



الرياضيات

للمصف الأول الثانوي

الفصل الدراسي الثاني

(تعليم عام - تحفيظ قرآن)

تأليف :

د. سلمان عبدالرحمن السلطان
د. عبدالله محمد الراشد
د. عبدالله المقوشي
د. محمد أمين شاكر
د. محمد عبدالرحمن القويز
د. فوزي أحمد الذكير
د. عبدالرحمن أبوعمة

ح وزارة التربية والتعليم ، ١٤١٩ هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
السعودية، وزارة التربية والتعليم
الرياضيات : للصف الأول الثانوي : الفصل الدراسي الثاني - ط ٥ - الرياض
٢٣٢ ص ؛ ٢٣x٢١ سم
ردمك : ٤ - ٢١٦ - ١٩ - ٩٩٦٠ (مجموعة)
٠ - ٢١٨ - ١٩ - ٩٩٦٠ (ح ٢)
١ - الرياضيات - كتب دراسية ٢ - السعودية - التعليم الثانوي - كتب دراسية
أ - العنوان
ديوي ٥١٠،٠٧١٢ / ١٩ / ٢١٨٨

لهذا الكتاب قيمة مهمة وفائدة كبيرة فلنحافظ عليه
ونجعل نظافته تشهد على حسن سلوكنا معه...

إذا لم تحتفظ بهذا الكتاب في مكتبتنا الخاصة في آخر
العام للاستفادة فلنجعل مكتبة مدرستنا تحتفظ به...

موقع الوزارة

www.moe.gov.sa

موقع الإدارة العامة للمناهج

www.moe.gov.sa/curriculum/index.htm

البريد الإلكتروني للإدارة العامة للمناهج

curriculum@moe.gov.sa

حقوق الطبع والنشر محفوظة

لوزارة التربية والتعليم

بالمملكة العربية السعودية



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

مقدمة

الحمد لله رب العالمين علّم بالقلم، علّم الإنسان ما لم يعلم. والصلاة والسلام على سيدنا محمد سيد الأولين والآخرين، بُعث معلماً وهادياً وعلى آله وصحبه أجمعين.

أما بعد، فإننا نقدم لأبنائنا طلبة وطالبات المرحلة الثانوية الجزء الثاني من كتاب الرياضيات للصف الأول الثانوي، وفق المنهج الذي اعتمده وزارة التربية والتعليم والذي تمت مناقشته في ندوة ضمّت ممثلين للجامعات السعودية وعدداً من الباحثين والمربين والميدانيين من مناطق مختلفة من المملكة، وذلك خلال الفترة ٩-١٠ جمادى الآخرة لعام ١٤٠٦هـ.

جاء هذا الجزء امتداداً لما سبق أن قدمناه في الجزء الأول من هذا الكتاب، وعلى النهج نفسه الذي قدم فيه ذلك الجزء من حيث مراعاة طبيعة هذا الصف الذي هو مفترق طرق بين اتجاهات التعليم المختلفة، ومن حيث ربط المفاهيم بحياة الطالب والطالبة العملية وبالمفاهيم التي يتلقاها الطالب والطالبة في المواد الدراسية الأخرى، وكذلك بما يصادفه الطالب والطالبة في هذا العصر من معطيات تقنية بالإضافة إلى تراثنا المشرق خلال حضارتنا الإسلامية الزاهرة.

يضم هذا الجزء أربعة أبواب هي :

الباب الخامس : المتباينات.

الباب السادس : حساب المثلثات.

الباب السابع : الدوال الأسية واللوغاريتمية .

الباب الثامن : الإحصاء.

وكما قلنا في مقدمة الجزء الأول من الكتاب، فقد تم عرض المفاهيم بشكل يساعد الطالب والطالبة على التعلم الذاتي إذا أراد، لذا فقد بنيت المفاهيم على

معلومات الطالب والطالبة السابقة، وتم إيضاحها من خلال أمثلة متنوعة، لعلها تساعد غالبية أبنائنا على استيعاب هذه المفاهيم، ونصيحتنا لهم بالاعتماد، بعد توفيق الله تعالى، على الكتاب سعياً وراء ذلك .

أملنا أن تصلنا من إخواننا المدرسين والمدرسات ملحوظاتهم مفصلة على ما فيه، من خلال التطبيق العملي الميداني، شاكرين لهم تعاونهم البناء، والله ولي التوفيق.

وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين

وصلى الله على سيدنا محمد وآله وصحبه.

المؤلفون

الفهرس

٨	الباب الخامس : المتباينات	٨
٩	١-٥ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي والفترات الحقيقية	٩
١٦	٢-٥ متباينات الدرجة الأولى في ح	١٦
٢٥	تمارين (١-٥)	٢٥
٢٧	٣-٥ المتباينات الخطية في متغيرين	٢٧
٣٦	تمارين (٢-٥)	٣٦
٣٧	تمارين عامة على الباب الخامس	٣٧
٣٨	الباب السادس : حساب المثلثات	٣٨
٣٩	١-٦ نبذة تاريخية	٣٩
٤٠	٢-٦ الزوايا وقياسها	٤٠
٤٥	تمارين (١-٦)	٤٥
٤٧	٣-٦ الدوال المثلثية للزوايا الحادة	٤٧
٥١	تمارين (٢-٦)	٥١
٥٢	٤-٦ العلاقة بين الدوال المثلثية والمثلث قائم الزاوية	٥٢
٥٤	تمارين (٣-٦)	٥٤
٥٦	٥-٦ بعض العلاقات المثلثية	٥٦
٥٩	تمارين (٤-٦)	٥٩
٦٠	٦-٦ الجداول المثلثية والحاسبات واستخداماتها	٦٠
٦٥	٧-٦ حساب الارتفاعات والأبعاد	٦٥
٦٨	تمارين (٥-٦)	٦٨
٧٠	تمارين عامة على الباب السادس	٧٠
٧٤	الباب السابع : الدوال الأسية واللوغاريتمية	٧٤
٧٥	١-٧ الأسس	٧٥
٧٧	تمارين (١-٧)	٧٧
٨١	تمارين (٢-٧)	٨١
٨٩	تمارين (٣-٧)	٨٩
٩١	٢-٧ الجذور	٩١
٩٨	تمارين (٤-٧)	٩٨
١٠٦	تمارين (٥-٧)	١٠٦

١٠٨ الدالة الأسية	٣-٧
١١٣ تمارين (٦-٧)	
١١٤ تطبيقات جبرية	٤-٧
١١٥ تمارين (٧-٧)	
١١٦ تعريف اللوغاريتم - الدالة اللوغاريتمية	٥-٧
١٢٤ تمارين (٨-٧)	
١٢٥ قوانين اللوغاريتمات	٦-٧
١٣١ تمارين (٩-٧)	
١٣٣ اللوغاريتمات العشرية	٧-٧
١٤٥ تمارين (١٠-٧)	
١٤٦ الاستفادة من اللوغاريتمات في إجراء الحسابات	٨-٧
١٥٢ تمارين (١١-٧)	
١٥٣ تمارين عامة على الباب السابع	
١٥٧ الباب الثامن : الإحصاء	
١٥٨ مقدمة	١-٨
١٦١ جمع البيانات	٢-٨
١٦٥ تمارين (١-٨)	
١٦٥ التوزيعات والجداول التكرارية	٣-٨
١٧٤ التمثيل البياني للجداول التكرارية	٤-٨
١٨٤ تمارين (٢-٨)	
١٨٨ المتوسطات	٥-٨
٢٠٦ تمارين (٣-٨)	
٢٠٩ الانحراف المعياري	٦-٨
٢١٨ تمارين (٤-٨)	
٢٢٠ تمارين عامة على الباب الثامن	
٢٢٢ إجابة تمارين الجزء الثاني	

الباب الخامس

المتباينات

٥ - ١ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي والفترات الحقيقية .

٥ - ٢ متباينات الدرجة الأولى بمتغير واحد .

٥ - ٣ المتباينات الخطية في متغيرين .

٥ - ١ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي والفترات الحقيقية

لقد سبق لك أن درست في المرحلة المتوسطة مفهوم القيمة المطلقة لعدد، وفي هذا البند سنبدأ بتعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي ونقدم بعض الخصائص لهذا المفهوم.

تعريف (٥ - ١):

إذا كان a عدداً حقيقياً فإن القيمة المطلقة لـ a ونرمز لها بالرمز $|a|$ تُعرّف على النحو التالي:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ إذا كان } a < 0 \\ \bullet \text{ إذا كان } a = 0 \\ \bullet \text{ إذا كان } a > 0 \end{array} \right\} = |a|$$

مثال (٥-١):

أوجد القيمة المطلقة للأعداد 7 ، $-\sqrt{2}$ ، $1 - \sqrt{5}$

الحل:

بما أن العدد $7 > 0$

$$7 = |7|$$

أما العدد $-\sqrt{2}$ فإنه سالب، أي $-\sqrt{2} < 0$

$$\sqrt{2} = (\sqrt{2} -) - = |\sqrt{2} - |$$

وكذلك فإن $1 - \sqrt{5} > 0$ (لماذا؟)

$$1 - \sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1) - = |\sqrt{5} - 1|$$

نستنتج من هذا المثال أن مفهوم القيمة المطلقة للعدد الحقيقي ما هو إلا عملية التخلص من الإشارة السالبة للعدد إن وُجدت، أي أن القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي هو عدد غير سالب ويمكن التعبير عن ذلك رمزياً بقولنا:

$$|x| \geq 0$$

مثال (٢-٥):

(١) ماهي قيمة $\frac{s}{|s|}$ من أجل أي عدد موجب؟ ومن أجل أي عدد (سالب)؟

$$(٢) \text{ حل المعادلة: } |s| = 4$$

(٣) أوجد المسافة بين النقطتين الممثلتين للعددين ٣، ١١ على خط الأعداد.

الحل:

$$(١) \text{ عندما } s < 0 \text{ فإن } |s| = -s \text{ وعليه: } \frac{s}{|s|} = \frac{s}{-s} = -1$$

$$\text{وعندما } s > 0 \text{ فإن } |s| = s \text{ وعليه: } \frac{s}{|s|} = \frac{s}{s} = 1$$

(٢) $|s| = 4$ يعني أن النقطة الممثلة لقيمة s على خط الأعداد تبعد عن ٤

(الممثلة للصفر) ٤ وحدات طول، وعليه فإنه توجد قيمتان تحققان المعادلة

$$s = 4, s = -4$$

تحقق من ذلك.

(٣) المسافة بين النقطتين ١١ ، ٣ الممثلتين للعددين ١١ ، ٣ على الترتيب كما في الشكل:



$$٨ = |٣ - ١١| = |١١ - ٣| \text{ هي}$$

$$٨ = |-٨| = |١١ - ٣| = |١١ - ٣| \text{ وكان بإمكانك أن تكتب:}$$

خواص القيمة المطلقة لعدد حقيقي:

نورد الآن بعض خواص القيمة المطلقة لعدد حقيقي من خلال النظرية التالية:

نظرية (١-٥):

إذا كان ١ ، $ب$ عددين حقيقيين فإن:

$$||١ - ب|| = ||ب - ١|| \text{ (١)}$$

$$||ب - ١|| \leq ب \leq ||ب|| \text{ (٢)}$$

$$||ب \cdot ١|| = |ب| \cdot ||١|| \text{ (٣)}$$

$$ب \neq ٠ \quad \frac{||ب||}{|ب|} = \left| \frac{١}{ب} \right| \text{ (٤)}$$

البرهان:

الخاصتان (١)، (٢) يترك برهانها للطالب انطلاقاً من التعريف (١-٥) وذلك باستقصاء جميع الحالات الممكنة.

(٣) لبرهان هذا الجزء نستعمل الحقيقة $||ب|| = \sqrt[٢]{ب^٢}$ لأي عدد حقيقي $ب$ والتي نستنتجها من تعريف الجذر التربيعي $\sqrt[٢]{ب}$ ونعني به الجذر التربيعي غير السالب

للعدد، كما رأيت في المرحلة المتوسطة ،

$$\sqrt{ab} = |a| \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt{a^2 b} =$$

$$\sqrt{a^2} \sqrt{b} =$$

$$|a| \sqrt{b} =$$

$$|a| = b \times \frac{|a|}{b} \quad (4)$$

$$|a| = |b \times \frac{|a|}{b}| \Leftrightarrow$$

$$\text{من الفقرة (3)} \quad |a| = |b| \left| \frac{|a|}{b} \right| \Leftrightarrow$$

$$\text{لأن } |b| \neq 0 \quad \frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{|a|}{b} \right| \Leftrightarrow$$

الفترات الحقيقية :

ليكن a, b عددين حقيقيين إن :

(1) المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية $\{s \in \mathbb{R} : a \leq s \leq b\}$ والتي

نرمز لها بالرمز $[a, b]$ تسمى الفترة المغلقة من a إلى b ونمثّلها على خط

الأعداد كما في الشكل (5-1).

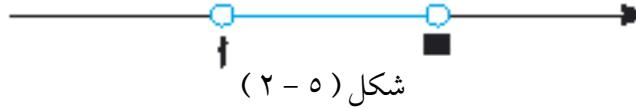


شكل (5-1)

(2) المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية $\{s \in \mathbb{R} : a < s < b\}$ والتي

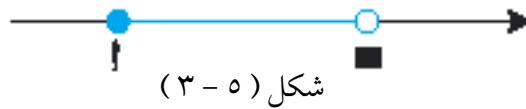
نرمز لها بالرمز (a, b) أو $]a, b[$ تسمى الفترة المفتوحة من a إلى b

ونمثلها على خط الأعداد الحقيقية كما في الشكل (٥ - ٢) .

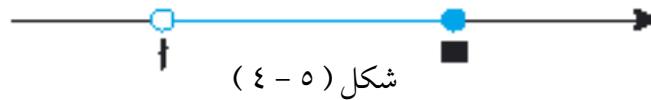


لاحظ أن الدائرتين الفارغتين عند النقطتين a ، b تعنيان أن a ، b لا ينتميان إلى الفترة (a, b) .

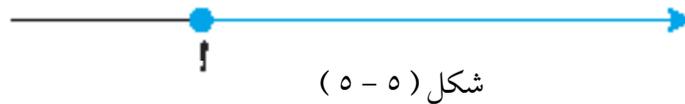
(٣) المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية $\{s \in \mathbb{R} : a \leq s < b\}$ والتي نرمز لها بالرمز $[a, b)$ أو $[a, b[$ ، الممثلة بالشكل (٥ - ٣)،



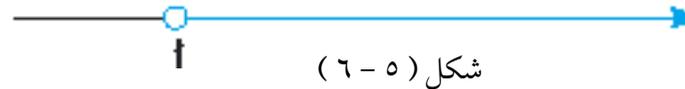
والمجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية $\{s \in \mathbb{R} : a < s \leq b\}$ ونرمز لها بالرمز $(a, b]$ أو $]a, b]$ ، الممثلة بالشكل (٥ - ٤) يطلق على كل منهما اسم الفترة نصف المفتوحة (أو نصف المغلقة) من a إلى b .



نستعمل الرمز $[a, \infty)$ للدلالة على المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية $\{s \in \mathbb{R} : s \geq a\}$ الممثلة بالشكل (٥ - ٥).



والرمز (a, ∞) للدلالة على المجموعة الجزئية $\{s \in \mathbb{R} : s < a\}$ الممثلة بالشكل (٥ - ٦).



نستعمل الرمز $(-\infty, a]$ للدلالة على المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية $\{s \in \mathbb{R} : s \geq a\}$ الممثلة بالشكل (٧-٥)،



شكل (٧-٥)

والرمز $(-\infty, a)$ للدلالة على المجموعة الجزئية $\{s \in \mathbb{R} : s > a\}$ الممثلة بالشكل (٨-٥).



شكل (٨-٥)

إن الرمز $(-\infty, \infty)$ يعني مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} - ولعلّه من المناسب هنا أن نؤكد أن الرمز ∞ و $-\infty$ ليسا عددين حقيقيين.

ملحوظة (٥-١):

إن الفترات $[a, b]$ ، (a, b) ، $[a, b)$ ، $(a, b]$ تسمى فترات محدودة لأن طول قطعة المستقيم التي تمثل أيّاً منها يساوي $b - a$ ، كما تعلم، أما الفترات $[a, \infty)$ ، $(-\infty, a]$ ، $(-\infty, \infty)$ ، $(\infty, a]$ ، (a, ∞) تسمى فترات غير محدودة.

مثال (٥-٣):

مثل المجموعات التالية على خط الأعداد، ثم عبّر عنها باستعمال ترميز الفترات بأبسط ما يمكن.

$$(1) \quad [3, 7] - \mathbb{Z} \quad (2) \quad [1, 4)$$

$$(2) \quad [7, 3) \quad (3) \quad [1, 4) \cap (3, 7]$$

$$(3) \quad [1, 4) \cup (3, 7]$$

الحل:

(١) تمثيل الفترة $(-١, ٤)$ هو



(٢) تمثيل الفترة $[٣, ٧]$ هو



(٣) تمثيل اتحاد الفترتين $(-١, ٤)$ و $[٣, ٧]$ هو كما في الشكل .



وهذه المجموعة هي الفترة $[٧, -١]$

$$[٧, -١] = [٧, ٣) \cup (-١, ٤]$$

(٤) المجموعة $\mathbb{R} - [٧, ٣)$ هي متممة المجموعة الممثلة في (٢) ويكون

تمثيلها كما في الشكل .



هذه المجموعة هي اتحاد الفترتين $(-\infty, ٣)$ و $(٧, \infty)$ ، أي أن:

$$\mathbb{R} - [٧, ٣) = (-\infty, ٣) \cup (٧, \infty)$$

(٥) تمثيل $(-١, ٤) \cap [٧, ٣)$ هو تقاطع المجموعتين الممثلتين في

(١) و (٢) كما في الشكل



$$(-١, ٣) = (-١, ٣) \cap (-١, ٤]$$

٥ - ٢ متباينات الدرجة الأولى في \mathbb{Z}

درست في المرحلة المتوسطة حل المتباينات (المتراجحات) من الدرجة الأولى بمتغير واحد في كل من مجموعة الأعداد الصحيحة \mathbb{Z} ومجموعة الأعداد النسبية \mathbb{Q} ، كما درست نظم متباينات (متراجحات) الدرجة الأولى في مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} .

في هذا البند سنقوم بمراجعة موضوع متباينات الدرجة الأولى في \mathbb{Z} كما نقوم بتقديم متباينات تحتوي على عبارات جبرية ترد فيها القيمة المطلقة. نبدأ هذا البند بتقديم حقائق تتعلق بالمتباينات بصورة عامة.

إذا كانت $\mathbb{D} (س) > \mathbb{M} (س)$ و $\mathbb{D} (س) < \mathbb{M} (س)$ عبارتين جبريتين في المتغير $س$ ، فالشكل العام

للمتباينات في \mathbb{Z} هو $\mathbb{D} (س) > \mathbb{M} (س)$ أو $\mathbb{D} (س) \geq \mathbb{M} (س)$

تعريف (٥ - ٢) :

إذا كانت $\mathbb{D} (س) > \mathbb{M} (س)$ أو $\mathbb{D} (س) \geq \mathbb{M} (س)$ متباينة في \mathbb{Z} فإن مجموعة حلها هي مجموعة الأعداد الحقيقية التي لو أبدلنا ها بالمتغير $س$ لحققت شرط المتباينة.

تعريف (٥ - ٣) :

يقال عن متباينتين في \mathbb{Z} إنهما متكافئتان إذا كان لهما مجموعة الحل نفسها

خصائص المتباينات :

إن الخصائص التالية للمتباينات سبق أن تعرّفنا عليها في المرحلة المتوسطة

ونلخصها فيما يلي :

$$(1) \text{ المتباينة } D > M \text{ (س)} \Leftrightarrow$$

$$D > M \text{ (س)} + (س) > M + (س) \text{ (س)} \quad (-1 \ 5)$$

$$(2) \text{ المتباينة } D > M \text{ (س)} \Leftrightarrow$$

$$D \times (س) > M \times (س) \text{ (س)} \quad (2 - 5)$$

إذا كانت $(س) < 0$

$$(3) \text{ المتباينة } D > M \text{ (س)} \Leftrightarrow$$

$$D \times (س) < M \times (س) \text{ (س)} \quad (3 - 5)$$

إذا كانت $(س) > 0$

حيث $(س)$ عبارة جبرية بالمتغير $س$

ملحوظة (٢-٥):

إن الحقائق السابقة تبقى سارية إذا كان لدينا $D \geq M \text{ (س)}$ بدلاً من

$D > M \text{ (س)}$.

متباينات الدرجة الأولى في \mathbb{Z}

مثال (٤-٥):

حل المتباينة التالية ثم مثل حلها على خط الأعداد الحقيقية:

$$\sqrt{2} < \frac{س - 5}{3}$$

الحل:

بضرب طرفي المتباينة في ٣ نحصل على المتباينة المكافئة:

$$س - 5 < 3\sqrt{2} \quad \text{حسب الخاصة (٢-٥)}$$

وبإضافة ٥ إلى طرفي المتباينة نحصل على :

$$س < ٥ + \sqrt{٣}$$

وهي تكافئ المتباينة (٥ - ٢) حسب الخاصة (٥ - ١) .

إذن مجموعة حل المتباينة المطلوب حلها هي $\{س \in \mathbb{R} : س < ٥ + \sqrt{٣}\}$

وهي الفترة $(-\infty, ٥ + \sqrt{٣})$ ويمكن تمثيلها على خط الأعداد كما في الشكل :



قبل أن نقوم بحل متباينات من الدرجة الأولى بمتغير واحد وتحتوي على القيمة المطلقة لا بد لنا من أن نقدم حقيقتين هامتين تتعلق بالقيمة المطلقة وذلك من خلال النظريتين التاليتين :

نظرية (٥ - ٢) :

إذا كان $ا$ ، $ب$ عددين حقيقيين وكان $ب \leq ٠$ فإن :

$$|ا| \geq ب \Leftrightarrow ب - ا \geq ب$$

البرهان :

(١) سنبرهن أولاً أن : $|ا| \geq ب \Leftrightarrow ب - ا \geq ب$.

إذا كان $ا \leq ٠$ فإن $|ا| = -ا$ حسب التعريف (٥ - ١)

أي أن : $|ا| \geq ب \Leftrightarrow ب \geq ا$

$\Leftrightarrow ب - ا \geq ب$ لأن $ب \leq ٠$ بالفرض

وإذا كان $a > 0$ فإن $|a| = a$ حسب التعريف (٥ - ١)

أي أن: $|a| \geq b \Leftrightarrow a \geq b$

بعد الضرب في -1

$\Leftrightarrow a \leq -b$

$\Leftrightarrow -b \leq a$ لأن $a > 0$ ، $b \leq 0$

(٢) سنبرهن ثانياً العكس وهو: $-b \leq a \leq b \Leftrightarrow |a| \geq b$.

