]' = د'_١ (س) + د'_٢ (س)$$

٥ ـ مشتقة حاصل ضرب دالتين :

مثال (٣-١٥)

إذا كان د (س) = ٥ س (٣ س − ٢) فأوجد دَ (س)

الحـــل :

$$دَ (س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٥ (س + هـ) [٣ (س + هـ) − ٢] − ٥ س (٣ س − ٢)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٥ (س + هـ) [٣ س − ٢ + ٣ هـ] − ٥ س (٣ س − ٢)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٥ (س + هـ) (٣ س − ٢) + ٥ (س + هـ) (٣ هـ) − ٥ س (٣ س − ٢)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{[٥ (س + هـ) − ٥ س] (٣ س − ٢) + ٥ (س + هـ) (٣ هـ)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٥ هـ (٣ س − ٢)}{هـ} + \lim_{هـ \to ٠} \frac{٥ (س + هـ) (٣ هـ)}{هـ}$$

$$= ٥ (٣ س − ٢) + (٥ س) (٣)$$

$$= (٥ س)' (٣ س − ٢) + ٥ س (٣ س − ٢)'$$

وبصورة عامة فإنه : إذا كانت كل من الدالتين $د_١$ و $د_٢$ قابلة للاشتقاق عند س فإن حاصل ضرب الدالتين يكون قابلاً للاشتقاق عند س.

ويتحقق :

$$[د_١ (س) . د_٢ (س)]' = دَ_١ (س) . د_٢ (س) + د_١ (س) . دَ_٢ (س)$$

٦ ـ مشتقة حاصل قسمة دالتين :

مثال (٣-١٦)

إذا كانت د (س) = $\frac{٢ س + ١}{٣ س}$ حيث س $\neq$ ٠ فأوجد دَ (س)

الحـــل :

نحسب أولاً : د (س + هـ) − د (س) فنجد .

$$\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}) = \frac{٢(\text{س} + \text{هـ}) + ١}{٣(\text{س} + \text{هـ})} - \frac{٢\text{س} + ١}{٣\text{س}}$$

$$= \frac{[٢(\text{س} + \text{هـ}) + ١](٣\text{س}) - (٢\text{س} + ١)[٣(\text{س} + \text{هـ})]}{٣(\text{س} + \text{هـ})(٣\text{س})}$$

$$= \frac{[٢(\text{س} + \text{هـ}) + ١](٣\text{س}) - (٢\text{س} + ١)(٣\text{س}) - (٢\text{س} + ١)(٣\text{هـ})}{٣(\text{س} + \text{هـ})(٣\text{س})}$$

$$= \frac{[٢(\text{س} + \text{هـ}) + ١ - (٢\text{س} + ١)](٣\text{س}) - (٢\text{س} + ١)(٣\text{هـ})}{٣(\text{س} + \text{هـ})(٣\text{س})}$$

$$= \frac{٢\text{هـ}(٣\text{س}) - ٣\text{هـ}(٢\text{س} + ١)}{٣(\text{س} + \text{هـ})(٣\text{س})}$$

والآن نحسب دَ (س) :

$$\text{دَ}(\text{س}) = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{هـ}(٣\text{س}) - ٣\text{هـ}(٢\text{س} + ١)}{٣\text{هـ}(\text{س} + \text{هـ})(٣\text{س})}$$

$$= \frac{٢(٣\text{س}) - ٣(٢\text{س} + ١)}{(٣\text{س})^{٢}}$$

$$= \frac{(٢\text{س} + ١)'(٣\text{س}) - (٣\text{س})'(٢\text{س} + ١)}{(٣\text{س})^{٢}}$$

وبصورة عامة فإنه : إذا كانت كل من الدالتين $\text{د}_١$ و $\text{د}_٢$ قابلة للاشتقاق عند س وإذا كانت $\text{د}_٢(\text{س}) \neq ٠$ فإن :

$$\left[\frac{\text{د}_١(\text{س})}{\text{د}_٢(\text{س})}\right]' = \frac{\text{دَ}_١(\text{س})\,\text{د}_٢(\text{س}) - \text{دَ}_٢(\text{س})\,\text{د}_١(\text{س})}{[\text{د}_٢(\text{س})]^{٢}}$$

. **تلخيص قواعد الاشتقاق :**

باستخدام تعريف مشتقه دالة أمكننا فيما سبق أن نحسب مشتقات بعض الدوال البسيطة وأن نجد قواعد معينة لكل من مشتقة حاصل جمع وضرب وقسمة دالتين، مما يجعل عملية إيجاد مشتقة دالة أمراً ميسراً لا نحتاج فيه للعودة إلى التعريف. وسنلخص ما رأيناه سابقاً بالقواعد التالية :

١ - إذا كان د (س) = حـ حيث حـ عدد ثابت فإن دَ (س) = ٠

٢ - إذا كان دَ (س) = $س^{ن}$ حيث ن عدد حقيقي فإن دَ (س) = ن $س^{ن - ١}$

٣ - إذا كان حـ عدداً ثابتاً وكانت د دالة قابلة للاشتقاق عند س فإن الدالة حـ . د تكون أيضاً قابله للاشتقاق عند س ويتحقق [حـ د (س)]َ = حـ . دَ (س)

٤ - إذا كانت كل من الدالتين $د_١$ ، $د_٢$ قابلة للاشتقاق عند س فإن كلاً من الدالتين $د_١$ + $د_٢$ ، $د_١$ − $د_٢$ تكون قابلة للاشتقاق عند س ويتحقق.