فنفرض أن $-b \leq a \leq b$

فإذا كانت $a \leq 0$ فإن $|a| = -a$ والمتباينة الثانية من الفرض تصبح $|a| \geq b$

وإذا كانت $a > 0$ فإن $|a| = a$ والمتباينة الأولى من الفرض تصبح

$|a| \geq b$

وبالضرب في -1 تصبح المتباينة الأخيرة $|a| \geq b$.

ملحوظة (٥ - ٣):

في الحالة التي فيها $|a| > b$ تكون المتباينة المكافئة لها: $-b > a > b$.

نظرية (٥ - ٣):

إذا كان a ، b عددين حقيقيين فإن:

$|a| \leq b \Leftrightarrow a \leq b$ أو $a \geq -b$

البرهان مشابه في خطواته لبرهان نظرية (٥ - ٢) لذا نتركه كتمرين للطلاب

(انظر تمرين ٣ في نهاية هذا البند).

مثال (5-5):

حل المتباينة التالية ومثل حلها على خط الأعداد:

$$4 \geq \left| \frac{s-2}{5} \right|$$

الحل:

باستخدام نظرية (5-2) تكون المتباينة المكافئة لها:

$$4 \geq \frac{s-2}{5} \geq -4$$

بضرب جميع الأطراف بالعدد 5 نحصل حسب الخاصية (5-2) على المتباينة

$$20 \geq s-2 \geq -20$$

وبإضافة العدد 2 إلى الأطراف الثلاثة نحصل حسب الخاصية (5-1) على

المتباينة المكافئة:

$$22 \geq s \geq 18$$

نستنتج أن مجموعة حل المتباينة هي $\{s \mid 18 \leq s \leq 22\}$

وهذه هي الفترة $[18, 22]$ التي تمثيلها كما في الشكل:



مثال (5-6):

حل المتباينة التالية ومثل حلها على خط الأعداد:

$$2 \leq |s-1|$$

الحل:

حسب نظرية (5-3) تكون المتباينة مكافئة للعبارة:

$$\text{س} - 1 \leq 2 \text{ أو } \text{س} - 1 \geq -2$$

$$\Leftrightarrow \text{س} \leq 3 \text{ أو } \text{س} \geq -1 \text{ حسب الخاصة (5-1)}$$

$$\Leftrightarrow \text{س} \in (-\infty, 3] \text{ أو } \text{س} \in [-1, \infty)$$

$$\Leftrightarrow \text{س} \in [-1, \infty) \cup (-\infty, 3]$$

إذن مجموعة حل المتباينة هي $[-1, \infty) \cup (-\infty, 3]$ التي تمثيلها كما

في الشكل :



نظام متباينات الدرجة الأولى في \mathbb{Z}

إن نظام متباينات من الدرجة الأولى هو مجموعة من متباينات الدرجة الأولى مرتبطة بالرابطة المنطقي «و» أو بالرابطة المنطقي «أو»، على سبيل المثال المتباينة الواردة في المثال (5-5) هي في حقيقة الأمر نظام يتكوّن من متباينتين مرتبطتين بالرابطة «و» كما هو مبين فيما يلي :

$$\text{س} \geq \frac{-2}{5} \text{ و } \text{س} \leq \frac{-4}{5}$$

كذلك المتباينة الواردة في المثال (5-6) هي في حقيقة الأمر نظام يتكون من متباينتين مرتبطتين بالرابطة «أو» وهو :

$$\text{س} - 1 \leq 2 \text{ أو } \text{س} - 1 \geq -2$$

مثال (5-7) :

أوجد حل النظام التالي ومثل مجموعة الحل على الخط الأعداد :

$$10 - \text{س} > 17 \text{ و } |\text{س}| \geq 12$$

الحل:

المتباينة الأولى تكافئ: $-س > ٧$ وهي تكافئ: $س < -٧$.
إذن مجموعة حلها هي الفترة $(-٧, \infty)$.

المتباينة الثانية تكافئ $-١٢ \geq س \geq ١٢$ حسب النظرية $(٥ - ٢)$.
إذن مجموعة حلها هي الفترة $[-١٢, ١٢]$.

لما كان لدينا الرابط « و » يربط المتباينتين في النظام فإن مجموعة حل النظام هي تقاطع مجموعة حل المتباينة الأولى مع مجموعة حل المتباينة الثانية.
إذن مجموعة الحل هي $(-\infty, -٧) \cap [-١٢, ١٢]$ وتمثيلها كما في الشكل الآتي:



يتبين من الشكل أن مجموعة حل النظام هي الفترة نصف المفتوحة $[-١٢, -٧)$.

مثال (٥-٨):

حل النظام التالي ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد:

$$س - ٧ < ٢س + ٤$$

$$\text{أو} \quad ٣ \leq \frac{س - ٢}{٤}$$

الحل:

المتباينة $س - ٧ < ٢س + ٤$ تكافئ: $س < -٧$ \Leftrightarrow $س < -١١$

وذلك حسب الخاصة (٥ - ١) .

إذن مجموعة حل المتباينة هي الفترة (- ∞ ، - ١١) .

المتباينة $s \leq \frac{-2}{4} \leq 3$ تكافئ .

س $-2 \leq 12$ حسب الخاصة (٥ - ٢) .

$s \leq 14$ \Leftrightarrow حسب الخاصة (٥ - ١) .

إذن مجموعة الحل هي الفترة [١٤ ، ∞) .

لما كان لدينا الرابط « أو » يربط المتباينتين في النظام فإن مجموعة حل النظام هي اتحاد مجموعة حل المتباينة الأولى مع مجموعة حل المتباينة الثانية .

إذن مجموعة الحل هي $(-\infty, -11) \cup [14, \infty)$ وتمثيلها كما في الشكل التالي:



تطبيقات هندسية :

هناك تطبيقات عديدة لموضوع نظام متباينات الدرجة الأولى نور منها تطبيقاً هندسياً من خلال المثالين التاليين :

مثال (٥-٩) :

إذا كان طولاً ضلعي مثلث هما ٧ سم و ١٥ سم ففي أي مدى يقع طول الضلع الثالث؟

الحل :

نفرض أن طول الضلع الثالث س ، ومعلوم أن $s < 0$

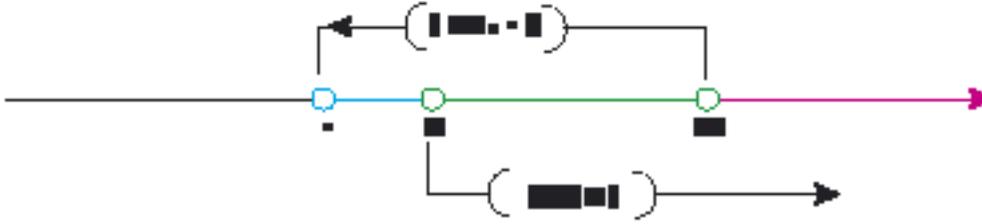
وبما أن مجموع أي ضلعين في المثلث أكبر من الضلع الثالث فإننا نحصل على:

$$0 < s < 15 + 7$$

$$و \quad 15 < s + 7$$

مجموعة حل المتباينة الأولى هي الفترة $(0, 22)$ أما المتباينة الثانية فمجموعة حلها هي $(8, \infty)$.

إذن مجموعة حل النظام هي $(0, 22) \cap (8, \infty)$ والتي تمثيلها كما في الشكل:



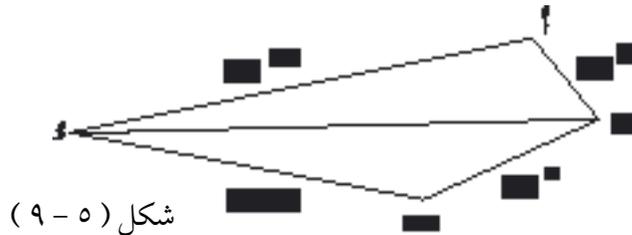
أي أن مجموعة الحل هي الفترة المفتوحة $(8, 22)$. نستنتج أن طول الضلع الثالث يقع بين ٨ سم و ٢٢ سم.

مثال (٥-١٠):

إذا كانت أطوال أضلاع شكل رباعي $أ ب ج د$ هي ٣ سم، ٥ سم، ٨ سم، ١٢ سم فأوجد مدى $س$.

الحل:

نرسم شكلاً رباعياً كما في الشكل (٥-٩).



شكل (٥-٩)

نصل القطر $[أ ج]$ ثم نعتبر المثلث $أ ب ج$.
 باستخدام طريقة حل المثال (٥-٩) نستنتج أن:

$$(٥-٤)$$

$$٩ > |ب ج| > ١٥$$

حيث إنَّ $|b|$ تعني طول الضلع $[b]$.

وباستخدام طريقة المثال (٥ - ٩) مرة أخرى في المثلث b جـ \triangle ، نستنتج أنَّ:

$$|b| - 5 > 5 > |b| + 5 \quad (5 - 5)$$

من (٥ - ٤) نحصل على:

$$5 - 9 > |b| - 5 \quad (6 - 5)$$

$$5 + 15 > 5 + |b| \quad (7 - 5)$$

و

من (٥ - ٥)، (٦ - ٥)، (٧ - ٥) نستنتج أنَّ:

$$4 > |b| - 5 > 5 > |b| + 5 > 20$$

إذن $4 > 5 > 20$ وهو المدى المطلوب. وهذا يعني أنَّ طول الضلع الرابع

س هو عدد حقيقي ينتمي إلى الفترة (٤، ٢٠).

تمارين (٥ - ١)

(١) أوجد القيمة المطلقة لكل من الأعداد:

$$-3, \sqrt{8}, -4, \sqrt{17}, 2\sqrt{5}, -2\sqrt{2}$$

(٢) مثل المجموعات التالية على خط الأعداد، ثم عبّر عنها باستعمال ترميز

الفترات بأبسط ما يمكن:

$$(أ) [20, 17] \quad (ب) \left[5, 7\right]$$

$$(ج) [2, 1] \cup [2, 11]$$

$$(د) \left[-2, 9\right] \quad (هـ) \left[1, 5\right] \cap \left[-\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right]$$

(٣) أثبت أنَّ $|a| \leq b \Leftrightarrow a \leq b$ أو $a \geq -b$

في التمارين (٤) - (٩) حل المتباينة ثم مثل حلها على خط الأعداد .

$$(٤) \quad |س - ٢| > ٥ \quad (٥) \quad |س + ٦| \geq ٢٠$$

$$(٦) \quad |س + ٤| < ٣ \quad (٧) \quad |س| > -١$$

$$(٨) \quad |س - ٣| \leq ٨, س \neq ٣ \quad (٩) \quad |س| \geq |س - ١|$$

في التمارين (١٠) - (١٣) أوجد حل نظام المتباينات ثم مثل مجموعة الحل على خط الأعداد .

$$(١٠) \quad ١٢ - ٥ \leq س \leq ٢ \quad (١١) \quad |س - ٢| > ٧$$

$$٢ > |س - \frac{١}{٣}| \quad \text{و} \quad |س + ٢| \leq ٣$$

$$(١٢) \quad |س| \leq ١١ \quad (١٣) \quad |س - ٣| > ١$$

$$\text{أو} \quad \frac{١ - س}{٢} < ٥ \quad \text{أو} \quad \frac{س + ١١}{٢} \leq ٨$$

(١٤) إذا كان طولاً ضلعي مثلث هما ٢ سم و ١١ سم ففي أي مدى يقع طول الضلع الثالث؟

(١٥) إذا كانت أطوال أضلاع شكل رباعي هي ٤ سم ، ٦ سم ، ١٣ سم ، س سم فأوجد مدى س .

(١٦) المسافة بين الرياض ومكة المكرمة ٨٧٠ كم تقطعها سيارة في ٩ ساعة . إذا كانت سرعة السيارة في الساعات الخمس الأولى تقع قيمتها بين ١٠٠ و ١٢٠ كم/ساعة ففي أي مدى تقع سرعة السيارة في الساعات الأربع الباقية؟ (نفرض أن السرعة ثابتة في كل من الفترتين) .

٥ - ٣ المتباينات الخطية في متغيرين :

درست في البندين السابقين المتباينات ذات المتغير الواحد من الدرجة الأولى سنتطرق في هذا البند إلى دراسة المتباينات ذات المتغيرين من الدرجة الأولى والتي نسميها المتباينات الخطية في متغيرين وهي التي يمكن كتابتها بإحدى الصيغ التالية:

$$(٥ - ٨) \begin{cases} اس + ب ص + هـ < ٠ , اس + ب ص + هـ \leq ٠ \\ اس + ب ص + هـ > ٠ , اس + ب ص + هـ \geq ٠ \end{cases}$$

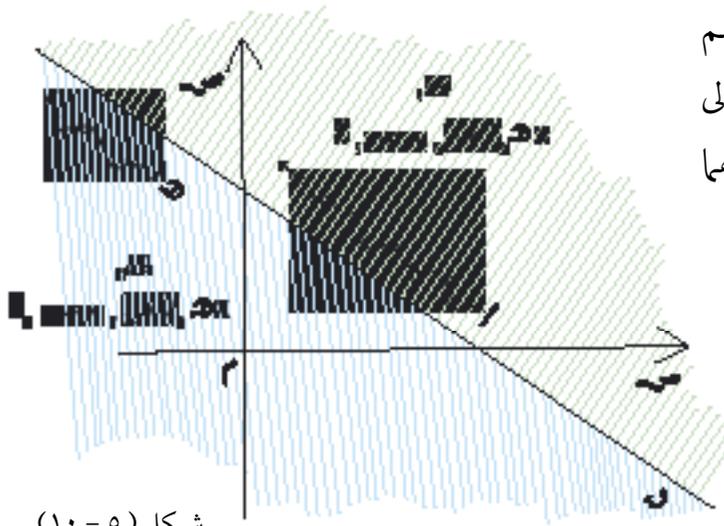
حيث $ا \neq ٠$ أو $ب \neq ٠$ أما $س$ ، $ص$ فمتغيران حقيقيان .

تسمى هذه المتباينات خطية لأنه عندما نجعل :

$$(٥ - ٩) اس + ب ص + هـ = ٠$$

فإننا نحصل على مستقيم $هـ$ في المستوي $س \times ص$ ، كما سبق لك أن رأيت في الباب الرابع من هذا الكتاب .

إذا رسمت المستقيم $هـ$ الذي يمثل المعادلة (٥ - ٩) كما في الشكل (٥ - ١٠)



فإنه - كما تعلم - يقسم

المستوي الإحداثي إلى

نصفي مستوي، نرمز لهما

بالرمزين ١ ، ٢ .

إن كل نقطة مثل

$هـ(س، ص)$

تحقق المعادلة

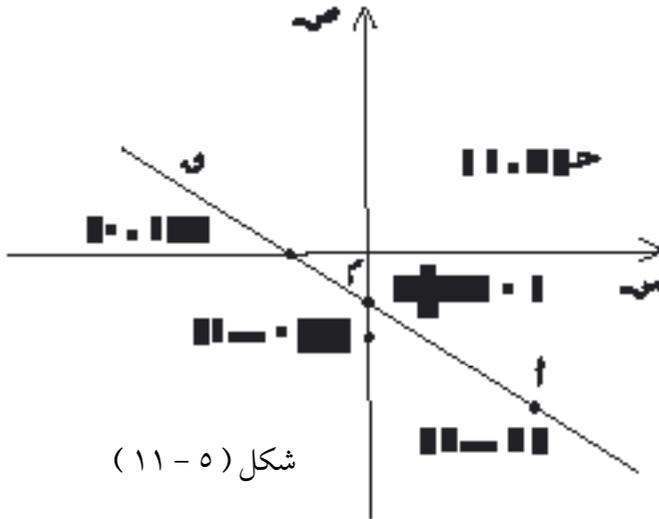
(٥ - ٩) أي

أنها تجعل المقدار $s + b + c$ مساوياً للصفر.
 بينما نجد أن كل نقطة مثل (s_1, c_1) أو (s_2, c_2) لا تحقق المعادلة $(9 - 5)$ أي أنها لا تجعل المقدار $s + b + c$ مساوياً للصفر.

سنرمز لهذا المقدار بالرمز $d = (s, c) = s + b + c$.

مثال (١١-٥):

ارسم المستقيم الذي معادلته: $2s + 3c + 2 = 0$ ، ثم أوجد
 $d = (s, c) = 2s + 3c + 2$ من أجل النقاط $a(-2, 2)$ ، $b(-1, 0)$ ،
 $c(1, 3)$ وحدد موضع كل من هذه النقاط بالمستوي الإحداثي وماهي إشارة
 المقدار $d = (s, c) = 2s + 3c + 2$ في كل من هذه النقاط.



الحل:

نرسم المستقيم بتعيين
 أي نقطتين منه مثل
 $(-\frac{2}{3}, 0)$ ، $(-1, 0)$
 حيث انقسم المستوي
 الإحداثي إلى نصفي
 المستوي: s_1 ، s_2 كما
 في الشكل (١١-٥).

من أجل النقطة $a(-2, 2)$ يكون:

$$d = (s, c) = 2(-2) + 3(2) + 2 = -4 + 6 + 2 = 4 > 0$$

من أجل النقطة ب $(-1, 0)$ يكون :

$$-1 = 2 + (-1) \times 3 + 0 \times 2 = (-1, 0) \quad \text{د}$$

النقطة ب \exists ي \mathbb{R} ، وإن $\text{د} (-1, 0) > 0$

من أجل النقطة هـ $(1, 3)$ يكون :

$$11 = 2 + 1 \times 3 + 3 \times 2 = (1, 3) \quad \text{د}$$

النقطة هـ \exists ي \mathbb{R} ، وإن $\text{د} (1, 3) < 0$

ملحوظة (٤-٥) :

يمكننا اعتبار \mathbb{D} ي \mathbb{R} حيث نسمي ي نصف مستو مفتوحاً . أما إذا اعتبرنا \mathbb{D} ي \mathbb{R} فإننا حينئذٍ نسمي ي نصف مستو مغلقاً، وكذلك الحال بالنسبة لنصف المستوي ي \mathbb{R} .

تعريف (٤-٥) :

مجموعة حل المتباينة $\text{أ} \text{س} + \text{ب} \text{ص} + \text{د} < 0$ هي مجموعة الأزواج المرتبة $(\text{ر}, \text{هـ})$ في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ بحيث $\text{أ} \text{هـ} + \text{ب} \text{ر} + \text{د} < 0$ ، أي الأزواج التي تحقق المتباينة .

وبالطريقة نفسها نعرّف مجموعة حل كلٍّ من المتباينات الواردة في الصيغ (٥-٨) .
من أجل حل المتباينة الخطية في متغيرين نورد النظرية التالية :

نظرية (٤-٥) :

المستقيم الذي معادلته : $\text{أ} \text{س} + \text{ب} \text{ص} + \text{د} = 0$

يقسم المستوي الإحداثي إلى نصفي مستو مفتوحين يكون في أحدهما :

$\text{أ} \text{س} + \text{ب} \text{ص} + \text{د} < 0$

وفي الآخر : $\text{أ} \text{س} + \text{ب} \text{ص} + \text{د} > 0$

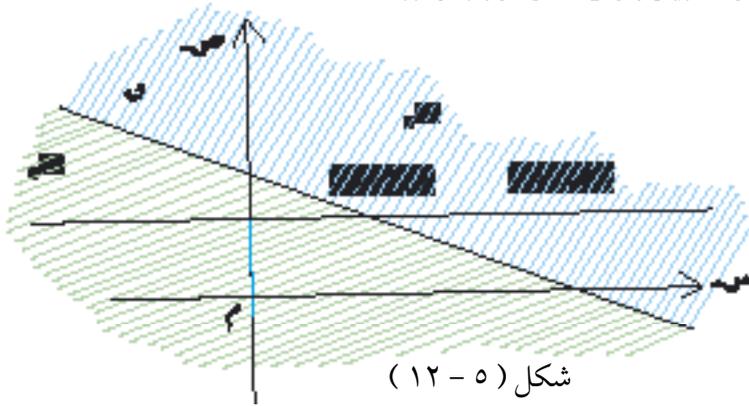
البرهان : (غير مطلوب)

البرهان:

ليكن \mathbb{H} المستقيم المعين بالمعادلة $As + Bv + C = 0$ لدينا ثلاث حالات هي: $0 < A$ ، $0 > A$ ، $0 = A$
 سنقوم ببرهان النظرية في حالة $0 < A$ ونترك الحالتين الأخرين للطالب حيث يمكن معالجتها بصورة مشابهة .

عندما $0 < A$ لا يمكن أن يكون المستقيم \mathbb{H} أفقياً (موازيًا لمحور السينات) لأن ميله يساوي $-\frac{A}{B}$ (لاحظ أنه عندما $B = 0$ يصبح \mathbb{H} عمودياً على محور السينات) .

ليكن \mathbb{H}_1 ، \mathbb{H}_2 نصفي المستوي المفتوحين المفصولين بالمستقيم \mathbb{H} كما في الشكل (٥-١٢)



في نصف المستوي الذي معادلته صر

إن المستقيمات يوازي محور السينات، لذا فلا بد أن يقطع المستقيم \mathbb{H} في نقطة نسميها $(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ (لماذا؟) .

في هذه الحالة $\mathbb{H}_1 < \mathbb{H}_2 \Leftrightarrow \mathbb{H}_1 < \mathbb{H}_2$ لأن $0 < A$

$$\text{إذن } \mathbb{H}_1 + \mathbb{H}_2 + \mathbb{H}_3 < \mathbb{H}_1 + \mathbb{H}_2 + \mathbb{H}_3 \quad (٥-١٠)$$

ولكن $(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ تقع على المستقيم \mathbb{H} .

$$\text{إذن } \mathbb{H}_1 + \mathbb{H}_2 + \mathbb{H}_3 = 0 \quad (٥-١١)$$

نستنتج من (٥ - ١٠)، (٥ - ١١) أن: $a + b + c < 0$
 إن النقطة (هـ، ر) كانت اختيارية في نصف المستوي المفتوح γ لذا
 نستنتج أن $a + b + c < 0$ لجميع النقط (س، ص) في نصف المستوي
 المفتوح γ .

لو اخترنا (هـ، ر) في نصف المستوي المفتوح γ وكررنا ما عملناه سابقاً فإننا
 نجد أن: $a > c \Leftrightarrow a > b$

إذن $a + b + c > 0$ لجميع النقط (س، ص) في نصف
 المستوي المفتوح γ مما ينهي برهان النظرية في حالة $a < 0$.

نتيجة (٥ - ١):

مجموعة حل المتباينة: $a + b + c < 0$
 هي مجموعة الأزواج المرتبة التي تمثلها جميع النقط الواقعة في أحد نصفي
 المستوي المفتوحين المحدودين بالمستقيم الذي معادلته:

$$a + b + c = 0 \quad (٥ - ١٢)$$

ومجموعة حل المتباينة: $a + b + c \leq 0$
 هي مجموعة الأزواج المرتبة التي تمثلها جميع النقط الواقعة في أحد نصفي
 المستوي المغلقين المحدودين بالمستقيم في (٥ - ١٢).

ملحوظة (٥ - ٥):

إذا أردنا حل متباينة من الشكل: $a + b + c < 0$
 فإننا نرسم أولاً المستقيم $a + b + c = 0$ منقطاً ثم نختار نقطة في
 المستوي الإحداثي ليست واقعة على المستقيم. فإذا حققت المتباينة نستنتج من

النظرية (٥ - ٤) أنَّ نصف المستوي المفتوح الحاوي على النقطة يمثل مجموعة حل المتباينة المعطاة. أما إذا لم تُحقَّق النقطة المختارة المتباينة المعطاة فتكون مجموعة الحل ممثلة بنصف المستوي المفتوح الذي لا يحوي النقطة التي اخترناها.

$$\text{أما بالنسبة للمتباينة : } \mathbf{1s + 2b + 3c \leq 0}$$

فطريقة تمثيل حلها مشابهة لما سبق، إلا أننا نرسم المستقيم :

$$\mathbf{1s + 2b + 3c = 0}$$

متصلاً . وتكون مجموعة الحل ممثلة بأحد نصفي

المستوي المغلقين .

مثال (٥-١٢) :

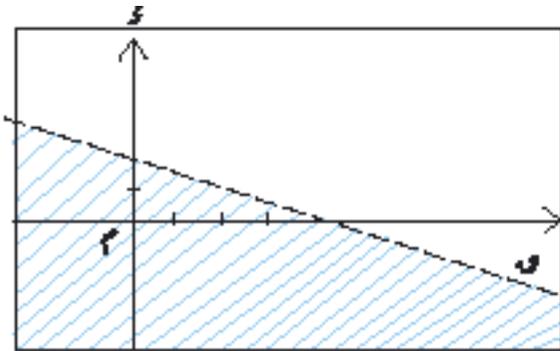
$$\text{مثل حل المتباينة التالية في المستوي الإحداثي : } \mathbf{2s + 4b - 8c > 0}$$

الحل :

لما كانت المتباينة غير حاوية على المساواة فإننا نرسم المستقيم :

$$\mathbf{2s + 4b - 8c = 0}$$

منقطاً في المستوي الإحداثي كما في الشكل (٥ - ١٣).



شكل (٥ - ١٣)

إنَّ نقطة الأصل $\mathbf{0}$ لا تقع على المستقيم $\mathbf{0}$ وعندما نعوض $\mathbf{s = 0}$ ، $\mathbf{c = 0}$ في المقدار $\mathbf{2s + 4b - 8c}$ نحصل على $\mathbf{-8}$ وهو عدد سالب. إذن النقطة $\mathbf{(0, 0)}$ تُحقَّق المتباينة المعطاة.

إذن نصف المستوي المفتوح الحاوي على نقطة الأصل يمثل حل المتباينة وهو

الجزء المظلل في الشكل (٥ - ١٣) .

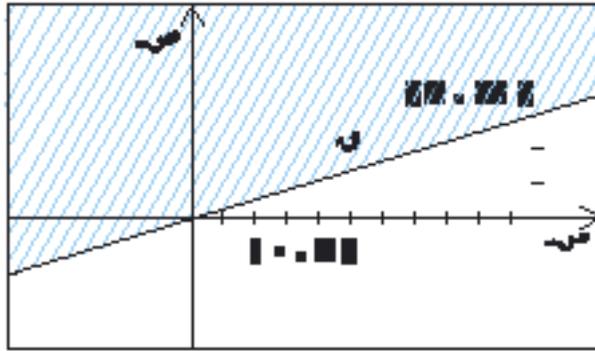
مثال (٥-١٣):

مثّل حل المتباينة التالية في المستوي الإحداثي: $٣ - س + ١١ ص \leq ٠$

الحل:

في هذا المثال توجد إشارة مساواة في المتباينة لذا نرسم المستقيم:

$٣ - س + ١١ ص = ٠$ متّصلاً كما في الشكل (٥ - ١٤).



شكل (٥ - ١٤)

الآن نختار نقطة ليست على المستقيم مثل (٠، ٣) ونعوّض $س = ٣$ ، $ص = ٠$ في المقدار $٣ - س + ١١ ص$ فنحصل على -٩ وهو عدد سالب.

إذن النقطة (٠، ٣) لا تحقّق المتباينة المعطاة.

نستنتج أنّ نصف المستوي المغلق الذي لا يحوي النقطة (٠، ٣) يمثّل حلّ

المتباينة المعطاة، وهو الجزء المظلل في الشكل (٥ - ١٤).

نظام المتباينات الخطية في متغيرين:

إذا كان لدينا عدد من المتباينات الخطية في متغيرين وأردنا إيجاد جميع الأزواج المرتبة (س، ص) وفي $س \times ص$ التي تحقّق جميع المتباينات المعطاة في آن واحد، فإننا نسمّي مجموعة المتباينات المعطاة نظام متباينات خطية في متغيرين ونسمّي مجموعة الأزواج المرتبة التي تحقّقها في آن واحد مجموعة حل نظام المتباينات.

نفرض أنّ لدينا ١ من المتباينات الخطية في متغيرين وأنّ ٢ هي مجموعة حل المتباينة الأولى في النظام و ٣ مجموعة حل المتباينة الثانية وهكذا... فلعلّك تلاحظ أنّ مجموعة حلّ النظام هي $١ \cap ٢ \cap ٣ \cap \dots \cap ٢$.

مثال (٥-١٤):

مثّل حل نظام المتباينتين التالي في المستوي الإحداثي :

$$٣س + ٥ص \leq ١٥ \quad (٥ - ١٣)$$

$$٢س - ٢ > ٠ \quad (٥ - ١٤)$$

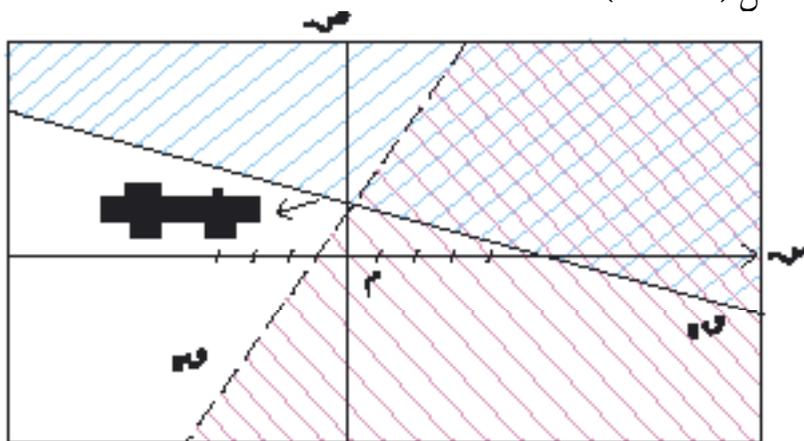
الحل:

المتباينة (٥ - ١٣) تكافئ $٣س + ٥ص - ١٥ \leq ٠$

نرسم المستقيم $٣س + ٥ص - ١٥ = ٠$ متصلاً ونرمز له بالرمز \mathbb{A} .

أما المستقيم $٢س - ٢ = ٠$ فنرسمه منقطاً ونرمز له بالرمز \mathbb{B} كما في

الشكل (٥ - ١٥).



شكل (٥ - ١٥)

إن نقطة الأصل \mathbb{A} لا تقع على أي من المستقيمين عند تعويض $س = ٠$ ، $ص = ٠$ في (٥ - ١٣) نستنتج أن الزوج المرتب $(٠, ٠)$ لا يحقق المتباينة لذا فإنّ حلّ (٥ - ١٣) يمثّله نصف المستوي المغلق المحدّد بالمستقيم \mathbb{A} والذي لا يجوي \mathbb{A} . أما بالنسبة للمتباينة (٥ - ١٤) فإنّ الزوج المرتب $(٠, ٠)$ يحققها ، لذا فإنّ حلّها يمثّله نصف المستوي المفتوح المحدّد بالمستقيم \mathbb{B} والذي يجوي \mathbb{B} ، إنّ تمثيل حلّ

النظام هو تقاطع نصفي المستوي وهي المنطقة المخططة كالشبكة في الشكل (١٥-٥) ضمناً لدقة تعيين منطقة الحل من المناسب إيجاد نقطة تقاطع المستقيمين $x=13$ ، $y=5$ وهي $(\frac{36}{13}, \frac{5}{13})$ وذلك بحل النظام المكوّن من معادلتَي المستقيمين.

مثال (١٥-٥):

مثّل حل نظام المتباينات التالي :

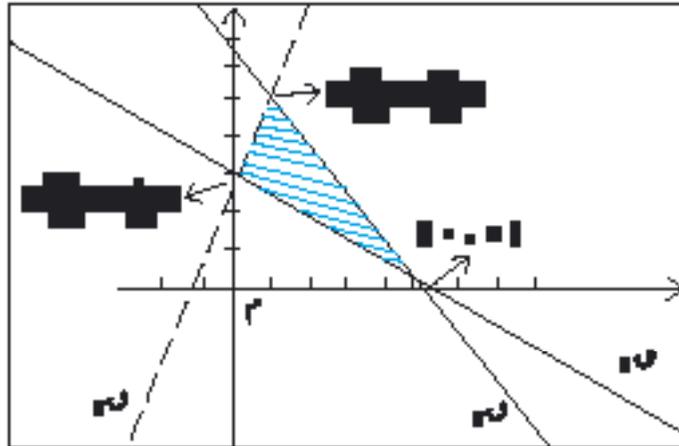
$$3س + ٥ص \leq ١٥ \quad (١٥ - ٥)$$

$$ص - ٢س > -٢ \quad (١٦ - ٥)$$

$$٧س + ٥ص \geq ٣٥ \quad (١٧ - ٥)$$

الحل:

لقد سبق أن أوجدنا تمثيل حل المتباينتين الأولى والثانية في المثال السابق. بالنسبة للمتباينة (١٧-٥) نرسم المستقيم $7س + ٥ص = ٣٥$ الذي معادلته $٧س + ٥ص = ٣٥$ متصلاً كما في الشكل (١٦-٥). لاحظ أن النقطة $(٠, ٧)$ تحقق (١٧-٥) لذا فإن مجموعة حل المتباينة (١٧-٥) ممثلة بنصف المستوي المغلق المحدد بالمستقيم $7س + ٥ص = ٣٥$ والحاوي على نقطة الأصل $(٠, ٠)$. إن مجموعة حل النظام في المثال هي تقاطع مجموعات حل كل من المتباينات (١٥-٥)، (١٦-٥)، (١٧-٥) وهي المجموعة الممثلة بالمنطقة المظللة في الشكل (١٦-٥).



شكل (١٦-٥)

تمارين (٥ - ٢)

في التمارين (١) - (٤) مثل حل المتباينات في المستوي الإحداثي :

$$(١) \quad ٢س + ٥ص > ٢٠ \quad (٢) \quad ١٣ \leq \frac{ص}{٧} - \frac{س}{٩}$$

$$(٣) \quad ٢س - ١١ص > ٣٦ + ٢س$$

$$(٤) \quad (س + ٣ص) \leq ٢س - ٢ص + ٣س + ٦س + ٩ص$$

في التمارين (٥) - (١٣) مثل حل أنظمة المتباينات في المستوي الإحداثي :

$$(٥) \quad س - ص < ٥ \quad (٦) \quad ٣ص + ٢س - ١٢ \geq ٠$$

$$٠ > ٤ + ٢س + ٥ص$$

$$(٧) \quad ٠ < س - ص \quad (٨) \quad ٠ < س$$

$$١٢ \geq ٢ص + ٢س$$

$$ص > ٦ + ٢س$$

$$٢س + ٢ص < ٣$$

$$(٩) \quad ٣ < س \quad (١٠) \quad ٢ - ٢س \leq ٢ص$$

$$٠ < -٢ص \quad ٠ \geq ٢ + ٢س + ٢ص$$

$$٠ \leq ٣ + س - ٣ص$$

$$١٠ > ٢س + ٣ص$$

$$(١١) \quad ٠ < س \quad (١٢) \quad ٤ \geq |س|$$

$$٠ < ٣ص \quad ٠ < -٢ص$$

$$(١٣) \quad ١ > س + ٥ص \quad ٥ \geq |س - ٣ص|$$

$$٠ \geq ٧ص + س \quad ٣ \leq |١ - ٣ص|$$

تمارين عامة على الباب الخامس

(١) حل المتباينة $|س - ٣| > ٥$ ثم مثل الحل على خط الأعداد .

(٢) حل نظام المتباينتين :

$$س + ٢ < ٤ \quad \text{و} \quad س + ٢ \geq ١٠$$

(٣) حل نظام المتباينات :

$$س - ٧ < ١٣ ، ٣س + ٤ < ٥ ، ٨س + ص > ٣٥ ، ٥ <= ص + ٥ ، ٠ <= ٣س + ٤ + ص + ٥ ، ٠ > ٣٥ - ص$$

(٤) برهن على صحة الخاصيتين (١) ، (٢) من النظرية (٥ - ١) .

(٥) تصدق محسن بمبلغ ٣٥٠٠٠ ريال على ١٥ عائلة فقيرة. فإذا أعطى لكل

من العوائل السبع الأولى مبلغاً يتراوح بين ١٠٠٠ و ٢٠٠٠ ريال ففي أي

مدى يقع ما يقدمه لكل من العوائل الثمان الباقية ؟

(٦) أوجد مجموعة الحل للنظام المؤلف من المتباينات التالية ومثل ذلك على

خط الأعداد :

$$س - \frac{س - ٤}{٥} < \frac{س - ٣}{٢}$$

$$٢ - ٣س < ٨ - ٢س$$

(٧) حل المتباينة $\frac{س - ٥}{١ - ٢س} \geq ٠$ ، $س \neq \frac{١}{٢}$

الباب السادس

حساب المثلثات^٣

- ٦ - ١ نبذة تاريخية.
- ٦ - ٢ الزوايا وقياسها .
- ٦ - ٣ الدوال المثلثية للزوايا الحادة .
- ٦ - ٤ العلاقة بين الدوال المثلثية والمثلث قائم الزاوية .
- ٦ - ٥ بعض العلاقات المثلثية .
- ٦ - ٦ الجداول المثلثية والحاسبات واستخداماتها .
- ٦ - ٧ حساب الارتفاعات والأبعاد .

٦ - ١ نبذة تاريخية :

كان لحساب المثلثات دور كبير في الحضارة الفرعونية عند بناء الأهرامات الثلاثة، كما كان له تأثير كبير على ملاحظاتهم الفلكية في ذلك الوقت . كذلك كان للبابليين اهتمام كبير بالفلك وبالتالي حساب المثلثات . كما اعتمد الإغريق على كثير من المعلومات التي وصلت إليهم من البابليين والمصريين وذلك عندما طوّروا الساعة الشمسية أو ما يسمى بالمقياس الشمسي وذلك سنة ألف وخمسة مئة قبل الميلاد.

يعرّف حساب المثلثات على أنه «قياس المثلث»، علماً بأنه قديم قدم حاجة الإنسان ومعرفته بالفلك والهندسة. وبما أن قياس المثلث مفهوم يدخل تحت الهندسة وتطبق مفاهيمه في الفلك، فإن حساب المثلثات يتبع الهندسة والفلك حسب الاستخدام والحاجة حتى تم فصله كعلم مستقل بفضل علماء المسلمين خلال نهضة الحضارة الإسلامية وذلك في القرن الثالث الهجري.

كان اهتمام العلماء المسلمين بحساب المثلثات كمن سبقوهم مرتبطاً بالجانب التطبيقي له والمتعلق بعلم الفلك ، لذلك نجد أنّهم قد اهتموا اهتماماً كبيراً بهذا العلم حتى أنهم نظموا وطوروا المعارف المتعلقة به حتي جعلوا منه علماً مستقلاً عن علم الفلك وأسموه «علم الأنساب» وذلك لأنه يقوم على النسب المختلفة الناشئة بين أضلاع المثلث .

من أبرز العلماء المسلمين الذين كان لهم دور كبير في تقدّم حساب المثلثات محمد ابن جابن بن سنان أبو عبد الله البتّاني (٢٣٥ - ٣١٧هـ) ومحمد بن إسماعيل بن العباس أبو الوفاء البوزجاني (٣٢٨ - ٣٨٨هـ) . ومن أهم الإنجازات التي قام بها البتاني اكتشافه لقاعدة إيجاد ارتفاع الشمس .

يعتبر أبو الوفاء البوزجاني العالم المسلم الذي جعل علم حساب المثلثات يأخذ صفة العلم المستقل عن علم الفلك. كما يُعتبر نصير الدين الطوسي (٥٩٧-٦٧٢هـ) أوّل من أظهر حساب المثلثات كعلم مستقلّ في كتابه «أشكال القطاعات». مع إنجاز النهضة العلمية في المشرق برز علماء مسلمون في الأندلس ومن أشهرهم إبراهيم بن يحيى النقّاش المعروف بأبي إسحاق الذي أوجد مجموعة من الجداول الرياضية، وجابر بن فلاح. قام كل من النقّاش وجابر بحساب جداول الجيب وجيب التمام، وقام أحمد بن عبد الله المعروف بعباس الحاسب بحساب أول جدول للظل وظل التمام.

٦ - ٢ الزوايا وقياسها :

سبق وأن تعرّفنا على مفهوم الزاوية في دراستك للهندسة في المرحلة المتوسطة، وقد رأيت أن «زاوية قطاع زاوي» هي الخاصة المشتركة بين هذا القطاع والقطاعات التي تتطابق معه .

ومن جهة أخرى فقد تعرّفنا في المرحلة المتوسطة على نظام لقياس الزاوية هو النظام الستيني، ورأيت أنّ :

الزاوية القائمة = ٩٠ درجة وتكتب على الشكل : ٩٠°

كما رأيت أنّ الدرجة = ١° = ٦٠ دقيقة وتكتب على الشكل : ٦٠'

وأن الدقيقة = ١' = ٦٠ ثانية وتكتب ٦٠''

وأن الدورة الكاملة = ٤ قوائم = ٣٦٠°

كما تعرّفنا في الفصل الدراسي الأول، في باب الهندسة، على نظام آخر لقياس الزاوية هو «التقدير الدائري» وتعرّفنا على العلاقة بين النظامين وفق المعادلة :

$$(٦ - ١)$$

$$\frac{\text{س}}{١٨٠^\circ} = \frac{\text{د}}{\text{ر}}$$

حيث $س^\circ$ هو قياس الزاوية بالدرجة، $ر$ قياس الزاوية نفسها بالراديان ورأيت أن الراديان (أو: الزاوية نصف القطرية) هو قياس زاوية مركزية تقابل قوساً من دائرة طوله مساوٍ لنصف قطر تلك الدائرة، واستنتجت أنه إذا كان ل طول قوسٍ من الدائرة $(ر، س)$ وكانت زاويته $ر$ رادياناً فإن:

$$\boxed{س = ر \cdot ر} \quad (٦ - ٢)$$

نورد فيما يلي بعض الأمثلة على سبيل التذكير والمراجعة.

مثال (٦-١):

(أ) حوّل من الدرجة إلى الراديان: ٣٠° ، ٦٠° ، ١٥٠° ، ٣٦٠°

(ب) حوّل من الراديان إلى الدرجة: $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ رادياناً.

الحل:

باستخدام (٦-١) نجد:

$$(أ) \quad \frac{٣٠^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{ر}{١} \quad \leftarrow \quad ر = \frac{٣٠^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{١}{٦} \text{ رادياناً.}$$

$$\frac{٦٠^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{ر}{١} \quad \leftarrow \quad ر = \frac{٦٠^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{١}{٣} \text{ رادياناً.}$$

$$\frac{١٥٠^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{ر}{١} \quad \leftarrow \quad ر = \frac{١٥٠^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{٥}{٦} \text{ رادياناً.}$$

$$\frac{٣٦٠^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{ر}{١} \quad \leftarrow \quad ر = \frac{٣٦٠^\circ}{١٨٠^\circ} = ٢ \text{ رادياناً.}$$

$$(ب) \quad \frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{١}{٤} \quad \leftarrow \quad س = \frac{١}{٤} \times ١٨٠^\circ = ٤٥^\circ$$

$$\frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{١}{٢} \quad \leftarrow \quad س = \frac{١}{٢} \times ١٨٠^\circ = ٩٠^\circ$$

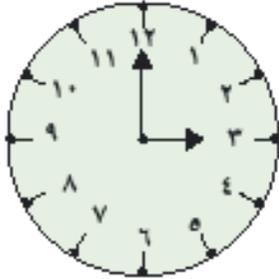
$$\frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{١}{٣} \quad \leftarrow \quad س = \frac{١}{٣} \times ١٨٠^\circ = ٦٠^\circ$$

مثال (٢-٦):

كم المسافة التي تقطعها نقطة على طرف عقرب الدقائق خلال خمس دقائق،
كان طول هذا العقرب ٢١ سم. ($\frac{22}{7} = \pi$)

الحل:

يدور عقرب الدقائق دورة كاملة خلال ساعة واحدة (أي ٦٠ دقيقة زمنية)
وعليه فإن الزاوية التي يدورها خلال ٥ دقائق:



شكل (٦-١)

$$30^\circ = 5 \times \frac{360}{60} = \frac{1}{6} \text{ رادياناً.}$$

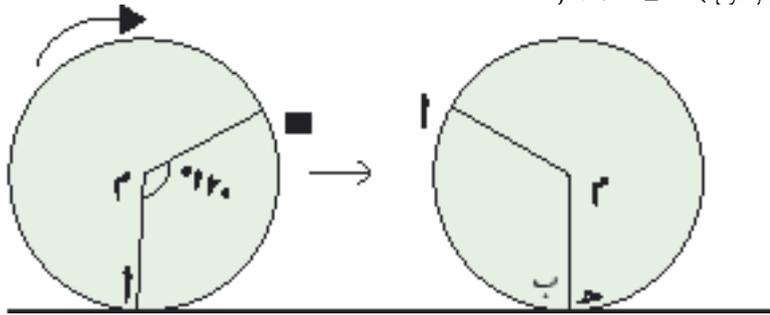
$$\text{ومن (٦-٢) نجد أن:}$$

$$21 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} = 11 \text{ سم - انظر الشكل (٦-١).}$$

مثال (٣-٦):

عربة شحن طول قطر عجلتها متر واحد، ما طول المسافة التي تقطعها الشاحنة
عندما تدور عجلتها $\frac{1}{3}$ دورة؟ دورة واحدة؟ دورة ٧، ٢١ دورة؟
(دون أن تتلوى)، $\pi = 3,14$



شكل (٦-٢)

الحل:

من الشكل (٦ - ٢):

عندما تدور العجلة $\frac{1}{3}$ دورة أي $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ رادياناً.
تقطع الشاحنة المسافة $|AB|$ التي تساوي طول القوس \widehat{AB}

ويكون $|AB| = \widehat{AB} = \frac{2\pi}{3} \times v$ حسب (٦ - ٢)

$$. 3,14 = \frac{1}{2} \times \frac{3,14 \times 2}{3} =$$

وعندما تدور العجلة دورة كاملة تقطع الشاحنة مسافة تساوي محيط العجلة

$$2\pi r =$$

$$. 3,14 = \frac{1}{2} \times 3,14 \times 2 =$$

وعندما تدور العجلة $21,7$ دورة تقطع الشاحنة مسافة تساوي:

$$. 68,14 = 3,14 \times 21,7$$

الزاوية الموجّهة:

(١) قبل أن نختم هذا البند نتعرّف

على الزاوية الموجّهة.