$$[د_١ (س) + د_٢ (س)]' = دَ_١ (س) + دَ_٢ (س)$$

$$[د_١ (س) - د_٢ (س)]' = دَ_١ (س) - دَ_٢ (س)$$

٥ - إذا كانت كل من الدالتين $د_١$ ، $د_٢$ قابلة للاشتقاق عند س فإن الدالة ($د_١$. $د_٢$) تكون أيضاً قابلة للاشتقاق عند س ويتحقق:

$$[د_١ (س) . د_٢ (س)]' = دَ_١ (س) . د_٢ (س) + د_١ (س).دَ_٢ (س)$$

٦ - إذا كانت كل من الدالتين $د_١$ و $د_٢$ قابلة للاشتقاق عند س وكان $د_٢$ (س) $\neq$ ٠ فإن الدالة $\frac{د_١}{د_٢}$ تكون أيضاً قابلة للاشتقاق عند س ويتحقق :

$$\left(\frac{د_١ (س)}{د_٢ (س)}\right)' = \frac{دَ_١ (س) د_٢ (س) - د_١ (س) دَ_٢ (س)}{[د_٢ (س)]^٢}$$

مثال (٣-١٧)

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

(١) ص = ٣ $س^٢$ − ٥ س + ١

(٢) ص = ($س^٢$ − س) ($س^٣$ − ١)

(٣) ص = $\sqrt[3]{س}$

(٤) ص = $\frac{أس + ب}{حـ س + ء}$

الحـــل :

(١) صَ = ٣ × ٢ س − ٥

= ٦ س − ٥

(٢) ص = (٢ س − ١) (س^{٣} − ١) + ٣ س^{٢} (س^{٢} − س)

= ٥ س^{٤} − ٤ س^{٣} − ٢ س + ١

(٣) ص = س$^{\frac{١}{٣}}$

صَ = $\frac{١}{٣}$ س$^{\frac{١}{٣} - ١}$

= $\frac{١}{٣}$ س$^{- \frac{٢}{٣}}$

= $\frac{١}{٣ \sqrt[3]{س^{٢}}}$

(٤) صَ = $\frac{أ(حـ س + ء) - حـ (أس + ب)}{(حـ س + ء)^{٢}}$

= $\frac{أء - حـ ب}{(حـ س + ء)^{٢}}$

= $\frac{\begin{vmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{vmatrix}}{(حـ س + ء)^{٢}}$

مثال (٣-١٨)

أوجد معادلة المماس لمنحني الدالة ص = $\frac{٣}{س + ١}$

عند النقطة س = ٢

الحـــل :

عندما س = ٢ فإن ص = $\frac{٣}{٢ + ١}$ = ١

ميل المماس يساوي قيمة الدالة المشتقة عند س = ٢

أي : دَ (٢)

$$دَ(س) = \frac{\begin{vmatrix} ٠ & ٣ \\ ١ & ١ \end{vmatrix}}{(س + ١)^٢} \quad \text{(أنظر المثال ٣-١٧)}$$

$$= \frac{-٣}{(س + ١)^٢}$$

$$= \frac{-٣}{٩}$$

$$= -\frac{١}{٣}$$

معادلة المماس عند النقطة (٢ ، ١)

$$ص - ١ = -\frac{١}{٣}(س - ٢)$$

$$ص = -\frac{١}{٣}س + \frac{٥}{٣}$$

مثال (٣-١٩)

أوجد النقط الواقعة على المنحني ص = $\frac{١}{س}$ بحيث يكون المماس فيها موازياً للمستقيم ص = - س

الحـــل :

$$صَ = -\frac{١}{س^٢}$$

ميل المماس = ميل المستقيم المفروض.

= - ١

أي أن : $-\frac{1}{س^2} = -1$

$س^2 = 1 \Leftrightarrow س = \pm 1$

يوجد نقطتان (١ ، ١) ، (−١، −١)

تمارين (٣ – ٤)

في التمارين ١ ـ ١٣ أوجد مشتقة الدالة المذكورة :

١ - $ص = (س - 3)(2س - 1)$

٢ - $ص = (3س + 2)(4س - 5)$

٣ - $ص = 2س^3(س^2 - 2)$

٤ - $ص = (س^2 + 1)(2س - 3)$

٥ - $ص = \frac{س}{س - 3}$

٦ - $ص = \frac{2س + 3}{س - 2}$

٧ - $ص = \frac{س^2 + 1}{2س - 3}$

٨ - $ص = \frac{2س}{س^2 + 3}$

٩ - $ص = \frac{س^2 - س}{س + 1}$

١٠ - $ص = س(س + 1)(س + 2)$

١١ - $ص = \frac{س(س + 1)}{س + 2}$

١٢ - $ص = \frac{2}{س^2} - \frac{3}{س} + 5س^2$

١٣ - $ص = 9س^{\frac{1}{3}}(س^3 + 5)$

في التماريـــن (١٤ - ٢١) أوجد مشتقة الدالة دون اللجوء إلى تبسيط قاعدتها:

١٤ - $ص = (س^{٢} - ٢ س + ١)(٣ س^{٢} + س - ٥)$

١٥ - $ص = (\sqrt{س} + س^{٢})(- ٣ س + ٥)$

١٦ - $ص = ٢ \sqrt{س} + \frac{٤}{\sqrt{س}}$

١٧ - $ص = - ٢ س^{-\frac{٢}{٣}}$

١٨ - $ص = \frac{س}{١ + \sqrt{س}}$

١٩ - $ص = \frac{١ - \sqrt{س}}{١ + \sqrt{س}}$

٢٠ - $ص = \frac{\sqrt{س} - ٣}{\sqrt{س}}$

٢١ - $ص = (س - ٢)(س + ١)$

٢٢ - أوجد المشتقة عند $س = ٢$ لكل من الدالتين المعرفتين كما يلي :

(أ) $ص = (س + ١)(س + ٢)(س + ٣)$

(ب) $ص = \frac{(س - ١)(س - ٢)}{س + ٢}$

٢٣ - أوجد ميل المماس لمنحني الداله $ص = \frac{س}{س + ٢}$ عند النقطة $(١ ، \frac{١}{٣})$ ثم اكتب معادلة مماس المنحني عند تلك النقطة.

٢٤ - لتكن $ص = س^{٣} - ٤ س^{٢} + ٤ س$

أوجد قيم س التي تكون المشتقة عندهامساوية للصفر. كيف يكون وضع المماس للمنحني عند هذه النقط ؟

٢٥- لنفترض أن ع هو عـدد أجهزة (الراديو)التي تبيعهـا إحدى الشـركات أسبـوعياً يتعلق بسعـر بيع الجهاز الواحد س وفقاً للصيغة الآتية:

$$ع = \frac{1000}{س^2 + س} \qquad 100 \leqslant س \leqslant 200$$

(أ) احسب المعدل الآني لتغير الطلب على شراء هذه الأجهزة بالنسبه لسعر بيع الجهاز الواحد.

(ب) احسب معدل هذا التغير عندما يكون $س = 120$ ريالاً وكذلك عندما يكون $س = 150$ ريالاً.

٣ـ٦ التفاضل

نهدف في هذه الفقرة إلى التعرف على مفهوم جديد له صلة وثيقة بالمشتقة ويستفاد منه في نواح متعددة.

تعريف (٣-٥)

ندعو الفرق $د(س_1 + هـ) - د(س_1)$ تغير الداله د عند $س_1$

ونرمز له بـ $\Delta د$:

$$\Delta د = د(س_1 + هـ) - د(س_1)$$

وندعو حاصل الضرب $دَ(س_1).هـ$ تفاضل الدالة د عند $س_1$

ونرمز له بـ $ءد$:

$$ءد = دَ(س_1).هـ$$

سوف نبين فيما يلي أنه إذا كانت هـ صغيرة فإن تغير الدالة يساوي تقريباً تفاضلها أي أن :

$$\Delta د \simeq ءد$$

من المعلوم أن : $دَ(س_1) = \underset{هـ \to 0}{نهـا} \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$

اذن $\underset{هـ \to 0}{نهـا} \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ} - دَ(س_1) = 0$

أي $\underset{هـ \to 0}{نهـا} \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1) - دَ(س_1).هـ}{هـ} = 0$

هذا يعني أن د (س$_1$ + هـ) − د (س$_1$) − دَ (س$_1$) . هـ ≃ .

أي :

د (س$_1$ + هـ) − د (س$_1$) ≃ دَ (س$_1$) . هـ

وهذا يعني أن تفاضل دالة يعتبر قيمة تقريبية جيدة لتغير تلك الدالة .

مثال (٣-٢٠)

قيس طول ضلع مكعب فوجد أنه ٢٠ سم . فإذا كان الخطأ في هذا القياس لا يتعدى ٠,٠٢ سم فما هي القيمة التقريبية للخطأ في حجم المكعب ؟

الحــل :

إن : س = ٢٠ سم و هـ = ٠,٠٢

حجم المكعب ح (س) = س^{٣} ، حَ = ٣ س^{٢}

الخطأ في حجم المكعب = ح (٢٠ + ٠,٠٢) − ح (٢٠)

= (٢٠,٠٢)^{٣} − (٢٠)^{٣} = ٢٤,٠٢٤٠٠٨ سم^{٣}

القيمة التقريبية للخطأ = ءح = حَ (٢٠) (٠,٠٢)

= ٣ (٢٠)^{٢} (٠,٠٢)

= ٢٤ سم^{٣}

مثال (٣-٢١)

لتكن د (س) = س$^{\frac{٢}{٥}}$

أوجد قيمة تقريبية لتغير هذه الدالة إذا زادت س من ٣٢ إلى ٣٤ واستنتج قيمة تقريبية للعدد (٣٤)$^{\frac{٢}{٥}}$

الحــل :

إن دَ (س) = $\frac{٢}{٥}$ س$^{-\frac{٣}{٥}}$ = $\frac{٢}{٥}$ × $\frac{١}{س^{\frac{٣}{٥}}}$

القيمة التقريبية لتغير د هو ء د = د (٣٢) (٢)

$$= \frac{٢}{٥} \times \frac{١}{٣٢^{\frac{٣}{٥}}} (٢) = \frac{٢}{٥} \times \frac{١}{٨} \times ٢ = ٠,١$$

إذاً $(٣٤)^{\frac{٢}{٥}} - (٣٢)^{\frac{٢}{٥}} \simeq ٠,١$

أي أن $(٣٤)^{\frac{٢}{٥}} \simeq (٣٢)^{\frac{٢}{٥}} + ٠,١ = ٤ + ٠,١ = ٤,١$

مثال (٣-٢٢)