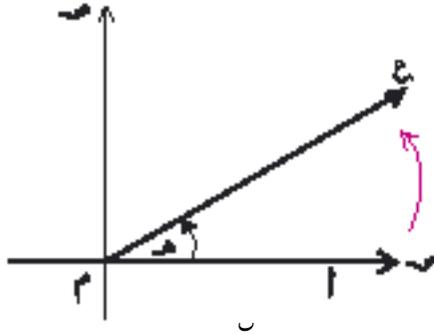
ففي الشكل (٦ - ٣) المستوي

منسوب إلى نظام إحداثي متعامد

الزاوية $\angle \alpha = \alpha$ ضلعها $[\alpha]$ ثابت، بينما ضلعها $[\alpha]$ يدور وفق اتجاه

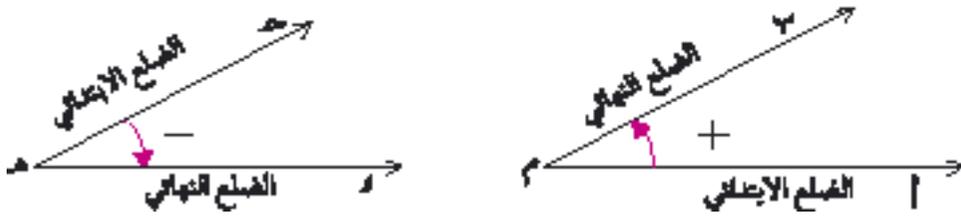
السهم الأحمر ابتداءً من وضع انطباقه على $[\alpha]$ ، وحيث إننا سنتعامل في هذا

الباب مع الزوايا الحادة، فإن α ستأخذ جميع قيم الفترة $(0, 90^\circ)$.



حسب معلوماتك في المرحلة المتوسطة ، لعلك تذكر أن الجهة المعيّنة بالسهم الأحمر في الشكل (٦ - ٣) هي الجهة الموجبة للدوران، بينما الجهة المعاكسة هي الجهة السالبة للدوران .

إن الزاوية المكوّنة من الزوج المرتّب ([م م] ، [م م]) ندعوها زاوية موجّهة ضلعها الابتدائي [م م] وضلعها النهائي [م م] . في الشكل (٦ - ٤) :
الزاوية الموجّهة المكوّنة من الزوج المرتّب ([م م] ، [م م]) موجبة بينما الزاوية الموجّهة المكوّنة من الزوج المرتّب ([م م] ، [م م]) سالبة



شكل (٦ - ٤)

تدريب (١-١) :

(١) أي اتجاه للدوران تتبع :

(أ) في طوافك حول الكعبة المشرفة ؟

(ب) في فتح حنفية الماء ؟

(ج) في فتح اسطوانة الغاز ؟

(٢) ما نوع دوران عقارب الساعة ؟

(٢) إذا كان لدينا نظام إحداثي متعامد كما في الشكل (٦ - ٥) فإننا نقول عن الزاوية الموجّهة إنها في وضع قياسي إذا وقع رأسها في نقطة الأصل وانطبق ضلعها الابتدائي على الجزء الموجب لمحور السينات.



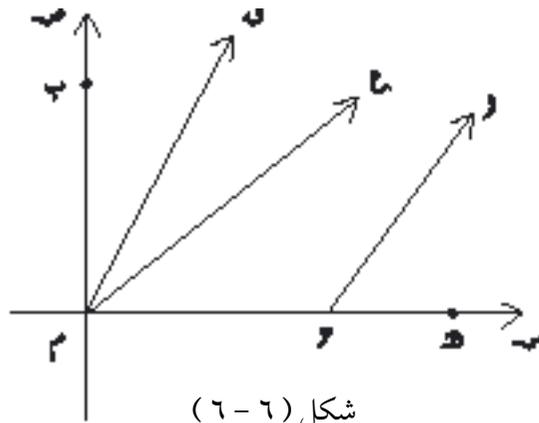
شكل (٥-٦)

في الشكل (٥ - ٦) الزاوية الموجَّهة
المكوَّنة من الزوج المرتَّب $([م م], [ا م])$
في وضع قياسي
بينما كل من الزوايا الموجَّهة المكوَّنة من
الأزواج المرتَّبة :
 $([م م], [ب م])$ ، $([ا م], [ب م])$
 $([م م], ب م)$ ليست في وضع قياسي.

تدريب (٢-٦) :

أي الزوايا الموجَّهة المعينة في الأزواج المرتَّبة في الشكل (٦-٦) في وضع

قياسي ولماذا ؟



شكل (٦-٦)

- (ا) $([م م], [ب م])$
- (ب) $([ج م], [ب م])$
- (ج) $([ب م], [ج م])$
- (د) $([ب م], [ا م])$
- (هـ) $([ب م], [ج م])$

تمارين (٦ - ١)

١) عبّر عن قياس كل زاوية فيما يأتي بالراديان :

- (ا) ٧٠° (ب) ٧٥° (ج) ١٢٠°
- (د) ١٣٥° (هـ) $١٢٠^\circ ٣٠'$ (و) ٣٣٠°

(٢) حوّل من راديان إلى درجة :

$$\begin{array}{lll} (أ) \frac{3\pi}{2} & (ب) \frac{4\pi}{3} & (١) \frac{3\pi}{4} \\ (د) \frac{2\pi}{3} & (هـ) \frac{5\pi}{6} & (٢) \frac{5\pi}{12} \end{array}$$

(٣) كم المسافة التي تقطعها نقطة على طرف عقرب الدقائق خلال ٥ دقائق إذا كان

$$\text{طول العقرب } ٤, ٨ \text{ سم} ؟ \frac{22}{7} = \pi$$

(٤) قمر صناعي يدور حول الأرض على مسار دائري دورة كاملة كل ٦ ساعات.

فإذا كان نصف قطر مساره ٧٠٠٠ كم فأوجد سرعته في الدقيقة.

(٥) إذا اعتبرنا خط الاستواء دائرة نصف قطرها ٦٥٠٠ كلم فأوجد طول القوس

من خط الاستواء الذي يقابل زاوية مركزية قدرها ثانية واحدة . (قرّب

الجواب إلى رقمين عشريين من الكيلومترات) .

(٦) الميل البحري هو طول القوس على خط الاستواء الذي يقابل زاوية مركزية

قدرها دقيقة واحدة .

أوجد ما يساويه الميل البحري بالكيلومترات باعتبار خط الاستواء دائرة نصف

قطرها ٦٥٠٠ كلم، قرّب الجواب إلى رقمين عشريين.

(٧) أوجد المسافة التي تقطعها عجلة إذا كان قطرها وعدد دوراتها كما يلي :

(استعمل $\pi = 3, 14$)

(أ) ٢٥ سم ، ٥ دورة (ب) ٣, ٥ متر ، ٢, ٤ دورة

(ج) ٦ أمتار ، ٧, ٧ دورة (د) ١٠ أمتار ، ٦, ٦ دورة

(٨) أوجد نصف قطر عجلة عندما تكون المسافة التي قطعتها وعدد دوراتها كما يلي :

(استعمل $\pi = 3, 14$)

(أ) ٦٣ سم ، ٥ دورات (ب) ٩٦, ٣ متر ، ٩ دورات

(ج) ٦٧, ٥٣ متر ، ٧ دورات (د) ٨١, ٦٥ متر ، ٥, ٦ دورة

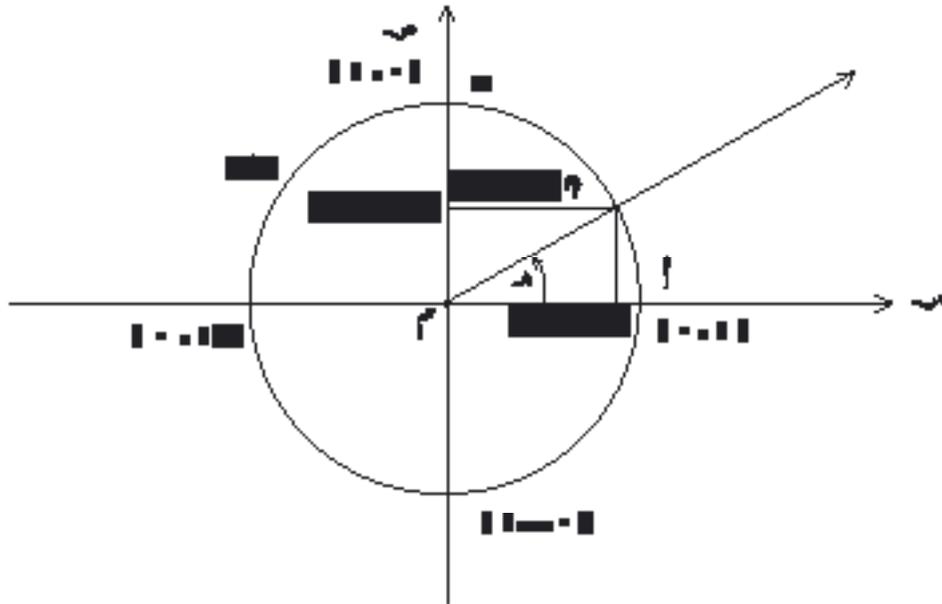
٦ - ٣ الدوال المثلثية للزوايا الحادة :

إذا رسمنا دائرة (د) مركزها نقطة الأصل M ، ونصف قطرها وحدة الطول فإننا نسميها دائرة الوحدة أو (الدائرة المثلثية) كما في الشكل (٦ - ٧) . معادلة الدائرة (د) هي :

$$س^2 + ص^2 = ١$$

ولو رسمنا الزاوية α بوضع قياسي، وكانت النقطة P (س، ص) نقطة تقاطع دائرة الوحدة (د) مع الضلع النهائي للزاوية، وكان قياس الزاوية $\alpha =$

فإن قيمتي س، ص تتبعان للعدد α . ومن الواضح أنه إذا كانت $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ ،



شكل (٦ - ٧)

تعريف (١-٦):

إذا كانت $\hat{A}M$ زاوية حادة قياسها α في الوضع القياسي وكانت (s, \cos) نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية مع دائرة الوحدة فإننا نعرف الدالتين الآتيتين:

$$\text{جتا: } (90^\circ, 0) \leftarrow [1, 0) \leftarrow \alpha \leftarrow \text{س} = \text{جتا} \alpha$$

$$\text{جا: } (90^\circ, 0) \leftarrow (1, 0] \leftarrow \alpha \leftarrow \text{ص} = \text{جا} \alpha$$

ونعبر عن قيمة هاتين الدالتين بالنسبة لزاوية α بالرمز $\text{جتا} \alpha$ (ويقرأ «جيب تمام الزاوية α ») و $\text{جا} \alpha$ (ويقرأ «جيب الزاوية α »).

ملحوظة (١-٦):

لو وسعنا مجال الدالتين جتا ، جا بحيث يصبح $[90^\circ, 0]$ لأمكننا ملاحظة ما يلي:

(١) عندما $\alpha = 0$ فإن α تنطبق على $(0, 1)$ أي أن:

$$(3-6)$$

$$\text{جتا } 0 = 1, \text{ جا } 0 = 0$$

(٢) عندما $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (أي 90°) فإن α تنطبق على $(1, 0)$ أي أن:

$$(4-6)$$

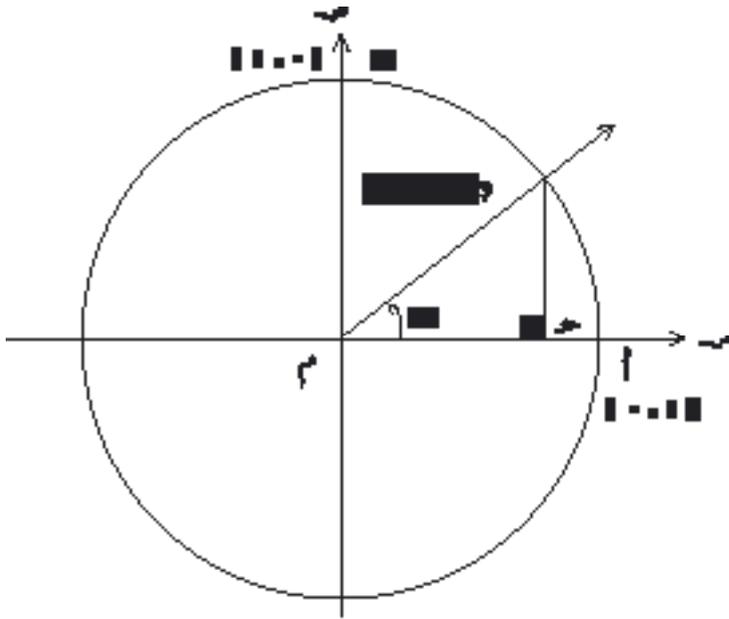
$$\text{جتا } 90^\circ = 0, \text{ جا } 90^\circ = 1$$

مثال (٤-٦):

ارسم زاوية قياسها 45° في الوضع القياسي، ثم أوجد $\text{جتا } 45^\circ$ و $\text{جا } 45^\circ$ مستعيناً بدائرة الوحدة.

الحل:

في الشكل (٦-٨) $\hat{A}M = 45^\circ$



شكل (٦-٨)

د (د) (د) دائرة الوحدة

$$1 = | \cos \theta | \leftarrow$$

د (س، ص) = (جتا ٤٥)

$$1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \quad (٦ - ٥)$$

△ قائم الزاوية

في هـ ومتطابق الضلعين

$$\leftarrow \cos = \sin$$

نعوض في (٦ - ٥) فنـ

$$1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

$$\leftarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\leftarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{وهذا يعني أن جتا } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{وحيث } \sin = \cos \text{ فإن جتا } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

دالتان أخريان :

كما أن هناك دالتين أخريين هما دالتا الظل ونرمز لها بالرمز ظا وظل التمام ونرمز لها بالرمز ظتا وقيمتاهما دالتين الدالتين من أجل زاوية حادة قياسها هـ - انظر الشكل

(٦ - ٧) - هما :

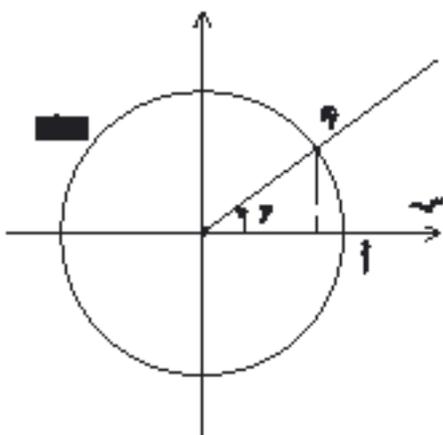
$$\text{ظا هـ} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \quad \text{س} \neq 0 \quad (٦ - ٦)$$

$$\text{ظتا هـ} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} \quad \text{ص} \neq 0 \quad (٧ - ٦)$$

مثال (٥-٦):

في الشكل (٦ - ٩) النقطة $A(0, 8)$ ، $B(0, 6)$ ، أثبت أن $\triangle OAB$ تنتمي لدائرة الوحدة، وإذا كانت $\hat{A} = \alpha$ فأوجد:

جتا α ، جتا α ، ظا α ، ظتا α



شكل (٦ - ٩)

الحل:

لكي تنتمي $\triangle OAB$ لدائرة الوحدة

يجب أن يحقق إحداثيا A

$$\text{معادلة دائرة الوحدة: } 1 = 2\text{ص} + 2\text{س}$$

بالتعويض نجد:

$$0,36 + 0,64 = 2(0,6) + 2(0,8)$$

\Leftarrow تقع على دائرة الوحدة وعليه فإن:

$$\text{جتا } \alpha = \text{س} = 0,8, \text{ جتا } \alpha = \text{ص} = 0,6$$

$$\text{ظا } \alpha = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4}, \text{ ظتا } \alpha = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{0,8}{0,6} = \frac{4}{3}$$

نتيجة (٦-١):

$$\text{من (٦ - ٦)، (٧ - ٦) نستنتج أن } \text{ظتا } \alpha = \frac{1}{\text{ظا } \alpha}$$

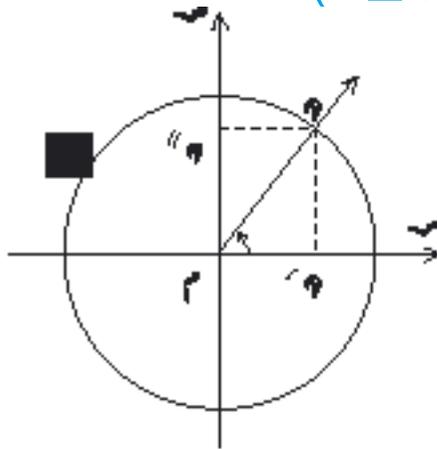
تدريب (٣-٦):

(١) في المثال (٥-٦) أوجد ميل $\triangle OAB$ ثم قارن بين ميل $\triangle OAB$ و $\text{ظا } \alpha$ ، ماذا تلاحظ؟

(٢) ارسم الشكل (٦ - ٩) بدقة متخذاً ٣ سم وحدة لقياس الطول ثم استعمل

المنقلة لقياس الزاوية α .

تمارين (٦ - ٢)



(١) في الشكل بجانبه ، الدائرة (د)

دائرة الوحدة ، $|\sin \theta| = \frac{3}{5}$ وحدة الـ

أوجد :

جتا θ ، جتا θ ، ظا θ ، ظتا θ

(٢) أعد حل التمرين السابق إذا كان

$|\cos \theta| = \frac{5}{13}$ وحدة الطول .

(٣) إذا علمت أن س زاوية حادة وأن جتا س = $\frac{1}{4}$

فارسم الزاوية س بوضع قياسي في دائرة الوحدة ثم أوجد :

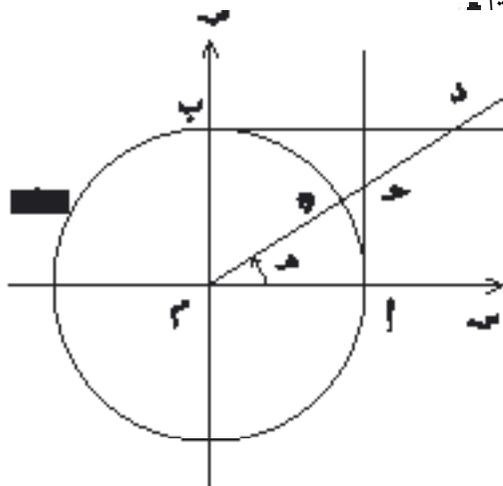
جاس ، ظاس ، ظتاس

ارسم الشكل بدقة ثم أوجد قياس س مستعيناً بالمنقلة .

(٤) أثبت أن النقطة $(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ تقع على دائرة الوحدة وإذا مر بالنقطة

الضلع النهائي لزاوية حادة قياسها وكانت في وضع قياسي، فأوجد قيم :

جتا θ ، ظا θ ، ظتا θ



(٥) تقع النقطة (س ، ص)

على دائرة الوحدة (د)

[أ ، ب] مماسان

للدائرة، كما في الشكل المقابل .

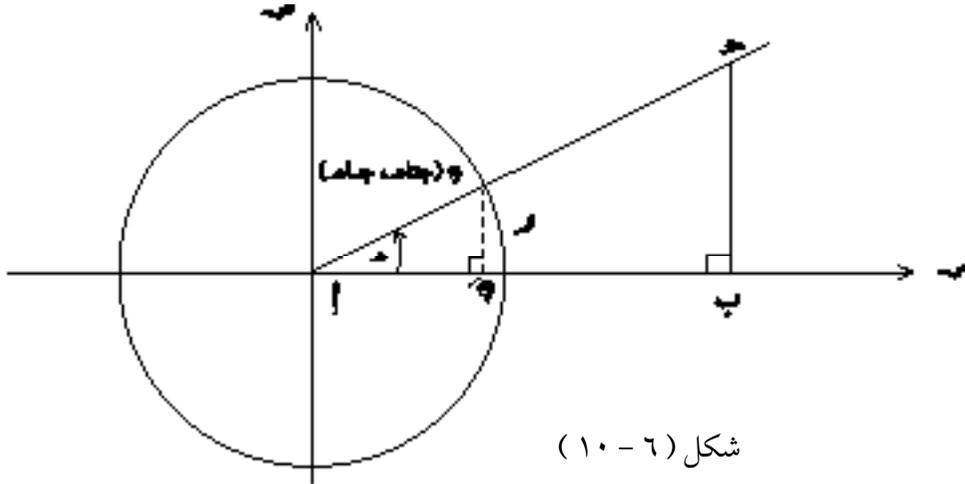
(أ) تحقق أن : $|\sin \theta| = |\cos \theta|$

$|\sin \theta| = |\cos \theta|$

- (ب) إذا دار الضلع $[AB]$ مقترباً من $[AC]$ ماذا سيحصل للنقطة D ؟
 (ج) إذا دار الضلع $[AB]$ بالاتجاه المعاكس مقترباً من $[AC]$ ماذا سيحصل للنقطة D ؟

١ - ٤ العلاقة بين الدوال المثلثية والمثلث قائم الزاوية :

هناك بعض العلاقات الهامة في المثلث القائم لها أهمية في الدراسات التطبيقية :
 كالميكانيك والفيزياء والعلوم الهندسية.
 في الشكل (٦ - ١٠) المثلث ABC قائم الزاوية في B . الزاوية BAC في
 وضع قياسي وقياسها θ ، أتطبق على نقطة الأصل ، نرسم دائرة الوحدة (د)
 مركزها A . فتقطع الضلعين $[AB]$ ، $[AC]$ في D ، E على الترتيب .



و $(0, 1)$ ، $(\cos \theta, \sin \theta) = (AD, DE)$ ، $(\cos \theta, \sin \theta)$ من تشابه
 المثلثين ADC ، ABD نجد :

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AB|}$$

$$\text{أو: } \frac{\text{جـ}}{\text{أب}} = \frac{1}{\text{أب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{أب}}$$

من النسبتين الأولى والثانية ينتج: $\frac{\text{جـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{أب}}$

ومن النسبتين الثانية والثالثة ينتج: $\frac{\text{جـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{أب}}$

$$\text{وبالتالي فإن: } \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{أب}}{\text{أب}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \text{ (لماذا؟)}$$

إن [أب]، كما تعلم، هو وتر المثلث [أب] القائم في ب: نسمي [ب] الضلع المقابل للزاوية [أ] التي قياسها [أب] الضلع المجاور للزاوية [أ] التي قياسها [أب].

وهكذا نحصل على قيم الدوال المثلثية لزاوية حادة قياسها [أب] من مثلث قائم

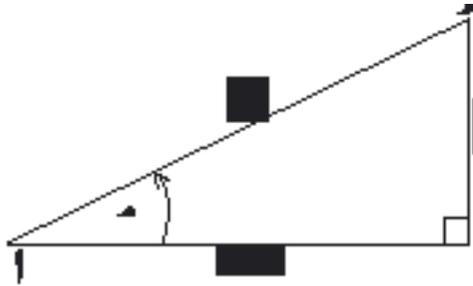
الزاوية - كما في الشكل (٦ - ١١) - على النحو التالي:

$$\text{جـ} = \frac{\text{طول الضلع القائم المقابل للزاوية}}{\text{طول الوتر}} \text{ أو اختصاراً:}$$

$$\text{جـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \text{ (٦ - ٨)}$$

$$\text{وكذلك: جـ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \text{ (٦ - ٩)}$$

$$\text{ظـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \text{ (٦ - ١٠)}$$



شكل (٦ - ١١)

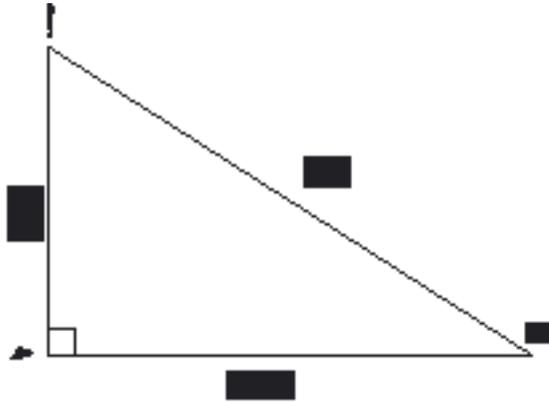
$$\text{ومن النتيجة (٦ - ١) نجد أن } \text{ظـ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} \text{ (٦ - ١١)}$$

وتجدر الإشارة إلى أن قيم الدوال المثلثية في المثلث القائم نطلق عليها (النسب

المثلثية) وذلك لأنها نسب بين أطوال أضلاع المثلث القائم.

مثال (٦-٦) :

أب حـ مثلث قائم الزاوية في حـ فيه $|أ حـ| = ٥$ سم ، $|ب حـ| = ١٢$ سم ،
احسب قيم النسب المثلثية للزاوية الحادة ب .



الحل :

$$|أ ب| = \sqrt{|ب حـ|^2 + |أ حـ|^2}$$

$$= \sqrt{١٤٤ + ٢٥}$$

$$= \sqrt{١٦٩}$$

$$\Leftarrow |أ ب| = ١٣ \text{ سم}$$

من (٦ - ٨)	جـ ب = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٥}{١٣}$
من (٦ - ٩)	جـ تـ ب = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{١٢}{١٣}$
من (٦ - ١٠)	ظـ ب = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٥}{١٢}$
من (٦ - ١١)	ظـ تـ ب = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{١٢}{٥}$

تمارين (٦ - ٣)

(١) إذا كانت زاوية حادة وكان جـ تـ ب = $\frac{١}{٢}$ ، فاحسب قيم النسب المثلثية الأخرى .

(٢) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، فيه $|أ ب| = ٣$ سم ، $|ب حـ| = ٤$ سم

أوجد :

(أ) $|أ حـ|$ ، (ب) جـ ب ، جـ تـ ب ، ظـ ب ، ظـ تـ ب

$$(3) \text{ مثلث } \triangle ABC \text{ قائم في } B \text{ فيه } |AB| = 6 \text{ سم ، جتا } A = \frac{3}{5}$$

(أ) ارسم المثلث $\triangle ABC$ بدقة

(ب) احسب طول كل من الوتر والضلع $[BC]$ ثم احسب النسب المثلثية للزاوية المقابلة للضلع الأصغر.

(4) عيّن في المستوي الإحداثي المتعامد النقطتين $A(2, 3)$ ، $B(4, 6)$ ثم احسب $\angle A$ ، $\angle B$ ، $\angle C$ حيث A ، B مسقطا ، B على المحور السيني ، على الترتيب ، ماذا تلاحظ ؟

(5) $\triangle ABC$ مثلث قائم في B . أثبت أن :

$$(أ) \quad |AB| = |AC| \cdot \text{جتا } A$$

$$(ب) \quad |AB| = |AC| \cdot \text{جتا } A = |BC| \cdot \text{جتا } A$$

(6) مثلث قائم الزاوية طول وتره 8 سم ، وطول أحد ضلعيه القائمين 6 سم .

(أ) احسب طول ضلعه القائم الآخر .

(ب) احسب قيم النسب المثلثية للزاوية الحادة الصغرى .

(ج) احسب قيم النسب المثلثية للزاوية الحادة الكبرى .

(د) ما العلاقة بين قيم النسب المثلثية للزاويتين الحادتين الصغرى والكبرى ؟

(7) $\triangle ABC$ مثلث قائم الزاوية في B ، فيه $|AB| = 12$ سم ، $|BC| = 5$ ، $|AC| = 13$ سم :

(أ) أوجد $\angle A$ ، $\angle B$ ، $\angle C$

(ب) احسب قيم النسب المثلثية للزاوية $\angle A$ ، $\angle B$ ، $\angle C$

$$(ج) \text{ أثبت أن : } \text{جتا } A = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{5}{13} ، \text{ جتا } B = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{12}{13} ، \text{ جتا } C = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{5}{12}$$

إرشاد : (جتا $\angle A$) = $\frac{|BC|}{|AC|}$ ، وكذلك (جتا $\angle B$) = $\frac{|AB|}{|AC|}$ ، (جتا $\angle C$) = $\frac{|BC|}{|AB|}$

٦ - ٥ بعض العلاقات المثلثية :

العلاقة بين النسب المثلثية لزاويتين متتامتين :

نُعرِّف الزاويتين المتتامتين على أنها الزاويتان اللتان مجموعهما 90° . فإذا كانت الزاوية الحادة قياسها α° ، يكون قياس متممها $(90^\circ - \alpha^\circ)$ ، وتعلم أن كل مثلث قائم زاويتاه الحادتان متتامتان، في الشكل (٦ - ١٢) المثلث $\triangle ABC$ قائم في B ، قياس زاويته $\hat{A} = \alpha^\circ$ فيكون قياس $\hat{C} = 90^\circ - \alpha^\circ$ وعليه فإن :

$$\text{جا } \alpha^\circ = \frac{||AB||}{||AC||} \quad \text{من (٦ - ٨)}$$

$$\text{جتا } (90^\circ - \alpha^\circ) = \frac{||AB||}{||AC||} \quad \text{من (٦ - ٩)}$$

$$\text{فينتج أن : } \boxed{\text{جتا } (90^\circ - \alpha^\circ) = \text{جا } \alpha^\circ} \quad \text{(٦ - ١٢)}$$

$$\text{وكذلك فإن : جتا } \alpha^\circ = \frac{||AB||}{||AC||} ، \text{ جا } (90^\circ - \alpha^\circ) = \frac{||AB||}{||AC||}$$

$$\text{فينتج أن : } \boxed{\text{جتا } \alpha^\circ = \text{جتا } (90^\circ - \alpha^\circ)} \quad \text{(٦ - ١٣)}$$

$$\text{وأيضاً نجد أن : } \boxed{\text{ظا } (90^\circ - \alpha^\circ) = \text{ظتا } \alpha^\circ} \quad \text{(٦ - ١٤) ، لماذا؟}$$

$$\text{وكذلك : } \boxed{\text{ظتا } (90^\circ - \alpha^\circ) = \text{ظا } \alpha^\circ} \quad \text{(٦ - ١٥) ، لماذا؟}$$

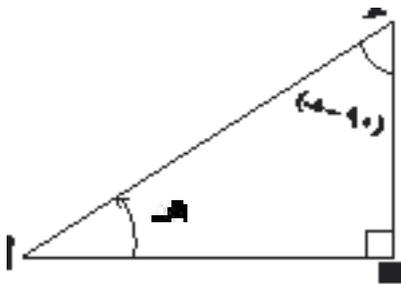
من ذلك ينتج أنه :

إذا كانت الزاويتان متتامتين فإن :

جيب إحداهما يساوي جيب تمام الأخرى

وبالعكس وظل إحداهما يساوي ظل تمام

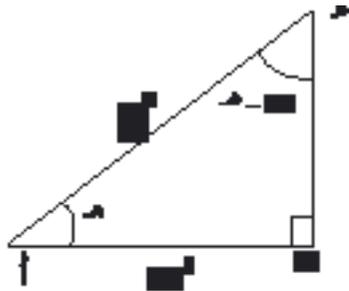
الأخرى وبالعكس . شكل (٦ - ١٢)



مثال (٧-٦) :

زاوية حادة قياسها α° ، حيث $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ، احسب قيم النسب المثلثية للزاوية $(90^\circ - \alpha)$

الحل :



شكل (٦-١٣)

نرسم مثلثاً قائماً ABC طول ضلعه القائم $[AB]$ يساوي ٤ سم وطول وتره $[AC]$ يساوي ٥ سم ، كما في الشكل (٦-١٣) ، فيكون :

$$|BC| = \sqrt{|AC|^2 - |AB|^2} = \sqrt{25 - 16} = 3 \text{ سم}$$

$$9 = 25 - 16 =$$

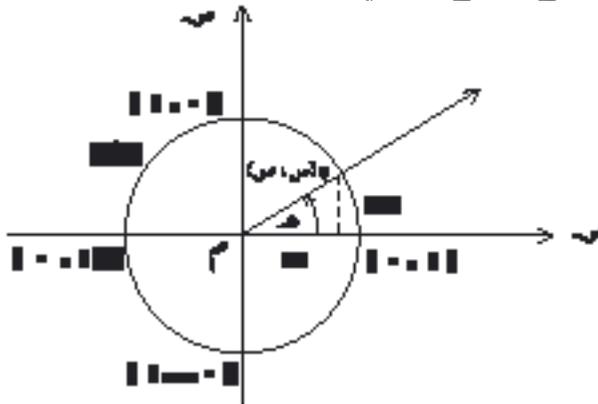
$$\Leftarrow |BC| = 3 \text{ سم}$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{4}{5} = \cos \alpha \text{ ، } \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{5} = \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = \sin(90^\circ - \alpha) \text{ ، } \sin \alpha = \frac{3}{5} = \cos(90^\circ - \alpha)$$

(ب) المتطابقتان الأساسيتان :

في الشكل (٦-١٤) الزاوية الحادة α في الوضع القياسي ، $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ نقطة تقاطع دائرة الوحدة $(x^2 + y^2 = 1)$ مع الضلع النهائي للزاوية ، لذلك فإن :



$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad (٦)$$

وحيث إن :

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x \text{ ، } \sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

$$\text{لكل } \alpha \in [0, 90^\circ)$$

لذا نعوض في (٦-١٦)

فنجد أن :

(جاءه)² + (جتاه)² = 1 لكل $\alpha \in]0^\circ, 90^\circ[$
 وتكتب عادة (جتاه) على الشكل جتا α ، (جاءه) على الشكل جا α
 فيكون لكل $\alpha \in]0^\circ, 90^\circ[$:

$$(17-6)$$

$$\boxed{\text{جا}^2\alpha + \text{جتا}^2\alpha = 1}$$

وحيث أن ظاه = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، فإن:

$$(18-6)$$

$$\boxed{\frac{\text{جاه}}{\text{جتاه}} = \text{ظاه}}$$

العلاقتان (17-6)، (18-6) تسميان العلاقتين الأساسيتين في حساب المثلثات. وسبب هذه التسمية هو أن العلاقات المثلثية الأخرى تعتمد عليهما.

مثال (1-8):

إذا كانت زاوية حادة حيث: $\frac{4}{5} = \text{جاه}$ ، فأوجد جتا α ، ظاه، وظناه.

الحل:

$$\text{جا}^2\alpha + \text{جتا}^2\alpha = 1 \text{ فيكون: } \text{جتا}^2\alpha = 1 - \text{جاه}^2$$

$$\text{وبالتعويض: } \text{جتا}^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\text{جتا}\alpha = \pm \frac{3}{5}$$

ولكن $0 < \text{جتا}\alpha \leq 1$ حسب التعريف (6-1) فيكون: $\text{جتا}\alpha = \frac{3}{5}$

$$\text{ظاه} = \frac{\text{جاه}}{\text{جتاه}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{ظناه} = \frac{1}{\text{ظاه}} = \frac{3}{4}$$

تمارين (٦ - ٤)

(١) إذا كانت زاوية حادة، وكانت $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ ، فاحسب $\cos \alpha$ ، $\tan \alpha$ ، $\cot \alpha$.

(٢) إذا كان $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ فما قيمة النسبة: $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ ؟

(٣)

(أ) اقسم جميع حدود المساواة: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ على $\sin^2 \alpha$ واستنتج

العلاقة التالية:

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

(ب) كيف نحصل على العلاقة التالية:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

(ج) احسب $\sin \alpha$ إذا كان: $\cos \alpha = \frac{2}{7}$

(٤) إذا كان: $\sin \alpha = 31^\circ$ ، $\cos \alpha = 0$

فاحسب قيم النسب المثلثية الأخرى لهذه الزاوية وقيم النسب المثلثية للزاوية المتممة لها.

(٥) إذا كان $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، فاحسب قيم النسب المثلثية الأخرى لهذه الزاوية،

وقيم النسب المثلثية للزاوية المتممة لها.

(٦) ما قيمة الزاوية الحادة α التي تحقق المعادلة التالية:

$$2 \sin^2 \alpha = 1$$

(٧) أكمل الجدول التالي:

٩٠°	٦٠°	٤٥°	٣٠°	٠°	جـ
١	٠,٨٦٦		٠,٥	٠	جاء
		٠,٧٠٧			جتاه
					ظاه
					ظتاه

٦ - ٦ الجداول المثلثية والحاسبات واستخداماتها :

(أ) النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصّة

هناك زوايا خاصة كثيرة الاستعمال ، من المفيد معرفة نسبها المثلثية نخص منها

الزوايا : ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠°

(أ) بالرجوع إلى المثال (٦ - ٤) نجد أننا قد حصلنا على النسب المثلثية

للزاوية ٤٥° وهي :

(٦ - ١٩)

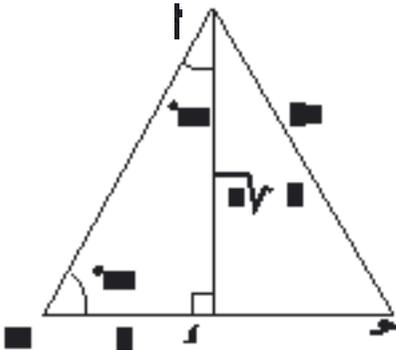
$$\text{جا } ٤٥^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(٦ - ٢٠)

$$\text{ظا } ٤٥^\circ = 1$$

(ب) بالنسبة للزاويتين الحادتين ٣٠° ، ٦٠° نرسم مثلثاً متطابق الأضلاع أ ب جـ

ونرسم أحد ارتفاعاته وليكن [أ د] مثلاً، انظر الشكل (٦ - ١٥).



شكل (٦ - ١٥)

إذا فرضنا أن $|أ د| = ٢$

فإن $|أ ب| = |أ ج|$ (لماذا؟)

ويكون في المثلث القائم أ ب د :

$$|أ ب|^2 - |أ د|^2 = |ب د|^2$$

$$٤ - ٢ = ٢$$

$$٢ = ٢$$

← $|\sin \alpha| = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. ومن الشكل نجد أن :

(٦ - ٢١)

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} = 30^\circ \text{ جتا} = 60^\circ \text{ جا}$$

(٦ - ٢٢)

$$\frac{1}{2} = 30^\circ \text{ جا} = 60^\circ \text{ جتا}$$

(٦ - ٢٣)

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 30^\circ \text{ ظتا} = 60^\circ \text{ ظا}$$

(٦ - ٢٤)

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}{3} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} = 30^\circ \text{ ظا} = 60^\circ \text{ ظتا}$$

(ب) استخدام الجداول المثلثية :

من الممكن أن نحصل على النسب المثلثية لأي زاوية معطاة بطريقة الرسم والقياس . النتائج التي نحصل عليها تكون تقريبية وتُرتَّب عادة في جداول خاصة تُسمَّى الجداول المثلثية . وهذه الجداول غالباً مقربةً لمنازل عشرية تناسب الغرض المستعملة له . فإذا كنا نبحث عن دقة متناهية فيمكن أن نقرَّبها إلى مائة مرتبة عشرية أو أكثر ، ولكن نرى أننا غالباً نكتفي بثلاث مراتب عشرية أو أربع ، (وربما خمس مراتب عشرية إذا كنا نبحث عن دقة أكثر) .

كثير من علماء المسلمين قد وضعوا جداول للنسب المثلثية والتي لم تتغير عما طوروه إلا الشيء القليل وربما كانت الجداول التي وضعوها أكثر دقة وخاصةً أنها لم تكن توجد لديهم وسائل التقنية الحديثة من الحاسبات الآلية والحاسبات اليدوية الصغيرة والتي سوف نتحدث عن استخدامها في الجزء الأخير من هذا البند .

استفاد واضعو الجداول المثلثية من العلاقة بين قيم النسب (الدوال) المثلثية للزاويتين المتتامتين ، فكل زاوية من الفترة $[0^\circ, 90^\circ]$ تقابلها متمماتها من الفترة $[90^\circ, 180^\circ]$ تكتب زوايا الفترة الأولى عادة في الجداول المثلثية في العمود الأيمن مرتبة من أعلى إلى أسفل ، وتقرأ قيم النسب (الدوال) المثلثية المقابلة لهذه الزوايا من

مرتبّة من أسفل إلى أعلى وتُقرأ قيم النسب المثلثية لهذه الزوايا من المدخل السفلي للجدول .

مثال (٩-٦) :

أوجد قيم الدوال المثلثية للزاويتين ٤٠° ، ٥٠°

الحل :

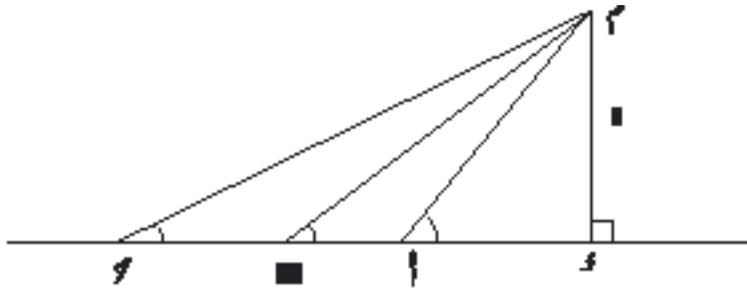
بالنظر إلى الجدول نجد أن :

	ظتا	ظا	جتا	جا	↘
٥٠°	١,١٩١٨	٠,٨٣٩١	٠,٧٦٦٠	٠,٦٤٢٨	٤٠°
↙	ظا	ظتا	جا	جتا	

يهيمن عند التعامل مع الجداول المثلثية والحاسبات أن نعرف أن النسب المثلثية

لزاوية حادة تتغير بتغير الزاوية الحادة بين ٠° و ٩٠°

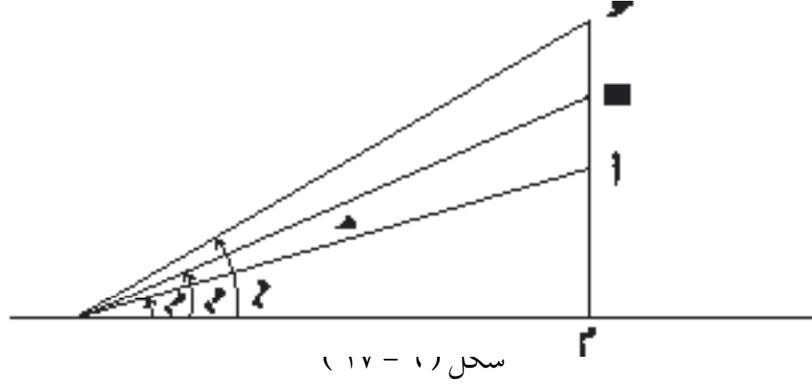
يوضح الشكل (٦ - ١٦) أنه كلما كبرت الزاوية الحادة كبر جيبها .



شكل (٦ - ١٦)

كما يوضح الشكل (٦ - ١٧) أنه كلما كبرت الزاوية الحادة صغر جيب تمامها،

وكلما كبرت الزاوية الحادة كبر ظلها وصغر ظل تمامها.



مثال (١٠-٦):

احسب جا 50° و 40°

الحل:

الزاوية 50° تقع بين الزاوية 40° والزاوية 41° ونعبر عن ذلك بأن:

$$41^\circ > 40^\circ \quad 50^\circ > 40^\circ$$

$$\text{جا } 41^\circ > \text{جا } 40^\circ \quad \text{جا } 50^\circ > \text{جا } 40^\circ$$

$$\text{أو } 0,6561 > 0,6428 > 0,6428 > 0,6428$$

وبحساب الفرق $0,6561 - 0,6428 = 0,1333$ ، نعلم أن جيب الزاوية

الحادة يزداد كلما كبرت الزاوية، وسوف نقبل أن جيب الزاوية يزداد بنسبة زيادة

الزاوية فيكون:

$$0,1333 = \frac{0,1333}{\text{س}} = \frac{60}{50}$$

وهذا يعني أن زيادة 50° على 40° يقابلها زيادة $0,1333$ على $0,6428$

$$\text{أي أن: جا } 50^\circ \approx 0,6428 + 0,1333$$

$$= 0,6539$$

استخدام الحاسبات :

أصبح وجود الحاسبات الصغيرة التي يمكن بواسطتها الحصول على قيم ونتائج عمليات حسابية ودوال مثلثية ولو غارتمية ميزةً سهّلت على الدارسين الكثير من الجهد والعناء الذي كانوا يواجهونه عند استخراج قيم معيّنة من الجداول المثلثية. وهذا بالطبع لا يعني أن استخدام الحاسبة يُغني عن فهم طريقة استخراج قيم الدوال المثلثية عن طريق الرسم والقياس أو أيّ من الطرق الأخرى .

يمكن بواسطة مفاتيح (أزرّة) الجيب وجيب التمام والظل الموجودة في الحاسبات العلمية استخراج قيم الدوال المثلثية. بالنظر إلى مفاتيح أي آلة حاسبة نلاحظ وجود جتا $\boxed{\text{Sin}}$ ، جتا $\boxed{\text{Cos}}$ ، ظا $\boxed{\text{Tan}}$ وهي الرموز اللاتينية للدوال المثلثية وتُنطق (ساين) $\boxed{\text{Sin}}$ ، (كوساين) $\boxed{\text{Cos}}$ ، (تانجنت) $\boxed{\text{Tan}}$. أغلب الحاسبات يوجد بها مفاتيح تسمح لك باستخراج قيم الدوال إما بالتقدير الستيني (الدرجات) أو بالتقدير الدائري (الراديان) .