احسب قيمة تقريبية للعدد $(٢٦)^{\frac{٢}{٣}}$

الحـــل :

نكوّن الدالة د (س) = $س^{\frac{٢}{٣}}$

ثم نحسب دَ (س) $= \frac{٢}{٣} س^{-\frac{١}{٣}}$

$$= \frac{٢}{٣ س^{\frac{١}{٣}}}$$

ويكون التفاضل : ء د $= \frac{٢}{٣ س^{\frac{١}{٣}}}$ هـ

إذا أخذنا س = ٢٧ و هـ = - ١ نجد:

ء د $= \frac{٢}{٣ (٢٧)^{\frac{١}{٣}}} (-١)$

ء د $= \frac{-٢}{٩} \simeq -٠,٢٢$

إذن : $(٢٦)^{\frac{٢}{٣}} \simeq (٢٧)^{\frac{٢}{٣}} - ٠,٢٢$

أي : $(٢٦)^{\frac{٢}{٣}} \simeq ٩ - ٠,٢٢ = ٨,٧٨$

ملاحظـــة (٣ـ٣) :

يمكن الاستفادة أيضاً من مفهـوم التفاضـل في إعطاء رمـز جديـد لمشتقة دالة . وسوف يكـون لهذا

الرمز، كما سنرى في البند (٣-٧)، أثر جيد في صياغة مبسطة لأهم قواعد الاشتقاق.

لنحسب أولاً تفاضل الداله د (س) = س فنجد

ء س = (س)َ هـ = ١ . هـ

أي أن ء س = هـ

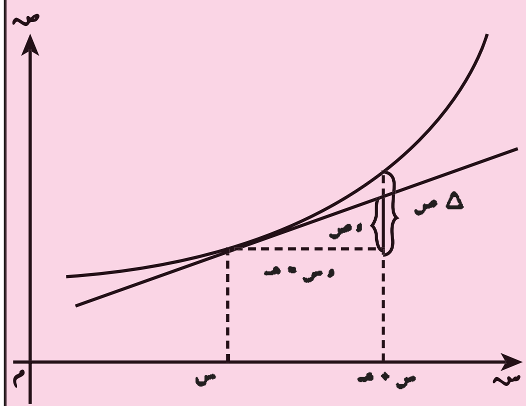
فإذا كانت ص = د (س) فإن ء ص = دَ (س) ء س

وهذا يعنـــي أن :

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{دَ (س)}$$

إن هذه الصيغة تسمح بإعطاء معنى هندسي للتفاضل

انظر الشكل (٣-٦)



شكل (٣-٦)

تمارين (٣ - ٥)

١ - ليكن ص = س^{٢} + ٣ س

احسب ء ص عند س = ٢ حيث ء س = ٠,١

٢ - ليكن ص = $\sqrt{\text{س}}$ + ١

احسب ء ص عند س = ٤ حيث ء س = ٠,١

٣ - ليكن ص = ٦ س - س^{٢}

(أ) احسب Δ ص عند س = ٢ حيث هـ = ٠,١

(ب) احسب ء ص عند س = ٢ حيث ء س = ٠,١

٤ - احسب باستخدام التفاضل قيمة تقريبية لكل من الجذور الآتية:

(أ) $\sqrt[٣]{٢٧,٥٤}$ (ب) $\sqrt[٤]{١٧}$ (جـ) $\sqrt[٣]{٢٨}$

(د) $\sqrt[٥]{٣١,٢}$ (و) $\sqrt[٣]{(٦٣)^{٢}}$

٥ ـ تبيع إحدى الشركات س جهازاً كل شهر فإذا كانت دالة التكلفة معطاة بالصيغة الآتية

ت (س) = ٥٠٠٠٠ + ٤٠ س

وكانت دالة العائد من البيع هي :

$$ع (س) = ٢٠٠ س - \frac{س^{٢}}{٢٠}$$

فاحسب قيمة تقريبية للتغير الذي يحصل في كلٍ من العائد والربح عندما يزداد الانتاج من ١٠٠٠ إلى ١٢٠٠ جهاز

٣ ـ ٧ مشتقة دالة الدالة (قاعدة التسلسل)

إذا أردنا اشتقاق الدالة ص = $(١ + ٢ س)^{٣}$ فإن قواعد الاشتقاق السابقة تمكننا من ذلك بشيء من الجهد. إلا أن تلك القواعد تصبح غير عملية فيما لو حاولنا اشتقاق الدالة ص = $(١ + ٢ س)^{٢٥}$ أو الدالة ص = $\sqrt{س + ٢ س^{٢}}$.

إذن ماهي الوسيلة العملية التي تمكننا من الحصول على مشتقة كل من هذه الدوال.

نلاحظ أولاً أن كلاً من هذه الدوال المذكورة ما هي إلا تركيب دالتين فالدالة ص = $(١ + ٢ س)^{٣}$ يمكن أن تكتب كما يلي ر (س) = ١ + ٢ س ؛ ص = $ر^{٣}$

والدالة ص = $(١ + ٢ س)^{٢٥}$ تكتب كما يلي : ر (س) = ١ + ٢ س ؛ ص = $ر^{٢٥}$

وكذلك الدالة ص = $\sqrt{س + ٢ س^{٢}}$ تكتب : ر (س) = س + ٢ $س^{٢}$ ؛ ص = $ر^{\frac{١}{٢}}$

أي أنه في كل هذه الأمثلة : ص دالة في الدالة ر والدالة ر دالة في س.