يصعب هنا أن نوضح كيفية استعمال الآلة الحاسبة الصغيرة عند البحث عن قيم الدوال المثلثية والسبب هو أن الحاسبات أنواع وكل نوع له طريقة خاصة بالاستعمال، لكن يوجد مع كل آلة كُتِبَ يشرح طريقة استعمالها ومنها استخراج قيم الدوال المثلثية إذا كانت من ضمن ما تقوم به الحاسبة ، وأغلب الحاسبات العلمية تحتوي على الدوال المثلثية .

مثال (٦-١١) :

احسب جا 50° ، 40°

الحل :

سبق أن أوجدنا قيمة جيب هذه الزاوية باستخدام الجداول المثلثية ووجدنا أن:

$$\text{جا } 50^\circ = 0,6539$$

لكن باستخدام الحاسبة نجد أن :

$$\text{جا } 50^\circ = 0.6538609 \text{ ، } \text{جا } 40^\circ = 0.6538609$$

وبالمقارنة بين القيمتين نجد أن الحاسبة تعطينا قيمة أدق من الجدول ، ولو قربنا

العدد الحاصل عن طريق الآلة إلى أربع منازل عشرية لوجدنا :

$$\text{جا } 50^\circ = 0.6539 \text{ ، وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها من الجدول .}$$

مثال (٦-١٢) :

$$\text{إذا كان جتا } \alpha = 0.3420201 \text{ ، فأوجد زاوية } \alpha \text{ .}$$

الحل :

ندخل قيمة جيب تمام الزاوية $\alpha = 0.3420201$ في الآلة ثم نضغط على

المفتاح المعكوس [INV] ثم نضغط على المفتاح [Cos] فنحصل على الزاوية $\alpha = 70^\circ$

هناك آلات مضاف لها مفتاح آخر يجب أن نضغط عليه قبل المفتاح [INV] ويرمز

له [Qnd] .

وأخرى لا نحتاج فيها إلى استعمال المفتاح [INV] لوجود [Sin⁻¹] ، [Cos⁻¹] ،

[Tan⁻¹]

٦ - ٧ حساب الارتفاعات والأبعاد :

نتمكن من حساب الارتفاعات والأبعاد عندما نتمكن من قياس الزوايا التي

نراها بها ، ومن ثم نحسب النسبة المثلثية لهذه الزوايا باستخدام الجدول أو الحاسبة

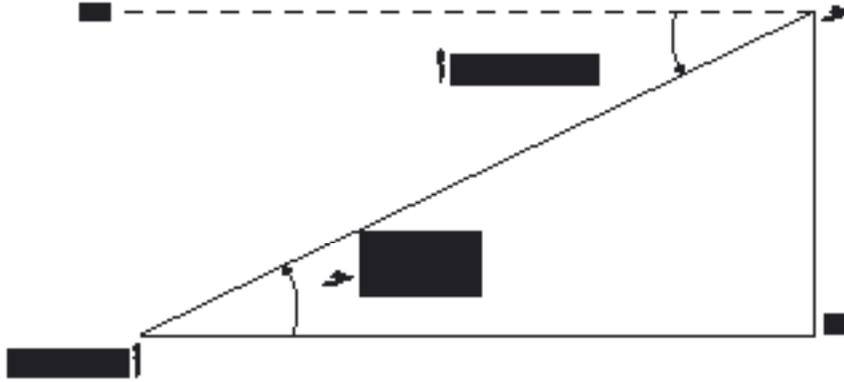
فتتوصل بذلك إلى حل المسائل التي تكون فيها هذه الارتفاعات أو الأبعاد مجهولة .

افرض أن راصداً واقف بصورة أن عينه في النقطة A ونظر إلى نقطة B تقع فوق

أفق AC ، فإن الزاوية الحاصلة بين المستقيم الواصل من عين الراصد إلى النقطة B

وبين أفق α تدعى «زاوية ارتفاع β بالنسبة إلى α مثل الزاوية β في الشكل (٦ - ١٨).

أما إذا كانت عين الراصد عند النقطة β ونظر إلى α التي تقع تحت أفق β ، فإن الزاوية الكائنة بين المستقيم الواصل من عين الراصد إلى النقطة α وبين أفق β تدعى «زاوية انخفاض α بالنسبة إلى β » مثل الزاوية α في الشكل (٦ - ١٨).



مثال (١ - ١٣):

من نقطة α ، تبعد عن قاعدة المئذنة ٧٥ متراً، نجد أن زاوية ارتفاع قمّتها 22° .
فما ارتفاع المئذنة؟

الحل:

ليكن s ارتفاع المئذنة.

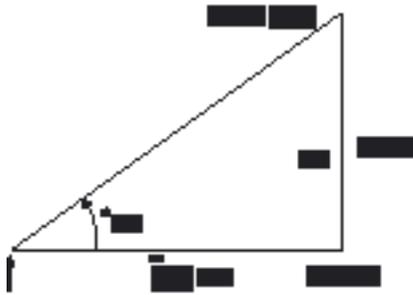
$$\frac{s}{75} = \tan 22^\circ$$

$$s = 75 \times \tan 22^\circ$$

باستخدام الحاسبة نجد أن:

$$\tan 22^\circ = 0.4040262$$

$$s = 75 \times 0.4040262 = 30.3019725$$



س = $75 \times 0,4040262 = 30,30197$ متراً $\approx 30,3$ م ويمكن إجراء

الحسابات بالحاسبة دفعة واحدة وفق الترتيب :

$$\boxed{22} \boxed{\text{Tan}} \boxed{75} \boxed{=} \rightarrow 30.30197$$

مثال (٦-١٤) :

سلم سيارة إطفاء طوله ١٧ متراً ويصل إلى سطح مبنى ارتفاعه ١٤ متراً عن سطح الأرض . ما هي الزاوية التي يُكوّنها السلم مع سطح الأرض ؟

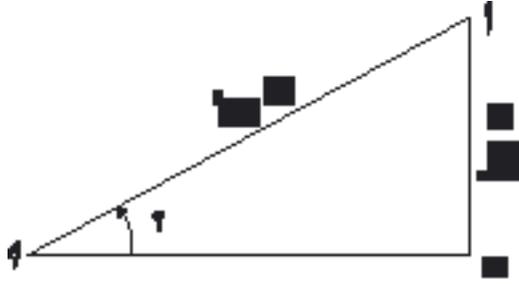
المحل :

$$\text{حاجب} = \frac{14}{17}$$

$$= 0,8235294$$

باستخدام الحاسبة نجد أن

$$\hat{\alpha} \approx 50^\circ 26'$$

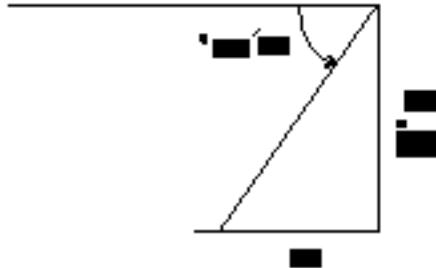


تدريب (٣-١) :

في المثال (٦ - ١٤) احسب بُعد قاعدة السلم عن المبنى .

مثال (٦-١٥) :

مبنى يرتفع عن سطح الأرض ٩٨ متراً، عند الصعود إلى سطح المبنى والنظر إلى الجهة الأخرى من الشارع وجد أن زاوية الانخفاض 10° 68° . ما عرض الشارع ؟



المحل :

$$\text{ظنا } 10^\circ 68' = \text{ظنا } 50^\circ 21'$$

$$\frac{\text{س}}{98 \text{ متراً}} = \text{ظنا } 50^\circ 21'$$

$$\text{س} = 98 \times \text{ظا } 50^\circ$$

$$= 0,4006464 \times 98 =$$

$$= 39,263347 \approx 39,26 \text{ متر}$$

إذن عرض الشارع = 39,26 متر

تمارين (٦ - ٥)

(١) حوّل قيم النسب المثلثية الآتية إلى أعداد عشرية، ثم قارن النتائج التي تحصل

عليها بالقيم التي تحصل عليها من استخدام الحاسبة والجدول :

$$(أ) \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{جتا } 45^\circ = \text{جتا } 45^\circ$$

$$(ب) \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{جتا } 60^\circ = \text{جتا } 30^\circ$$

$$(ج) \sqrt{3} = \text{ظنا } 60^\circ = \text{ظنا } 30^\circ$$

$$(د) \frac{1}{2} = \text{جتا } 60^\circ = \text{جتا } 30^\circ$$

(٢) أوجد :

$$\text{جتا } 30^\circ ، \text{جتا } 10^\circ ، \text{جتا } 20^\circ ،$$

$$\text{جتا } 48^\circ ، \text{ظنا } 50^\circ ، \text{ظنا } 16^\circ ،$$

(٣) استخدم الحاسبة لحساب الزاوية في كل من الحالات التالية :

$$\text{جتا} = 0,2560 ، \text{جتا} = 0,748956 ،$$

$$\text{جتا} = 0,825113 ، \text{جتا} = 0,564967 ،$$

$$\text{جتا} = 0,731948 ، \text{ظنا} = 1,130294 ،$$

$$\text{ظنا} = 0,414213$$

(٤) من نقطة تبعد عن قاعدة مئذنة ٥٠ متراً ، وجدنا أن زاوية ارتفاع قمّتها $30^\circ 27'$. فما ارتفاع المئذنة ؟

(٥) وجد مسّاح من سطح منزل أن زاوية ارتفاع قمة شجرة باسقة 29° ، وزاوية انخفاض قاعدتها 12° . فإذا كان البعد بين المنزل والشجرة ٢٥ متراً . فما ارتفاع كل من المنزل والشجرة ؟

(٦) وجد رجل أن زاوية ارتفاع قمة جبل هي $21^\circ 32'$ ، ولما سار نحو الجبل مسافة ٨٠٠ متراً وجد أن زاوية الارتفاع 50° . فما ارتفاع قمة الجبل ؟

(٧) سارية علم ارتفاعها ١٠ أمتار فوق تل ، ومن نقطة في المستوى الأفقي المار بقاعدة التل وجد أن زاويتي ارتفاع قمة السارية وقاعدتها $20^\circ 47'$ ، $20^\circ 38'$ على الترتيب . احسب ارتفاع التل عن سطح الأرض .

(٨) رصد رجل مئذنة من نقطة على سطح الأرض فوجد أن زاوية ارتفاعها $38^\circ 32'$ ولما تقدم الرجل نحو المئذنة على الخط المستقيم الواصل بينها وجد أن زاوية ارتفاعها $24^\circ 36'$. فإذا كان ارتفاع المئذنة ١٢ متراً ، فاحسب طول المسافة التي سارها الرجل .

(٩) من قاعدة مبنى ارتفاعه عشرة أمتار، كانت زاوية ارتفاع مئذنة 45° ، ومن سطح المبنى وجد أن زاوية ارتفاعها 30° ، احسب ارتفاع المئذنة وبعدها عن المبنى .

(١٠) س ، ص نقطتان على شاطئ نهر والمسافة بينهما ١٥٠ متراً ، $\angle س ص ع = 50^\circ$ ، $\angle ص س ع = 50^\circ$. ما عرض النهر؟

(١١) من قمة برج ارتفاعه ٨٠ متراً رصد رجل قريتين واقعتين في جهتين مختلفتين من البرج وعلى استقامة قاعدته، فوجد أن زاويتي الانخفاض $14^\circ 15'$ ، $42^\circ 20'$ على الترتيب . فما هو البعد بين القريتين ؟

(١٢) يقع عمود بين نقطتين تبعدان عن بعضهما ١٠٠ متر . من النقطة اليمنى وجد

أن زاوية ارتفاع قمة العمود 12° . ومن النقطة اليسرى وجد أن زاوية ارتفاعها 49° فما ارتفاع هذا العمود؟

تمارين عامة على الباب السادس

- (١) حوّل الدرجات إلى راديان والراديان إلى درجات :
(أ) 42° ، 89° ، 10° ، 50° ، 75°
(ب) $\frac{1}{3}$ راديان ، ١ راديان ، $\frac{1}{12}$ راديان ، $\frac{3}{4}$ راديان.
- (٢) كم المسافة التي تقطعها نقطة على طرف عقرب الدقائق، في عشر ثوان إذا كان طوله ٩ سم؟
- (٣) قمر صناعي يدور حول الأرض دورة كاملة كل ٤ ساعات، فإذا كان يبعد عن مركز الأرض بمقدار ٦٥٠٠ كم، فما هي سرعته؟
- (٤) مثلث قائم الزاوية طول أحد ضلعيه القائمين ٥، ٣ سم .
(أ) ارسم هذا المثلث إذا كان جيب الزاوية المقابلة لذلك الضلع $= \frac{7}{10}$
(ب) احسب طول ضلعه القائم الآخر ثم احسب قيم النسب المثلثية للزاوية الحادة المقابلة للضلع القائم الآخر .
- (٥) مثلث قائم الزاوية طول وتره ٢٦ سم، وطول أحد ضلعيه القائمين ٢٤ سم.
(أ) احسب طول ضلعه القائم الثاني .
(ب) احسب قيم النسب المثلثية لزاويته الحادة الصغرى .
(ج) احسب قيم النسب المثلثية لزاويته الحادة الكبرى .
(د) ما العلاقة بين قيم النسب المثلثية للزاويتين الحادتين الصغرى والكبرى .
- (٦) إذا كان : $\tan 22^\circ = 0.4040$ ،
فاحسب قيم النسب المثلثية الأخرى لهذه الزاوية والزاوية المتممة لها . (بدون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة) .

٧) ما قيمة الزاوية الحادة α التي تحقق المعادلة التالية :

$$2 \cot^2 \alpha = 1 \text{ ؟}$$

احسب قيم جميع النسب المثلثية لهذه الزاوية .

٨) استخدم الجداول المثلثية لحساب ما يلي :

$$\begin{aligned} &\text{جا } 25^\circ \text{ ، } 27^\circ \text{ ، } \text{جا } 10^\circ \text{ ، } 75^\circ \text{ ، } \text{جتا } 50^\circ \text{ ، } 45^\circ \\ &\text{جتا } 48^\circ \text{ ، } 60^\circ \text{ ، } \text{ظا } 15^\circ \text{ ، } 47^\circ \text{ ، } \text{ظتا } 17^\circ \text{ ، } 69^\circ \end{aligned}$$

٩) استخدم الحاسبة في حساب النسب المثلثية في المسألة رقم ٨ السابقة .

١٠) قيس طول ظل بناية عندما كانت زاوية ارتفاع الشمس 30° ثم أعيد القياس عندما كانت زاوية ارتفاع الشمس 60° فكان الفرق بين القياسين ٣٥ متراً ، أوجد ارتفاع البناية .

١١) باخرتان غادرتا الميناء في الوقت نفسه، الأولى أبحرت بسرعة ٤٠ كم/الساعة في اتجاه 42° شمال شرقي ، والثانية أبحرت بسرعة ٥٠ كم/الساعة في اتجاه 48° الجنوب الشرقي . كم تبعدان عن بعضهما بعد ثلاث ساعات من مغادرة الميناء .

الزاوية	جا	جتا	ظا	ظنا	
°٩٠	٠,٠٠٠٠	١,٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠		
°٨٩	٠,٠١٧٥	٠,٩٩٩٨	٠,٠١٧٥	٥٧,٢٩٠٠	
°٨٨	٠,٠٣٤٩	٠,٩٩٩٤	٠,٠٣٤٩	٢٨,٦٣٦٣	
°٨٧	٠,٠٥٢٣	٠,٩٩٨٦	٠,٠٥٢٤	١٩,٠٨١١	
°٨٦	٠,٠٦٩٨	٠,٩٩٧٦	٠,٠٦٩٩	١٤,٣٠٠٧	
°٨٥	٠,٠٨٧٢	٠,٩٩٦٢	٠,٠٨٧٥	١١,٤٣٠١	
°٨٤	٠,١٠٤٥	٠,٩٩٤٥	٠,١٠٥١	٩,٥١٤٤	
°٨٣	٠,١٢١٩	٠,٩٩٢٥	٠,١٢٢٨	٨,١٤٤٣	
°٨٢	٠,١٣٩٢	٠,٩٩٠٣	٠,١٤٠٥	٧,١١٥٤	
°٨١	٠,١٥٦٤	٠,٩٨٧٧	٠,١٥٨٤	٦,٣١٣٨	
°٨٠	٠,١٧٣٦	٠,٩٨٤٨	٠,١٧٦٣	٥,٦٧١٣	
°٧٩	٠,١٩٠٨	٠,٩٨١٦	٠,١٩٤٤	٥,١٤٤٥	
°٧٨	٠,٢٠٧٩	٠,٩٧٨١	٠,٢١٢٦	٤,٧٠٤٦	
°٧٧	٠,٢٢٥٠	٠,٩٧٤٤	٠,٢٣٠٩	٤,٣٣١٥	
°٧٦	٠,٢٤١٩	٠,٩٧٠٣	٠,٢٤٩٣	٤,٠١٠٨	
°٧٥	٠,٢٥٨٨	٠,٩٦٥٩	٠,٢٦٧٩	٣,٧٣٢١	
°٧٤	٠,٢٧٥٦	٠,٩٦١٣	٠,٢٨٦٧	٣,٤٨٧٤	
°٧٣	٠,٢٩٢٤	٠,٩٥٦٣	٠,٣٠٥٧	٣,٢٧٠٩	
°٧٢	٠,٣٠٩٠	٠,٩٥١١	٠,٣٢٤٩	٣,٠٧٧٧	
°٧١	٠,٣٢٥٦	٠,٩٤٥٥	٠,٣٤٤٣	٢,٩٠٤٢	
°٧٠	٠,٣٤٢٠	٠,٩٣٩٧	٠,٣٦٤٠	٢,٧٤٧٥	
°٦٩	٠,٣٥٨٤	٠,٩٣٣٦	٠,٣٨٣٩	٢,٦٠٥١	
°٦٨	٠,٣٧٤٦	٠,٩٢٧٢	٠,٤٠٤٠	٢,٤٧٥١	
الزاوية	جتا	جا	ظنا	ظا	

الزاوية	جا	جتا	ظا	ظتا	الزاوية
23°	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	67°
24°	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	66°
25°	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	65°
26°	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	64°
27°	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	63°
28°	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	62°
29°	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	61°
30°	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	60°
31°	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	59°
32°	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	58°
33°	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	57°
34°	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	56°
35°	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	55°
36°	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	54°
37°	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	53°
38°	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	52°
39°	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	51°
40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50°
41°	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	49°
42°	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	48°
43°	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	47°
44°	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	46°
45°	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	45°
	جتا	جا	ظتا	ظا	الزاوية

الباب السابع

الدوال الأسية واللوغاريتمية

- ٧ - ١ الأسس .
- ٧ - ٢ الجذور .
- ٧ - ٣ الدالة الأسية .
- ٧ - ٤ تطبيقات جبرية .
- ٧ - ٥ تعريف اللوغاريتم - الدالة اللوغاريتمية .
- ٧ - ٦ قوانين اللوغاريتمات .
- ٧ - ٧ اللوغاريتمات العشرية .
- ٧ - ٨ الاستفادة من اللوغاريتمات في إجراء الحسابات .

٧ - ١ الأسس :

سبق لك أن درست في المرحلة المتوسطة، كلاً من الأسس والجذور التربيعية، حيث تعرفت على قوى عددٍ كُليٍّ أو نسبي، عندما يكون الأس عدداً طبيعياً، كما تعرفت على الجذر التربيعي لعددٍ غير سالب .

وعندما تعرّفت على مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} ، رأيت أن خصائص العمليات في مجموعة الأعداد النسبية \mathbb{Q} هي نفسها في \mathbb{R} .

(١) قوى عدد حقيقي :

كما رأينا في دراستنا لقوى عدد نسبي، فإنه في حالة وجود حاصل ضرب عدّة عوامل متساوية مثل: $١ \times ١ \times ١ \times ١$ ، $٢ \times ٢ \times ٢$ ،

(لاحظ أن لدينا في هذا المثال أربعة عوامل كل منها ١)، فبدلاً من كتابته بالشكل السابق، نكتبه اختصاراً: $١^٤$

$$\text{أي أنّ: } ١ = ١ \times ١ \times ١ \times ١$$

وعليه يكون: $٢^٥ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢$

وكذلك فإن: $(-\frac{٢}{٣})^٢ = (-\frac{٢}{٣}) \times (-\frac{٢}{٣})$ وهو مربع العدد $(-\frac{٢}{٣})$

وأيضاً: $(\sqrt[٣]{٣})^٣ = \sqrt[٣]{٣} \times \sqrt[٣]{٣} \times \sqrt[٣]{٣}$ وهو مكعب العدد $\sqrt[٣]{٣}$

وبصورة عامة :

تعريف (٧-١):

إذا كان $a \neq 0$ ، $b \in \mathbb{Z}$ فإن:

عواملها كل منها a

$$a^b = \underbrace{a \times \dots \times a}_{b \text{ عواملها كل منها } a}$$

العدد a يسمى الأساس والعدد b يسمى الأس والمقدار a^b يسمى القوة النونية للعدد a .

وكما رأينا في المرحلة المتوسطة في حالة قوى عدد نسبي، نستخدم على ما يلي:

تعريف (٧-٢):

إذا كان $a \neq 0$ ، $b \in \mathbb{Z}$ ، $a \neq 0$ فإن:

$$(1) \quad 1 = a^0$$

$$(2) \quad \frac{1}{a^b} = a^{-b}$$

وبالرجوع إلى التعريفين (٧-١)، (٧-٢) نكون قد عرفنا قوة عدد حقيقي،

إذا كان الأس عدداً صحيحاً، ونلخص ذلك بما يلي:

تعريف (٧-٣):

إذا كان $a \neq 0$ ، $b \in \mathbb{Z}$ فإن:

عواملها كل منها a

$$\left. \begin{array}{l} a \times \dots \times a \\ 1 \\ \frac{1}{a^b} \end{array} \right\} = a^b$$

عندما $b < 0$

عندما $b = 0$ ، $a \neq 0$

عندما $b > 0$ ، $a \neq 0$

مثال (٧-١) :

$$(١) (\sqrt{٥})^2 = \sqrt{٥} \times \sqrt{٥} = \sqrt{٥ \times ٥} = \sqrt{٢٥} = ٥ \text{ (مربع العدد } \sqrt{٥} \text{)}$$

$$(٢) (\sqrt[٣]{١})^٣ = ١$$

$$(٣) ١٠^{-٤} = \frac{١}{١٠٠٠٠} = \frac{١}{١٠^٤}$$

$$(٤) ٧,١ \times ١٠^{-٥} = \text{معامل التمديد الطولي للنحاس هو مط}$$

$$٧,١٠٠٠٠٠٠٠ = \frac{٧,١}{١٠^٥} = \text{هذا يعني أن مط}$$

(٥) نصف قطر ذرة الهيدروجين = $٥,٣ \times ١٠^{-١٠}$ متر. العدد بالشكل : $٥,٣ \times ١٠^{-١٠}$ متر.

(٦) سرعة الضوء في الفراغ تُكتب بالشكل : ٣×١٠^٨ كلم/ثانية

بدلاً من ٣٠٠٠٠٠٠ كلم/ثانية

تمارين (٧ - ١)

كتابة الأعداد العليمية الكبيرة، نستفيد من القوى ذات الأس الموجب للعدد ١٠ ، وذلك لتسهيل حفظها أو كتابتها، فنضعها على الشكل:

(عدد ينتمي إلى الفترة $[١٠, ١٠٠)$ مضروباً بالقوة المناسبة للعدد ١٠)

فقطر الشمس مثلاً يُقدَّر بحوالي ١٣٩٠٠٠٠٠ كلم

نكتبه : $١٣٩٠٠٠٠٠ = ١,٣٩ \times ١٠^٨$ كلم

استفد من قوى العدد ١٠ في كتابة الأعداد التالية :

(١) سرعة جواد السباق حوالي ٦٨٠٠٠٠ متر/ساعة .

(٢) سرعة عربة السباق حوالي ٦٤٠٠٠٠٠ متر/ساعة.

اكتب الأعداد التالية كما في المثال الآتي :

هناك بكتريا صغيرة طولها ٢, ٣ × ١٠^{-٤} ملم = ٢, ٣ × ١٠^{-٤} × ١٠^٣ = ٠, ٠٠٠٣٢ = ٠, ٠٠٠٣٢ ملم.

(١٤) كتلة الالكترون = ١١, ٩ × ١٠^{-٢٥} ملغم.

(١٥) كتلة البروتون = ٦٧٣, ١ × ١٠^{-٢١} ملغم.

(١٦) كتلة النيوترون = ٦٧٥, ١ × ١٠^{-٢٤} غم

في التمارين من (١٧) إلى (٢٤)، ميِّز العبارة الصحيحة والخاطئة وبين السبب :

$$(١٧) \quad \left(\frac{1}{-}\right)^{-} = - \quad \text{لكل } \neq \text{ (ج)}$$

(١٨) 1^s تعني أن العدد 1 مضروبٌ بنفسه س من المرات (س ≠ 1).

(١٩) إذا رفعنا أي عدد حقيقي إلى القوة صفر، فإن الناتج يساوي الواحد.

(٢٠) لكل س ≠ 1 عين العبارة الصحيحة أو الخاطئة فيما يلي :

$$(أ) \quad 1 = (س + ٨)$$

$$(ب) \quad (س + ٢)^{-١} = \frac{1}{س + ٢}$$

$$(ج) \quad (س + ٨)^{-١} = \frac{1}{س + ٨}$$

(٢١) ٣٠ بليوناً = ٣ × ١٠^{١٠}

(٢٢) ٠, ٠٠٠٠٥٢٣ = ٢٣, ٥ × ١٠^{-٥}

(٢٣) ٠, ٠٠٠٠٢٤ = ٢, ٤ × ١٠^{-٥}

(٢٤) ٠, ٠٠٠٠٨٩١ = ٨, ٩١ × ١٠^{-٤}

(٢) خصائص قوى عدد حقيقي :

كما هي الحال في قوى عدد نسبي، نبرهن على النظرية التالية المتعلقة بقوى عدد حقيقي:

نظرية (٧ - ١) :

إذا كان a ، b \exists m ، n \exists p فإن :

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \quad (١) \quad a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} \quad (٢)$$

$$a^m \cdot a^n = a^{(b \cdot a)} \quad (٣) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{(\frac{a}{b})} \quad (٤) \quad b \neq 0$$

$$(٥) \text{ بفرض } m < n, a \neq 0, \quad a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}, \quad \frac{1}{a^{n-m}} = \frac{a^m}{a^n}$$

البرهان :

سنكتفي بالبرهان على الخاصة الأولى، ونترك البرهان على بقية الخواص للطالب:

$$\underbrace{a \times \dots \times a}_{m \text{ عاملاً كل منها } a} \times \underbrace{a \times \dots \times a}_{n \text{ عاملاً كل منها } a} = a^m \cdot a^n$$

$$\underbrace{a \times \dots \times a}_{(m+n) \text{ عاملاً كل منها } a} =$$

$$a^{m+n} =$$

مثال (٧ - ٢) :

بسط كلاهما يلي :

$$(1) \frac{10^3 \cdot 10^5}{3^3 \cdot 15^3} \quad (2) \quad (3) \quad \left(\frac{ص}{2س} \right)^3 \quad (4) \quad \left(\frac{3ا}{ب} \right)^2 \quad (5) \quad \left(\frac{ب \cdot ا}{د} \right)^3$$

الـجـل :

$$\frac{2 \text{ س}^2}{2 \text{ | } 3} = \frac{2 \text{ س}^2}{1} \cdot \frac{1}{2 \text{ |}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \text{ س}^2}{3 \text{ س}^3} \cdot \frac{1}{2 \text{ |}} \cdot \frac{10}{15} = \frac{2 \text{ | } 10 \text{ س}^2}{3 \text{ س}^3 \text{ | } 15}$$

$$\frac{2 \text{ س}^2}{2 \text{ | } 3} = \frac{3 \text{ س}^3 \text{ | } 5 \times 2 \text{ س}^2}{3 \text{ س}^3 \text{ | } 5 \times 2 \text{ | } 3} = \frac{2 \text{ | } 10 \text{ س}^2}{3 \text{ س}^3 \text{ | } 15}$$
 أو بصورة أخرى :

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}^2} = \frac{3 \text{ ص}^3}{2 \text{ س}^3 \text{ | } 5} = \frac{3 \text{ ص}^3}{2 \text{ س}^3} \cdot \frac{\text{س}}{\text{ص}} = 3 \left(\frac{\text{ص}}{2 \text{ س}} \right)$$

$$\frac{9 \text{ -}}{2 \text{ | } 3} = \frac{3 \text{ | } 9 \text{ -}}{8 \text{ | } 3} = \frac{3 \text{ | } 3 \text{ | } 9 \text{ -}}{3 \text{ | } 8 \text{ | } 3} = \frac{3 \text{ | } 3 \text{ -}}{3 \text{ | } 8} \times \frac{1}{8 \text{ |}} = 3 \left(\frac{\text{3 -}}{8 \text{ |}} \right) \left(\frac{1}{8 \text{ |}} \right)$$

مثال (٧-٣) :

تعلم أن المتر يساوي 10^3 ملم وأن المليمتر يساوي 10^3 ميكرون ، أوجد بالميكرون في الثانية سرعة الصوت بالهواء إذا كانت تساوي 344 م/ث .

الـجـل :

$$344 \text{ م} / \text{ث} = 344 \times 10^3 \text{ م} / \text{ث}$$

$$= 344 \times 10^3 \times 10^3 \text{ ملم} / \text{ث}$$

$$= 344 \times 10^3 \times 10^3 \times 10^3 \text{ ميكرون} / \text{ث}$$

$$= 344 \times 10^9 \text{ ميكرون} / \text{ث}$$

تمارين (٧-٢)

في التمارين من (١) إلى (٦) ميِّز العبارة الصحيحة والخاطئة وبين السبب :

$$(1) \quad (a \cdot b)^{m+n} = a^m \cdot b^m \cdot a^n \cdot b^n \quad (2)$$

$$(3) \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (4) \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(5) \quad \frac{a^2}{b^4} = \frac{a^4}{b^2 + a^2} \quad (6) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \frac{b^3}{a^3}$$

في التمارين من (٧) إلى (٩) ضع في الفراغات ما يناسبها :

$$(7) \quad (2a-3b)^2 = 4a^2 - \dots - \dots$$

$$(8) \quad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \dots + \dots + \dots$$

$$(9) \quad (a-b-c)^{-1} = \frac{1}{a^2 - b^2 - c^2 - \dots - \dots - \dots}$$

في التمارين من (١٠) إلى (١٣) بسّط العبارات علماً بأن المقام في كل منها لا يساوي الصفر.

$$(10) \quad \frac{3a^2 - 2a}{3a} \cdot \frac{2}{3} \quad (11) \quad \frac{a^3 - a^2}{a^2(a-b)}$$

$$(12) \quad \frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2} \quad (13) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^3$$

يطلب حل المسائل من (١٤) إلى (١٨) بالاعتماد على خصائص القوى :

(١٤) تنتشر أمواج الراديو بسرعة 3×10^8 م/ث ، أوجد المسافة التي تقطعها موجة الراديو خلال يوم واحد .

(١٥) في المسألة السابقة أوجد الزمن اللازم لوصول إشارة مرسلة من الأرض بالراديو إلى مركبة فضاء تبعد 4×10^5 م عن موضع الاتصال على الأرض .

(١٦) قال تعالى : ﴿وَأَنَّهُ هُوَ رَبُّ السَّعْرِيِّ﴾ - سورة النجم الآية ٤٩ -
والسَّعْرِيُّ اليمانية نجم يبعد عن الأرض مسافة قدَّرها العلماء بحوالي
(٣٣٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠) كيلومتر . فكم يوماً يلزم لوصول ومضة من
السَّعْرِيِّ إلى الأرض؟ (سرعة الضوء 3×10^8 م/ث).

(١٧) تصل ومضة الضوء المنطلقة من نجم (النسر الواقع) إلى الأرض خلال
(٧٢٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠) ثانية .

أوجد بعد هذا النجم عن الأرض . (سرعة الضوء 3×10^8 م/ث).
(١٨) يقطع مكوك الفضاء ثلاثين مليون متر في الساعة، ففي الوقت الذي يتحرك
خلاله بهذه السرعة، أوجد ما يقطعه المكوك بالثانية الواحدة. (قرب
الجواب إلى أقرب متر) .

(٣) الأسس أعداد صحيحة :

يمكننا تعميم النظرية (٧ - ١) بحيث تشمل قوى عدد حقيقي عندما تكون
الأسس أعداداً صحيحة، وذلك اعتماداً على التعريف (٧-٢) ، فنحصل على :

نظرية (٧-٢) :

إذا كان a ، b ، c ، m ، n ، p فإن :

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \quad (١) \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad (٢)$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (٣) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (٤) \quad \frac{a^m}{a^p} = a^{m-p} \quad (٥)$$

شريطة أن لا ينعدم أي مقدار يقع بالمقام ، كما لا ينعدم أي مقدار مرفوع إلى
الأس (صفر).

سنكتفي بإيضاح ذلك في حالة وجود أسس سالبة من خلال فقرات المثال التالي:

مثال (٤-٧):

$$(١) \quad ١ \neq ١^{-٣} \times ١^{-٥} = ١^{-٥} \times ١^{-٣} \quad \text{حسب التعريف (٧-٣)، } ١ \neq ٠$$

$$= \frac{١}{١^{-٥} \times ١^{-٣}} =$$

$$= \frac{١}{١^{-٥+٣}} \quad \text{حسب الخاصة (١) من النظرية (٧-١)}$$

$$= \frac{١}{١^{-٢}} = ١^{٢} = ١$$

$$\text{أي أن: } ١^{-٥} \times ١^{-٣} = ١^{-٥+٣}$$

$$(٢) \quad ١^{-٢} \cdot ١^{-٣} = \frac{١}{١^{-٢}} \times \frac{١}{١^{-٣}} = \frac{١}{١^{-٢} \cdot ١^{-٣}} = \frac{١}{١^{-(٢+٣)}} = ١^{-٢} \cdot ١^{-٣}$$

$$(٣) \quad ١^{-٢} = \frac{١}{(١^{-٢})^{-٣}} = \frac{١}{١^{-٢ \times -٣}} = ١^{-٢} \cdot ١^{-٣}$$

$$\text{أي أن: } ١^{-٢} \cdot ١^{-٣} = ١^{-٢ \times -٣}$$

$$(٤) \quad ١^{-٣} \cdot ١^{-٥} = \frac{١^{-٣}}{١^{-٥}} = ١^{-٣+٥} = ١^{-٢}$$

$$= ١^{-٢} \quad \text{وهذا يعني أن } ١^{-٣} \cdot ١^{-٥} = ١^{-٢}$$

مثال (٥-٧):

أوجد الجواب بأبسط صورة:

$${}^9(\sqrt[3]{b}) \times {}^{-2}(\sqrt[3]{b}) \times {}^{-3}(\sqrt[3]{b}) \quad (1)$$

$$b \neq 0, \quad b^{12} \times \left(\frac{b^{-3}}{b^{-4}} \right) \quad (2)$$

الحل:

$${}^9(\sqrt[3]{b}) \times ({}^{-2}(\sqrt[3]{b})) \times {}^{-3}(\sqrt[3]{b}) = {}^9(\sqrt[3]{b}) \times {}^{-2}(\sqrt[3]{b}) \times {}^{-3}(\sqrt[3]{b}) \quad (1)$$

$${}^9(\sqrt[3]{b}) \times {}^{-5}(\sqrt[3]{b}) =$$

$${}^4(\sqrt[3]{b}) =$$

$$\sqrt[3]{b} \times \sqrt[3]{b} \times \sqrt[3]{b} \times \sqrt[3]{b} =$$

$$b = b \times b =$$

$$b^{12} \times \frac{b^9}{b^{12}} = b^{12} \times \left(\frac{b^{-3}}{b^{-4}} \right) \quad (2)$$

$$b^9 = b^0 \times b^9 = b^{12-12} \times b^9 =$$

ملحوظة (٧ - ١):

لاحظ أنَّ: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$a^m \cdot a^{(m+n)} =$$

$$a^{m+m+n} = a^{2m+n} =$$

وبصورة عامة:

إذا كانت: a^m, a^n, a^p, \dots ، فإن:

$$a^{m+n+p+\dots} = a^m \times \dots \times a^n \times a^p$$

مثال (٦-٧):

$$\frac{-2 \times 9 \times 4}{-8 \times (-3)} = \text{اختصر: } 9$$

الحل:

$$\frac{-2 \times (-3) \times (-2)}{-8 \times (-3)} = 9$$

$$\frac{-2 \times 3 \times -10}{-12 \times -6} =$$

$$+6 \times -3 \times -4 \times 3 \times -2 \times -10 =$$

$$+6 \times -2 \times -4 \times 3 \times -2 \times -10 =$$

$$3 \times 2 =$$

$$9 =$$

مثال (٧-٧):

$$1 = \frac{-1 \times 2 \times 4 - 2 \times 5}{2 - 1 \times 2 \times 2} \text{ أثبت أن:}$$

الحل:

$$\text{بما أن: } 2 \times 2 = 1 + 2 = -1 \times 2 \times 2 = -1 \times 2 \times 4 =$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 5}{2 - 1 \times 2 \times 2} = \text{فالطرف الأيمن}$$

$$\frac{(2-5) \times 2}{(1-4) \times 2} =$$

$$= \frac{3}{3} \times -2 \times 2 = 1 \times 2 = 1 = \text{الطرف الأيسر.}$$

مثال (٧-٨) :

اكتشف العلماء أن المادة تتحوّل إلى طاقة ، والمعادلة التي اكتشفها (آينشتاين) للعلاقة بين الطاقة وكتلة المادة المعادلة لها هي : الطاقة = $E = mc^2$ حيث: m الكتلة مقدرة بالكيلو غرام، c سرعة الضوء وتساوي $3,0 \times 10^8$ م/ث وحينئذ تكون الطاقة مقدرة بالجول .
أوجد الطاقة التي تعادل إلكترونًا واحدًا . علماً بأن كتلة الإلكترون هي : (9×10^{-31}) كلغ .

الحل :

$$\text{الطاقة} = E = mc^2$$

$$= (9 \times 10^{-31}) \times (3,0 \times 10^8)^2 =$$

$$= 9 \times 10^{-31} \times 9 \times 10^{16} =$$

$$= 8,1 \times 10^{-14} \text{ جولاً} = 8,1 \times 10^{-14} \text{ جولاً} .$$

مثال (٧-٩) :

قطر الشمس والقمر هما على الترتيب: $1,39 \times 10^6$ كلم، $3,48 \times 10^3$ كلم
أوجد نسبة قطر الشمس إلى قطر القمر .

الحل :

$$\frac{\text{قطر الشمس}}{\text{قطر القمر}} = \frac{1,39 \times 10^6}{3,48 \times 10^3} =$$

$$= 10^{-3} \times \frac{13,9}{3,48} =$$

$$\approx (3,99 \times 10^{-3}) : 1 =$$

$$= \frac{399}{100000} =$$

(٤) الأعداد المقربة :

رأينا من خلال المثال (٧ - ١) والتمارين (٧ - ١) أن أيًّا من الأعداد العلمية يكتب عادة على الصورة :

$$a \times 10^n \text{ حيث } 1 \leq a < 10, n \text{ عدد صحيح}$$

وعندما أوردنا سرعة الضوء فإننا كتبناها تارةً : 3×10^8 م/ث وتارةً أخرى كتبناها : $2,99 \times 10^8$ م/ث ، فالأمر يرجع إلى التقريب المطلوب، إذ بالحالة الأولى قربناها إلى رقم معنوي واحد وهو ٣، أما بالحالة الثانية فقد قربناها إلى ثلاثة أرقام معنوية هي أرقام العدد $2,99$ ، وواضح أن $3 \approx 2,99$ والرقم المعنوي في عدد ما هو أي رقم لا يساوي صفراً، أو أي صفر لا يكون القصد من إثباته هو تحديد موضوع الفاصلة العشرية.

ففي الأعداد التالية، الأرقام المعنوية هي الأرقام المكتوبة باللون الأحمر :

$$230,0, 0,00060, 0,4020, 0,5002$$

والعدد 5400 مثلاً يكتب :

$5,4 \times 10^3$ في حالة عدم وجود أي صفر معنوي (هنا يوجد رقمان معنويان).

$5,40 \times 10^3$ في حالة وجود صفر معنوي واحد (هنا يوجد ثلاثة أرقام معنوية).

$5,400 \times 10^3$ في حالة وجود صفرين معنويين (هنا يوجد أربعة أرقام معنوية).

مثال (٧-١٠) :

أوجد برقمين معنويين القيم المقربة للأعداد الآتية واكتبها بطريقة كتابة الأعداد العلمية:

$$446000, 0,008601, 0,00004652, 0,000898$$

الحل:

$$٦١٠ \times ٤,٥ = ٤٥٠٠٠٠٠ \approx ٤٤٦٠٠٠٠$$

$$٣-١٠ \times ٨,٦ = ٠,٠٠٨٦ \approx ٠,٠٠٨٦٠١$$

$$٥-١٠ \times ٤,٧ = ٠,٠٠٠٠٤٧ \approx ٠,٠٠٠٠٤٦٥٢$$

$$٤-١٠ \times ٩,٠ = ٠,٠٠٠٩٠ \approx ٠,٠٠٠٨٩٨$$

ملحوظة (٢-٧)

في المثال (٧-٨) كان الجواب $(٨,٠٤٦٠٩ \times ١٠^{-٤})$ (جولاً) مقدراً بستة أرقام معنوية، ويصبح (٨×١٠^{-٤}) (جولاً) عند تقديره برقم معنوي واحد.

تمارين (٧-٣)

في التمارين من ١ إلى ٦ اختر من بين الإجابات أ، ب، ج الإجابة الصحيحة:

(١) لكل $s \in \mathbb{R} - \{0\}$ فإن: $s^m \times s^n = s^{m+n}$ =

أ: (س)، ب: (١)، ج: (مقداراً غير معرّف).

(٢) $\frac{1}{s^2 + s^2} = \frac{1}{2s^2}$ حيث: $s \neq 0 \neq ص$

أ: $(s^2 + s^2)^{-1}$ ، ب: $(s^{-2} + s^{-2})$ ، ج: $(s + s)^{-2}$

(٣) $\frac{1}{s^3 \cdot s^3} = \frac{1}{s^6}$ حيث: $s \neq ٠$

أ: $(s \cdot s)^3$ ، ب: $(s \cdot s)^{-3}$ ، ج: $(s^{-3} \cdot s^3)$

(٤) $\frac{1}{s} \leftarrow ١ = s^{-١}$ $\{1, 0\} - \mathbb{R}$ =

أ: (١)، ب: (-١)، ج: (٠)

$$(5) \quad \emptyset = \{1, 0\} \cap \{a, b\}, \quad a \neq b$$

$$\square = \square \leftarrow \square = \square$$

$$أ: (0), \quad ب: (1), \quad ج: (-1).$$

(6) العدد (0, 000995) بتقريبه إلى رقمين معنويين يكون مساوياً:

$$أ: (9, 9 \times 10^{-4}), \quad ب: (0, 1 \times 10^{-3}), \quad ج: (0, 1 \times 10^{-3})$$

اكتب الأعداد الآتية بطريقة كتابة الأعداد العلمية مقرباً الجواب إلى: رقم معنوي واحد، ثم إلى رقمين معنويين.

(7) الحرارة الكامنة لانصهار الجليد = 333188 جول/كيلوغرام.

(8) الحرارة الكامنة لانصهار الذهب = 64372 جول/كيلوغرام.

(9) الحرارة الكامنة لتبخير الماء = 2255000 جول/كيلوغرام.

(10) معامل التمدد الحقيقي لزيت الزيتون = 0,00068 /°س

أوجد ناتج كل مما يلي:

$$(11) \quad \frac{a^{-3}}{b^{-2}} \div \frac{a^0}{b^{-2}} \quad (12) \quad (2s^2 \text{ ص}^{-1})^3 (3s^{-3} \text{ ص}^{-2})^{-2}$$

$$(13) \quad (a^m + b^{-m})(a^{-m} + b^m) \quad (14) \quad \frac{s^{-2} + s^{-1}}{s^{-2} - s^{-1}}$$

ضع كلاً مما يلي بأبسط صورة:

$$(15) \quad \frac{36^{(2s+3)} \times 8^{(s+1)}}{81^{(2s)} \times 128^{(s+1)}}$$

$$(16) \quad \frac{(2, 4 \times 10^{-3}) \times (5, 0 \times 10^{-1})}{(0, 6 \times 10^{-1}) \times (0, 5 \times 10^{-1})}$$

$$(17) \frac{+3 \times 2 + 4 \times 2}{+1 \times 2 - 4 \times 2 \times 5}$$

(18) احسب الزمن اللازم لكي تقطع نبضة الكومبيوتر مسافة ٧٢ سم إذا علمت أن سرعة انتقال النبضة هي ٤, ٢ × ١٠^{١٠} سم/ث.

٧-٢ الجذور:

(١) الجذور التربيعية

عند دراستنا للأعداد الحقيقية، في الصف الثالث المتوسط، تعرّفنا على الجذور التربيعية.