إن طبيعة هذا التركيب للدالة ص يوحي لنا بأن حساب مشتقة هذه الدالة بالنسبة إلى المتغير س سوف يتم عن طريق التسلسل.

قاعدة التسلسل :

إذا كانت ص دالة في ر وكانت ر دالة في س فإن :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءر} \times \frac{ءر}{ءس}$$

مثال (٣-٢٣)

احسب مشتقة الدالة $\text{ص} = (١ + ٢\,\text{س})^{٣}$

الحـــل :

$$\text{ر}(\text{س}) = ١ + ٢\,\text{س} \Leftarrow \frac{\text{د ر}}{\text{د س}} = ٢$$

$$\text{ص} = \text{ر}^{٣} \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د ر}} = ٣\,\text{ر}^{٢} = ٣\,(١ + ٢\,\text{س})^{٢}$$

إذن $\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \dfrac{\text{د ص}}{\text{د ر}} \times \dfrac{\text{د ر}}{\text{د س}}$

$$= ٣\,(١ + ٢\,\text{س})^{٢} \times ٢ = ٦\,(١ + ٢\,\text{س})^{٢}$$

مثال (٣-٢٤)

احسب مشتقة الدالة $\text{ص} = (١ + ٢\,\text{س})^{٢٥}$

الحـــل :

$$\text{ر}(\text{س}) = ١ + ٢\,\text{س} \Leftarrow \frac{\text{د ر}}{\text{د س}} = ٢$$

$$\text{ص} = \text{ر}^{٢٥} \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د ر}} = ٢٥\,\text{ر}^{٢٤} = ٢٥\,(١ + ٢\,\text{س})^{٢٤}$$

إذن :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ر}} \times \frac{\text{د ر}}{\text{د س}}$$

$$= ٢٥\,(١ + ٢\,\text{س})^{٢٤} \times ٢ = ٥٠\,(١ + ٢\,\text{س})^{٢٤}$$

مثال (٣-٢٥)

احسب مشتقة الدالة $\text{ص} = \sqrt{\text{س} + ٢\,\text{س}^{٢}}$

الحـــل :

$$\text{ر}(\text{س}) = \text{س} + ٢\,\text{س}^{٢} \Leftarrow \frac{\text{د ر}}{\text{د س}} = ١ + ٤\,\text{س}$$

$$ص = ر^{\frac{1}{2}} \Leftarrow \frac{ءص}{ءر} = \frac{1}{2} ر^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{س + 2 س^2}}$$

اذن :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءر} \times \frac{ءر}{ءس}$$

$$= \frac{1 + 4 س}{2\sqrt{س + 2 س^2}}$$

حساب المعدلات الزمنية :

سنورد في الأمثلة التالية تطبيقات على قاعدة التسلسل تتعلق بحساب المعدلات الزمنية .

مثال (٣-٢٦)

وجد مدير مصنع أن الربح ص يتغير تبعاً لعدد القطع المباعة س وفقاً للصيغة الآتية :

$$ص = (2 س + 1)^2$$

فإذا كان عدد القطع المباعة شهرياً خمس قطع فما هو معدل تغير الربح بالنسبة للزمن عندما يبلغ عدد القطع المباعة ٤٠ قطعة ؟

الحل :

إن الربح ص دالة في عدد القطع المباعة س وإن س بدورها دالة بالنسبة للزمن ىه

والمطلوب هو معرفة $\frac{ءص}{ءىه}$ عندما يبلغ عدد القطع المباعه ٤٠ قطعة .

إن $\frac{ءص}{ءىه} = \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءس}{ءىه}$

$$= 2 (2 س + 1) \times 2 \times \frac{ءس}{ءىه}$$

بما أن س = ٤٠ و $\frac{ءس}{ءىه} = 5$ إذن :

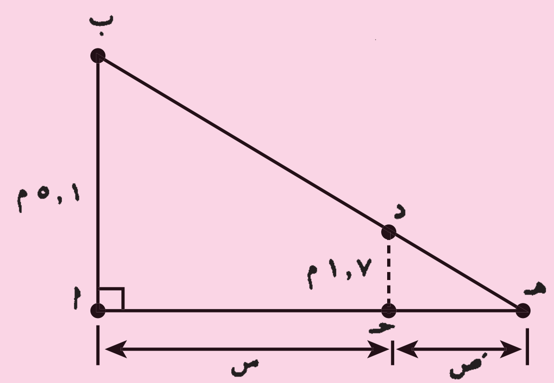
معدل الربح عندما يبلغ المبيع ٤٠ قطعة هو :

$$\frac{ءص}{ءىه} = 2 \times (81) \times 2 \times 5 = 1620$$ ريال .

مثال (٣-٢٧)

رجل طوله ١٧٠ سم يمشي بمعدَّل ١,٥ م/ ث في شارع أفقي معلق فيه مصباح على ارتفاع ٥,١ م عن سطح الأرض.

أوجد معدَّل تغير طول ظل الرجل على أرض الشارع إذا كان الرجل يسير مبتعداً عن المصباح.



الشكل (٣-٧)

الحــل:

في شكـل (٣-٧) تمثل النقـطة ب موقـع المصباح، ا النقـطة الـواقعـة تحت المصبـاح عـلى أرض الشارع. نفرض أن الرجل عند اللحظة ن على بعد: |ا جـ| = س عن النقطة ا

وأن طول ظله حينئذ هو:

|جـ هـ| = ص

والمطلوب هو إيجاد $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ عندما تكون $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = ١,٥ م/ث

بما أن [جـ د] // [ا ب] فإن المثلث جـ د هـ يشابه المثلث ا ب هـ ويكون

$$\frac{|\text{جـ هـ}|}{|\text{ا هـ}|} = \frac{|\text{جـ د}|}{|\text{ا ب}|}$$

$\Leftarrow \dfrac{ص}{س + ص} = \dfrac{١,٧}{٥,١} = \dfrac{١}{٣}$

$٣\ ص = س + ص$

$ص = \dfrac{١}{٢}\ س$

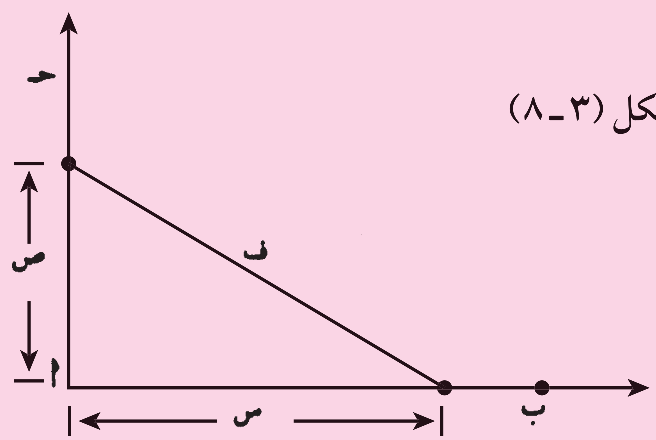
$\dfrac{ءص}{ءن} = \dfrac{١}{٢}\ \dfrac{ءس}{ءن} = \dfrac{١}{٢}\ (١,٥) = ٠,٧٥$ م/ث

أي أن ظل الرجل يزداد طولا بمعدل $\dfrac{٣}{٤}$ متر في الثانية.

مثال (٣-٢٨)

أ ب ، أ حـ طريقان متعامدان، تحركت سيارة من أ متجهة نحو ب بسرعة منتظمة تساوي ٤٠ كم/ ساعة وبعد ساعة واحدة تحركت من أ سيارة أخرى في اتجاه أ حـ بسرعة منتظمة تساوي ٦٠ كم/ ساعة.

أوجد سرعة التباعد بين السيارتين بعد ساعة من انطلاق السيارة الثانية.



شكل (٣ ـ ٨)

الحـــل:

لنفرض أن السيارة الأولى تحركت من أ عند اللحظة ن = صفراً، ثم تبعتها السيارة الثانية عند ن =

١ ساعة، وأن الشكل (٣-٨) يمثل وضع السيارتين عند $ن > ١$، حيث س = المسافة التي قطعتها السيارة الأولى خلال الفترة الزمنية ن أي أن س = ٤٠ ن

ص = المسافة التي قطعتها السيارة الثانية خلال الفترة ن - ١

= ٦٠ (ن - ١)

ف = المسافة بين السيارتين عند اللحظة ن

لاحظ أن س، ص، ف جميعها متغيرات تعتمد على متغير الزمن ن، وأن

$\frac{ءس}{ءن}$ = سرعة السيارة الأولى = ٤٠ كم/ ساعة

$\frac{ءص}{ءن}$ = سرعة السيارة الثانية = ٦٠ كم / ساعة

$\frac{ءف}{ءن}$ = سرعة التباعد بين السيارتين، وهو المعدل المطلوب إيجاده عندما ن = ٢

لاحظ أن هناك علاقة بين المتغيرات س، ص، ف وهي:

$ف^٢ = س^٢ + ص^٢$ من نظرية فيثاغورس

وبمفاضلة هذه المعادلة بالنسبة للمتغير ن (مستخدمين قاعدة التسلسل) نحصل على:

$٢ ف \frac{ءف}{ءن} = ٢ س \frac{ءس}{ءن} + ٢ ص \frac{ءص}{ءن}$ . . . . (١) عندما ن = ٢

ولكن تقييم $\frac{ءف}{ءن}$ عندما ن = ٢ يتطلب معرفة س، ص، ف

وهذا نحصل عليه بالحساب التالي:

س = ٤٠ × ٢ = ٨٠ كم

ص = ٦٠ × ١ = ٦٠ كم

$ف^٢ = ٨٠^٢ + (٦٠)^٢ = ١٠^٢ (٦٤ + ٣٦) = ١٠^٤$ كم^٢

ف = ١٠٠ كم

بالتعويض في المعادلة (١) نحصل على:

$$٢\,(١٠٠)\,\frac{ءف}{ءن} = ٢\,(٨٠)\,(٤٠) + ٢\,(٦٠)\,(٦٠)$$

$$= ٢\,(١٠٠)\,(٣٢ + ٣٦)$$

$$\left(\frac{ءف}{ءن}\right) = ٣٢ + ٣٦ = ٦٨ \text{ كم / ساعة}$$

$$ن = ٢$$

مع أن سرعة كل من السيارتين ثابتة بالنسبة للطريق، إلا أن المعادلة (١) تدل على أن سرعة كل منهما بالنسبة للأخرى، أي $\frac{ءف}{ءن}$ غير ثابتة وإنما تتغير مع مرور الزمن. وما على الطالب إلا أن يحسب $\frac{ءف}{ءن}$ عند ن = ٣ ليتأكد من ذلك.

تمارين (٣ – ٦)

في التمارين ١ ـ ١٠ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ للدالة التي ذكرت قاعدتها

١ ـ $ص = (س^٢ - ٣)^٥$

٢ ـ $ص = \sqrt{س^٢ - ٣س + ٣}$

٣ ـ $ص = \sqrt[٣]{س^٢ - ٣س + ١}$

٤ ـ $ص = (س^٢ - ٣)^{\frac{٣}{٢}}$

٥ ـ $ص = ٣\,(س^٢ - س + ١)^٢\,(١ - س)$

٦ ـ $ص = (س^٢ - ١)\,(٢س + ١)^٢$

٧ ـ $ص = \frac{١}{(س^٢ - ١)^٣}$

٨ ـ $ص = (س^٢ - ١)^٣\,(س^٢ - ٢)^٢$

٩ ـ $ص = \frac{٢س}{\sqrt{س - ٣}}$ ،

١٠ ـ $ص = \frac{س^٢}{\sqrt{س^٢ + ١}}$

١١ ـ نفخ غاز في بالون كروي الشكل بمعدل ٥٠ سم^{٣} / ثانية ماهو معدل تغير طول نصف قطر البالون عندما يكون نصف القطر مساوياً ٥ سم علماً بأن ضغط الغاز في البالون يبقى ثابتاً؟ (حجم الكرة يساوي $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣}).

١٢ ـ وجد أحد المصانع أنه عند بيع س قطعة من انتاجه فإن ربحه ر يعطى وفقاً للصيغة الآتية:

$$ر(س) = (س^{٢} + س)^{٢}$$

فإذا كان معدل البيع هو خمس قطع في الشهر فما معدل الربح عند بيع أربعين قطعة؟

١٣ ـ اسطوانة دائرية قائمة يزداد نصف قطر قاعدتها بمعدل ٥ سم في الدقيقة وينقص ارتفاعها بمعدل ١٢ سم في الدقيقة . أوجد معدل تغير حجم الاسطوانة في اللحظة التي يكون فيها نصف قطر القاعدة ٢٠ سم والارتفاع ٣٠ سم . (حجم الاسطوانه = ط نق^{٢} ع)

١٤ ـ سلَّم طوله ٣٠ دسم يستند برأسه على حائط رأسي وطرفه السفلي على أرض أفقية . فإذا سُحب طرفه السفلي بسرعة ٣٠ سم/ثانية مبتعداً عن الحائط، فاحسب معدَّل سرعة انزلاق رأس السلم على الحائط في اللحظة التي يبعد طرفه السفلي عن الحائط ١٢ دسم .

١٥ ـ كرة من المعدن تتمدد بالحرارة، فإذا كان معدل تزايد نصف قطرها ٢ مم في الدقيقة أوجد معدل تزايد مساحة سطح الكرة ومعدل تزايد حجمها عندما يكون طول نصف القطر ٧ سم .(سطح الكرة = ٤ ط س^{٢}، حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ ط س^{٣}).

١٦ ـ صفيحة معدنية على شكل معين قياس إحدى زواياه يساوي ٦٠°، فإذا كانت تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها فأوجد معدل تزايد مساحتها في اللحظة التي يكون فيها معدل تزايد طول ضلعها $\frac{١}{٤}$ سم / ث، وطول هذا الضلع يساوي ٤ سم .

١٧ ـ يجري ولد بسرعة ٢ م/ث في خط متجها نحو عمود ارتفاعه ٦ م . أوجد معدل تغير المسافة بين الولد وقمة العمود عندما يكون على بعد ٨ م من قاعدة العمود .

الخلاصة

في هذا الباب تعرفنا على ما يلي:

١ ـ متوسط تغير دالة د (س) بين $س_١$ و $س_٢$ هو:

$$\frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

٢ ـ معدل تغير دالة د (س) عند س = $س_١$ هو:

$$\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$ إن جدت هذه النهاية

٣ ـ مشتقة داله د (س) عند س = $س_١$ هي:

$$\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$ إن جدت هذه النهاية.

٤ ـ قواعد الاشتقاق التالية:

الدالة	الدالة المشتقة
(١) د (س) = حـ (ثابت)	$دَ(س) = ٠$
(٢) د (س) = $س^ن$	$دَ(س) = ن\, س^{ن-١}$
(٣) د (س) = حـ • $د_١(س)$	$دَ(س) = حـ\, دَ_١(س)$
(٤) د (س) = $د_١(س) + د_٢(س)$	$دَ(س) = دَ_١(س) + دَ_٢(س)$
(٥) د (س) = $د_١(س) - د_٢(س)$	$دَ(س) = دَ_١(س) - دَ_٢(س)$
(٦) د (س) = $د_١(س) • د_٢(س)$	$دَ(س) = دَ_١(س)\, د_٢(س) + د_١(س)\, دَ_٢(س)$
(٧) د (س) = $\frac{د_١(س)}{د_٢(س)}$ ، $د_٢(س) \neq ٠$	$دَ(س) = \frac{دَ_١(س)\, د_٢(س) - د_١(س)\, دَ_٢(س)}{[د_٢(س)]^٢}$

٥ ـ ووجدنا أن دَ (س$_{١}$) ما هي إلا معدل تغير الدالـة د (س) وذلك عنـد النقطة س = س$_{١}$ وأنها ميل مماس المنحني ص = د (س) وذلك عند النقطة (س$_{١}$ ، د (س$_{١}$)). وبناءً على هذا التعريف وجدنا:

معادلة المماس للمنحني د (س) عند النقطة (س$_{١}$ ، د (س$_{١}$)):

$$ص - ص_{١} = دَ (س_{١}) (س - س_{١})$$

٦ ـ ثم انتقلنا بعد ذلك إلى تعريف تفاضل دالة د :

$$ءد = دَ (س) هـ$$

واستخدمنا هذا الرمز لصياغة قاعدة التسلسل :

إذا كانت ص دالة في ع وكانت ع دالة في س فإن :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$$

٧ ـ وبصورة خاصة :

فإذا كانت : د (س) = $[د_{١} (س)]^{ن}$

فإن : دَ (س) = ن $[د_{١} (س)]^{ن-١}$ × دَ$_{١}$ (س)

٨ ـ انتقلنا أخيراً إلى تطبيقات على المعدلات الزمنية .

تمارين عامة

١ ـ لنفترض أن جسماً قذف إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٣ م/ث فكانت المسافة ف التي قطعها الجسم بعد مضي ٮ ثانية معطاة حسب الصيغة الآتية: ف = ٣ ٮ - ٥ ٮ^{٢}

(أ) احسب السرعة المتوسطة للجسم في الفترة بين ٮ و ٮ + هـ

(ب) احسب سرعة الجسم في اللحظة ٮ .

(جـ) ما هو الزمن اللازم انقضاؤه حتى تصبح سرعة الجسم مساوية الصفر ؟

(د) ما هو أعلى ارتفاع يمكن أن يصل إليه هذا الجسم ؟

٢ ـ إن بعدي مستطيل يتغيران بحيث تبقى مساحة المستطيل ثابتة. أوجد معدل تغير طول هذا المستطيل بالنسبة إلى عرضه.

٣ ـ أوجد معدل تغير حجم مكعب بالنسبة إلى مساحة أحد وجوهه.

٤ ـ ليكن لدينا المنحني الذي دالته د (س) = س^{٢} + س

(أ) أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (١ ، د (١)) و (٣ ، د (٣))

(ب) أوجد ميل مماس المنحني عند النقطة (١ ، د (١))

(جـ) أوجد معادلة المماس للمنحني عند النقطة (١ ، د (١))

٥ ـ يتزايد نصف قطر بالون كروي بمعدل ٣ سم بالدقيقة. أحسب معدل تغير حجم البالون بالنسبة للزمن عند ما يكون نصف قطره مساوياً ١٠ سم إذا علمت أنْ نصف قطر البالون الابتدائي ٤ سم.

٦ ـ بتصاعد بالون إلى أعلى بمعدل ٥ أمتار بالثانية اعتباراً من سطح الأرض. اذا وقف شخص على بعد ٣٠٠ متر من مكان انطلاق البالون فما هو معدل تغير المسافة بين الشخص والبالون بالنسبة للزمن عندما يكون ارتفاع البالون عن سطح الأرض مساوياً ٤٠٠ متر ؟

٧ ـ تنتج إحدى الشركات عدداً من الأجهزة أسبوعياً مقداره س. لنفترض أن التكلفة ت والعائد ع والربح ر دوال معطاه بالصيغ الآتية:

$$ت(س) = ٥٠٠٠٠ + ٢٠ س$$

$$ع(س) = ٢٠٠ س - \frac{س^٢}{٢٠}$$

$$ر(س) = ع(س) - ت(س)$$

فإذا كان معدل تغير الإنتاج هو ٥٠ جهازاً أسبوعياً فما هو معدل تغير الدوال ت ، ع ، ر عندما يبلغ الانتاج ٦٠٠ جهاز.

احسب $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ١ لكل من الدوال الآتية :

٨ - $ص = \frac{س}{\sqrt{٤ - س^٢}}$

٩ - $ص = (س + ٢)^٢ \sqrt{س^٢ + ٢}$

١٠ - $ص = س \sqrt[٣]{٢ + ٣ س}$

١١ - $ص = \frac{س^٢ + ٢}{٢ - س^٢}$

١٢ - احسب باستخدام التفاضل قيمة تقريبية للتغير في حجم مكعب عندما يزداد طول كل ضلع من أضلاعه بمقدار هـ.

١٣ - سلّم طوله ٥ م يستند بأحد طرفيه على أرض أفقية وبطرفه الآخر على حائط رأسي، فإذا كانت قاعدة السلّم تنزلق مبتعدة عن الحائط بمعدل ٦ سم/ثانية فأوجد معدل انزلاق الطرف الآخر للسلم على الحائط في اللحظة التي تكون فيها قاعدة السلم على بعد ٣ م من الحائط.

١٤ - يمشي رجل بسرعة ٢ م/ث في شارع أفقي معلق به مصباح على ارتفاع ٦ م من سطح الشارع. فإذا كان طول الرجل ١٨٠ سم فأوجد سرعة طرف ظل الرجل عندما يكون على مسافة ٩ م من قاعدة عمود المصباح.

١٥ - تحرك رجل من نقطة بسرعة ٤ كيلومتر / ساعة في اتجاه الشرق، وبعد ساعة من ذلك تحرك شخص آخر من النقطة نفسها متجها نحو الشمال بسرعة ٦ كيلومتر / ساعة. أوجد سرعة التباعد بين الرجلين بعد ساعة أخرى.

شركة المطابع الأهلية للأوفست المحدودة
National Offset Printing Press Ltd. Co.
الرياض - المملكة العربية السعودية