فالعدد ٥ هو جذر تربيعي للعدد ٢٥ لأن $25 = 5^2$

والعدد -٥ هو جذر تربيعي آخر للعدد ٢٥ لأن $25 = (-5)^2$

وكذلك فإن كلاً من $\frac{3}{4}$ ، $-\frac{3}{4}$ جذر تربيعي للعدد (لماذا؟)

وإن كلاً من العددين الحقيقيين $\sqrt[3]{3}$ ، $-\sqrt[3]{3}$ هو جذر تربيعي للعدد ٣ لأن:

$$3 = (\sqrt[3]{3})^2 = (-\sqrt[3]{3})^2$$

ولو طلب منك إيجاد الجذر التربيعي للعدد (-٤٩) في مجموعة الأعداد

الحقيقية، فلن تجد في هذه المجموعة أي عدد يكون مربعه (-٤٩)، لأنك تعلم

أن مربع أي عدد حقيقي هو عدد غير سالب، ولو أردت الحصول على الجذر

التربيعي للعدد (٠) في \mathbb{R} ، فسوف تجد أنه العدد (٠) لأن: $0 = 0^2$

لعلك تذكرت من خلال هذه الأمثلة أنه:

• للعدد الحقيقي الموجب a جذران تربيعيان هما \sqrt{a} ، $-\sqrt{a}$

• ليس للعدد السالب جذر تربيعي في \mathbb{R} .

• الجذر التربيعي للعدد (صفر) هو (صفر).

ولا تنس أنه :

إذ لم يُسبق رمز الجذر التربيعي ($\sqrt{\quad}$) بأية إشارة، فالمقصود أن هذا الجذر مسبق بإشارة +

مثلاً $\sqrt{25}$ يعني $5 = \sqrt{25}$ ، والعدد $-\sqrt{9}$ يقصد به الجذر التربيعي السالب للعدد 9 وهو -3.

أي أنه :

بفرض $a < 0$ فإن \sqrt{a} هو عدد موجب وعليه يكون مثلاً :

$$|3+| = \sqrt{(+3)}\sqrt{\quad} \text{ وهذا يعني } 3+ = \sqrt{9}\sqrt{\quad} = \sqrt{(+3)}\sqrt{\quad}$$

$$|-4| = \sqrt{(-4)}\sqrt{\quad} \text{ وهذا يعني } 4+ = \sqrt{16}\sqrt{\quad} = \sqrt{(-4)}\sqrt{\quad}$$

وهذا يذكرك بما سبق أن تعلمته وهو :

$$\text{إذا كان } a \geq 0 \text{ فإن } \sqrt{a} = \sqrt{a} \sqrt{\quad} .$$

ولعلك تذكر أخيراً أنه :

إذا كان a, b, \dots, m, n فإن :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad (1)$$

$$\sqrt{a \times \dots \times b \times \dots \times m} = \sqrt{a} \times \dots \times \sqrt{b} \times \dots \times \sqrt{m}$$

$$\sqrt[n]{a \times \dots \times b \times \dots \times m} = \sqrt[n]{a} \times \dots \times \sqrt[n]{b} \times \dots \times \sqrt[n]{m} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (3)$$

مثال (٧-١١):

أوجد نتائج ما يلي إن أمكن:

$$\sqrt[2]{\sqrt{25}}, \quad \sqrt[2]{\left(\frac{2}{3} - \right)}, \quad \sqrt{125}, \quad \sqrt{\frac{121}{144}}$$

$$-\sqrt[4]{144}, \quad \sqrt[4]{(3)}, \quad (0 \leq a) \sqrt[4]{b^2}, \quad \sqrt[4]{0,09} -$$

الحل:

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5 \times 25} = \sqrt[4]{125}, \quad \frac{11}{12} = \sqrt{\frac{121}{144}}$$

$$\sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[2]{5}, \quad \frac{2}{3} = \left| \frac{2}{3} - \right| = \sqrt[2]{\left(\frac{2}{3} - \right)}$$

$$\sqrt[4]{144} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^2} = \sqrt[2]{2 \cdot 3} = \sqrt{6}, \quad \sqrt[4]{0,09} = \sqrt[4]{\frac{9}{100}} = \sqrt{\frac{3}{10}}$$

$$9 = \sqrt{81} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4}$$

$\sqrt[4]{144}$ غير ممكن لأن العدد السالب ليس له جذر تربيعي في \mathbb{R} .

مثال (٧-١٢):

(أ) ضع المقدار: $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$ في أبسط صورة.

(ب) أثبت أن: $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$

الحل:

(أ) نقوم بإنطاق المقام فنضرب كلا من حدي الكسر بمرافق المقام:

$$\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

$$\frac{2 + \sqrt{2} \sqrt{3} \sqrt{2+3}}{1} = \frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{2-3} =$$

$$\sqrt{6} \sqrt{2+5} =$$

$$2 + \sqrt{2 \times 3} \sqrt{2+3} = \sqrt{6} \sqrt{2+5} \quad (\text{ب}) \text{ لاحظ أن:}$$

$$2(\sqrt{2}) + \sqrt{2} \sqrt{3} \sqrt{2+3} + 2(\sqrt{3}) =$$

فهو مربع كامل .

$$2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) =$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{6} \sqrt{2+5} \quad \text{فيكون:}$$

ملحوظة (٣-٧):

على نسق ما أجريناه في الفقرة (ب) من المثال (٧-١٢)، إذا كان a ،

$$\sqrt{b} + \sqrt{a} = \sqrt{b \cdot 2 + (b+a)} \quad \text{ب 23، فإن}$$

$$\text{وكذلك فإن: } \sqrt{b} - \sqrt{a} = \sqrt{b \cdot 2 - (b+a)}$$

مثال (٧-١٣):

حل المعادلة $x^2 = 64$ في مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} ، نبحث عن عدد حقيقي

مربعه 64 فنلاحظ أن كلا من العددين 8 ، -8 يحقق ذلك، فلهذه المعادلة حلان

$$\text{هما: } 8، -8 \quad \text{أي: } \sqrt{64} +، \sqrt{64} -$$

مثال (٧-١٤):

أوجد الناتج في كل مما يلي:

$$\sqrt{50} - \sqrt{72}، \frac{\sqrt{216}}{\sqrt{150}}، \sqrt{0,0169}، \sqrt{5184}$$

الحل:

$$72 = 2^3 \times 3^2 = \sqrt[4]{3 \times 6^2} = \sqrt[5]{184} \sqrt{}$$

$$0,13 = \frac{13}{100} = \frac{169}{10000} \sqrt{=} = \sqrt[0,0169]{} \sqrt{}$$

$$\frac{6}{5} = \frac{36}{25} \sqrt{=} = \frac{216}{150} \sqrt{=} = \frac{216 \sqrt{}}{150 \sqrt{}}$$

$$\sqrt{2} \sqrt{=} = \sqrt{2} \sqrt{5} - \sqrt{2} \sqrt{6} = \sqrt{50} \sqrt{=} - \sqrt{72} \sqrt{}$$

مثال (7-15):

أوجد الجذرين التربيعيين: $\sqrt{1016064}$ ، $\sqrt{0,001225}$

(1) بالتحليل إلى العوامل .

(2) باستخدام الآلة الحاسبة.

الحل:

$${}^2(7 \times 2^3 \times 3^2) = 2^7 \times 3^4 \times 7^2 = 1016064 \quad (1)$$

$$1008 = 7 \times 2^3 \times 3^2 = \sqrt[2]{(7 \times 2^3 \times 3^2)} \sqrt{=} = \sqrt{1016064} \sqrt{}$$

$$\sqrt[6]{10 \times 1225} \sqrt{=} = \sqrt[0,001225]{} \sqrt{}$$

$$\sqrt[6]{10 \times 2^7 \times 5^2} \sqrt{=} =$$

$$0,035 = \sqrt[3]{10 \times 7 \times 5} = \sqrt[2]{(3-10 \times 7 \times 5)} \sqrt{=} =$$

(2) باستخدام الآلة الحاسبة نضغط على الأزرار المناسبة فنجد أن:

$$0,035 = \sqrt[0,001225]{} \sqrt{=} \quad , \quad 1008 = \sqrt{1016064} \sqrt{}$$

ملحوظة (٧-٤) :

لعلك تلاحظ من المثال (٧-١٥) أن $\sqrt[n]{b^m}$ (إذا كان n عدداً صحيحاً زوجياً) هو $|b|^{m/n}$ وبصورة عامة يكون :

$$\sqrt[n]{b^m} = |b|^{m/n} = \sqrt[n]{|b|^m} = \sqrt[n]{|b|^m} = \sqrt[n]{|b|^m}$$

حيث : $n, m, \dots, \dots, \dots$

(٢) من تراثنا المشرق :

وإذا كنا بصدد تقديم الجذور إلى طلابنا الأحبة ، فإنه لا بد لنا من تذكيرهم بما في تراثنا المشرق، خلال العصر الذهبي لحضارتنا الإسلامية من أثر كبير في ابتكار العديد من المفاهيم والرموز والمصطلحات الواردة في علم الجبر عامة وفي ماورد في هذا البند من مفاهيم بصورة خاصة .

فإذا كانت كلمة (الجبر) التي أطلقها العالم الرياضي المسلم محمد بن موسى الخوارزمي (١٦٤ - ٢٣٥هـ) من خلال كتابه (الجبر والمقابلة) قد أخذت مكانها في مختلف لغات العالم بلفظتها العربية فإن مفاهيم أخرى ، لنا - نحن المسلمين - الفضل في إيجادها اكتشافاً ، أو ابتكاراً ، أو نقلاً من حضارات سالفة بعد التعديل الذي أعطاها الروح والمرونة .

نذكر على سبيل المثال لا الحصر أن مصطلح (جذر) في الجبر يعود في أصله إلى اللغة العربية، إذ أن الخوارزمي قسّم الكميات الجبرية إلى ثلاثة أنواع : جذر ويقصد به س ، ومال ويقصد به س^٢ ، ومفرد وهو العدد (أي الكمية الخالية من س) .

كما كان الخوارزمي على دراية متينة بالقواعد الجبرية لإجراء عملية الضرب والقسمة على الجذور فإنه يقول مثلاً في كتابه (الجبر والمقابلة) :

«لضرب جذر كذا في جذر كذا : ضربت أحد العددين في الآخر وأخذت جذر المبلغ» وهذا يعني : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.

كما جاء في كتابه هذا قوله : «إن أردت أن تقسم جذر تسعة على جذر أربعة فإنك تقسم تسعة على أربعة فيكون اثنين وربعاً فجذرها هو ما يصيب الواحد وهو واحد ونصف» وهذا يعني :

$$= \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} \quad \text{فقد طبق القاعدة} \quad \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \quad \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \quad \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \quad \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

وإن رمز الجذر التربيعي ($\sqrt{\quad}$) إنما كان من ابتكارنا، إنه الحرف جـ (أول حرف من كلمة جذر العربية) ويبدو أن أول من استعمله لهذا الغرض هو «أبو الحسن علي بن محمد القلصادي، الأندلسي، (٨٢٥ - ٨٩١هـ)» فمثلاً $\sqrt{25}$ تعني $\sqrt{25}$ وهكذا بقيت الجيم العربية نفسها مستعملة كرمز للجذر في مختلف لغات العالم، ففي مختلف اللغات الأوروبية تجد مثلاً : $\sqrt{25} = 5$ ، $\sqrt{36} = 6$ وإن علماءنا هم أول من أدخل ضمن مصطلحات الرياضيات مفهوم الجذر الأصم ويقصدون به جذر العدد الذي لا يكون مربعاً مثل $\sqrt{2}$ ، وإنهم برعوا في إيجاد علاقات بين الجذور الصم فالعلاقة : $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a \pm 2\sqrt{ab} + b}$ التي أوردناها في الملاحظة (٧ - ٣) يظهر لنا من النصوص التاريخية أن أول من أوجدها هو أبو كامل شجاع بن أسلم المصري (٢٣٦ - ٣١٨هـ) .

كما أن القلصادي شرح بدقة متناهية طريقة إيجاد القيمة التقريبية للجذر التربيعي لأي عدد معطى .

ومن الثابت أن العالم الرياضي المسلم السموأل المغربي (توفي في بغداد عام ١١٧٥م) هو أول من استعمل الأسس السالبة.

تمارين (٧ - ٤)

ضع كلاً مما يلي بأبسط صورة (التمارين من ١ إلى ٩).

$$(1) \sqrt{27} - \sqrt{50} \quad (2) \sqrt{8} - 2\sqrt{2}$$

$$(3) \sqrt{16s^2 + 9} \quad (4) \sqrt{10 - 2s} + 25$$

$$(5) \sqrt{2s} + (-2\sqrt{s}) \quad (س عدد حقيقي غير سالب).$$

$$(6) (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

$$(7) \frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$$

$$(8) \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$(9) \sqrt{t} > 0, \quad t < 0$$

حوّل إلى مجموع جذرين أو فرق جذرين :

$$(10) \sqrt{75 + 20\sqrt{2}} \quad (11) \sqrt{20 - 9\sqrt{2}}$$

طبّق طريقة أبي كامل المصري في جمع (أو طرح) الجذور الصم :

$$(12) \sqrt{2} + \sqrt{6} \quad (13) \sqrt{3} - \sqrt{10}$$

(١٤) اتخذ السمتتر وحدة لقياس الأطوال، وحدّد على خط الأعداد الأطوال

التي تمثّل كلاً من :

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5} \text{ على الشكل نفسه.}$$

أوجد الجذور التربيعية الآتية :

(٢) باستخدام الآلة الحاسبة.

(١) بدون استخدام الآلة الحاسبة

$$(16) \sqrt{194481}$$

$$(15) \sqrt{610 \times 2,056}$$

$$(18) \sqrt{576 + 100}$$

$$(17) \sqrt{0,002916}$$

(٣) الجذر التكعيبي :

إن مكعب العدد ٢ هو ٨ أي أن $٨ = ٢^٣$.
فنقول : إن العدد ٢ هو الجذر التكعيبي للعدد ٨ ونكتب : $٢ = \sqrt[٣]{٨}$.
وكذلك فإن : $\sqrt[٣]{٢٧} = ٣$ لأن $٣^٣ = ٢٧$.
وإن : $\sqrt[٣]{-٦٤} = -٤$ لأن $(-٤)^٣ = -٦٤$.

تعريف (٧-٤) :

الجذر التكعيبي لعدد حقيقي a هو عدد حقيقي b يحقق العلاقة : $a = b^٣$.
أي أن : $\sqrt[٣]{a} = b \Leftrightarrow b^٣ = a$.

ولعلك تلاحظ أنه :

لكل عدد حقيقي موجب جذر تكعيبي موجب .
ولكل عدد حقيقي سالب جذر تكعيبي سالب .
وأن : $\sqrt[٣]{٠} = ٠$.

ملحوظة (٧-٥) :

(١) كما هي الحال في الجذور التربيعية فإن :

$$\sqrt[٣]{a} \times \dots \times \sqrt[٣]{b} \times \sqrt[٣]{a} = \sqrt[٣]{a \times \dots \times b \times a}$$
$$b \neq ٠ \quad \frac{\sqrt[٣]{a}}{\sqrt[٣]{b}} = \sqrt[٣]{\frac{a}{b}}$$

(٢) $\sqrt[٣]{-a} = -\sqrt[٣]{a}$ (لماذا؟) .

(٣) إذا كان a قابلاً للقسمة على ٣ فإن : $\sqrt[٣]{a^٣} = a$ (لماذا؟) .

مثال (٧-١٦) :

أوجد الجذر التكعيبي :

$$\sqrt[3]{200-} \quad (٣) \quad \sqrt[3]{1080} \quad (٢) \quad \sqrt[3]{13,824} \quad (١)$$

الحل :

$$٢, ٤ = \sqrt[3]{10 \times 13 \times 32} = \sqrt[3]{10 \times 33 \times 92} = \sqrt[3]{13,824} \quad (١)$$

$$\sqrt[3]{5} \times 6 = \sqrt[3]{5} \times 2 \times 3 = \sqrt[3]{5 \times 32 \times 33} = \sqrt[3]{1080} \quad (٢)$$

$$\sqrt[3]{25} - 2 = \sqrt[3]{25} - 2 = \sqrt[3]{25 \times 32} = \sqrt[3]{200-} \quad (٣)$$

ملحوظة (٧-١٦) :

في المثال (٧-١٦) رأينا أنه إذا كان أحد الأسس لا يقبل القسمة على ٣ فإن طريقة إيجاد الجذر التكعيبي بتحليل العدد إلى عوامله الأولية، لا تعطي ناتج الجذر بل تبسطه، ولو استعملنا الآلة الحاسبة لحصلنا على قيمة مقربة لهذا الجذر .
فالعند $\sqrt[3]{5}$ مثلاً هو عدد حقيقي، وقيمتة المقربة باستخدام الآلة الحاسبة هي: $1,7099759$ ، والجواب مقرب إلى ٨ أرقام معنوية (٧ أرقام عشرية)

(٤) الجذر النوني :

تعريف (٧-٥) :

إذا كان a, b, c, \dots, z ، فإن كل عدد حقيقي s يحقق المعادلة :
 $s^n = a$ يسمى جذراً نونياً للعدد a .

نرمز للجذر النوني للعدد a بالرمز $\sqrt[n]{a}$ أو $a^{\frac{1}{n}}$

نسمى a المجذور، n دليل الجذر .

نستنتج من هذا التعريف :

$$(١) \quad ٠ = \sqrt[٧]{٠}$$

(٢) إذا كان $\sqrt[٧]{٧}$ زوجياً وكان $ا$ موجباً ، فإن للمعادلة $س^٧ = ا$ جذرين هما :
 $\sqrt[٧]{ا}$ ، $-\sqrt[٧]{ا}$ أي أن للعدد في هذه الحالة جذرين نونيين .

(٣) إذا كان $\sqrt[٧]{٧}$ زوجياً وكان $ا$ سالباً ، فإنه لا يوجد عدد حقيقي يحقق المعادلة :
 $س^٧ = ا$ ، أي أنه : لا يوجد جذر نوني للعدد $ا$ في هذه الحالة .

(٤) إذا كان $\sqrt[٧]{٧}$ فردياً ، فإنه يوجد عدد حقيقي واحد $\sqrt[٧]{ا}$ يحقق المعادلة :
 $س^٧ = ا$ ، أي أن للعدد $ا$ جذراً نونياً واحداً في هذه الحالة .

ملحوظة (٧-٧) :

كما رأينا في الجذر التربيعي فإن دليل الجذر ٢ لا يكتب على يمين إشارة الجذر ،

$$\text{أي : } \sqrt[٢]{ا} \text{ تكتب } \sqrt[٢]{ا} = \sqrt[٢]{ا} \quad (ا \geq ٠)$$

(٥) خصائص الجذور :

وكما هو الحال في الجذور التربيعية والتكعيبية ، فإن للجذور بشكل عام

الخصائص المبينة بالنظرية التالية :

نظرية (٧-٣) :

إذا كان $ا$ ، $ب$ $\in \mathbb{R}$ ، $\sqrt[٧]{ا}$ ، $\sqrt[٧]{ب}$ فإن :

$$(١) \quad \sqrt[٧]{ا} \cdot \sqrt[٧]{ب} = \sqrt[٧]{ا \cdot ب} \quad (\text{حيث } ا \geq ٠ ، ب \geq ٠ \text{ ، إذا كان } \sqrt[٧]{٧} \text{ زوجياً}).$$

$$(٢) \quad \frac{\sqrt[٧]{ا}}{\sqrt[٧]{ب}} = \sqrt[٧]{\frac{ا}{ب}} \quad (\text{حيث } ا \geq ٠ ، ب > ٠ \text{ ، إذا كان } \sqrt[٧]{٧} \text{ زوجياً}).$$

إذا كان $ا$ ، $ب$ $\in \mathbb{R}$ ، $\sqrt[٧]{ا}$ ، $\sqrt[٧]{ب}$ فإن :

البرهان :

سنكتفي بالبرهان على الخاصة الأولى ونترك برهان الخاصة الثانية للطالب .
تكون العلاقة $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ صحيحة فيما إذا أثبتنا أن $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n$
هو جذر نوني للمقدر $a \cdot b$.

ويكون ذلك صحيحاً إذا كان : $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = a \cdot b$.

وبالحقيقة :

$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = \sqrt[n]{a}^n \cdot \sqrt[n]{b}^n = a \cdot b$ حسب الفقرة ٣ من النظرية (٧-٢) .

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ حسب تعريف الجذر النوني .

ملحوظة (٧ - ٨) :

(١) يمكنك بسهولة أن تبرهن أن :

$$(١) \sqrt[n]{a} \times \dots \times \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \times b^n} = \sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{b^n} = a \times b$$

(٢) لو وضعنا $a = b = \dots = a = b$ وكان عدد هذه العوامل n لأصبحت

العلاقة (١) :

$$(٢) \sqrt[n]{a^n} = a$$

وحيث إن : $\sqrt[n]{a^n} = a$

$$(٣) \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a} : \text{العلاقة (٢)}$$

تعريف (٦-٧):

إذا كان a, b, c ، $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b}, \sqrt[n]{c}$ - {١} فإن:

$$\sqrt[n]{a} = (\sqrt[n]{a}) = \sqrt[n]{(a)}$$

وبصورة أخرى فإن:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{(a)} = \sqrt[n]{(a)}$$

شريطة أن لا يكون a سالباً إذا كان n زوجياً.

مثال (٧-١٧):

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{-8} = -2 \quad (١)$$

$$2 = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{(32)} \quad (٢)$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{-3} = \frac{1}{-27\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(27-)}} = \sqrt[3]{-} \quad (٣)$$

$$8 = \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(16\sqrt[3]{4})} = \sqrt[3]{(16)} \quad (٤)$$

$$16 = \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{(2\sqrt[3]{3})} = \sqrt[4]{(2\sqrt[3]{3})} \quad (٥)$$

$$\sqrt[5]{625} = \sqrt[5]{45} = \sqrt[5]{5} = \sqrt[10]{5} = \sqrt[10]{5} \quad (٦)$$

$$1,82 = \sqrt[9]{2} = \sqrt[9]{(2\sqrt[3]{3})} = \sqrt[9]{(2\sqrt[3]{3})} \quad (٧)$$

(٦) الأسس أعداد نسبية أو حقيقية :

(أ) رأينا في التعريف (٦-٧) أن $\sqrt[n]{a^m}$ يكتب بالصيغة $a^{\frac{m}{n}}$ وهذا ما يقدم لنا تعريفاً

لقوة أسها عدد نسبي، وإن فقرات المثال (٧-١٧) تبين لك تبريراً لهذا التعريف.

فالقوى: $2^{\frac{1}{3}}$ ، $2^{\frac{7}{5}}$ ، $2^{\frac{113}{100}}$ ، $2^{\frac{217}{500}}$ للعدد ٢

تعني: $\sqrt[3]{2}$ ، $\sqrt[5]{2^7}$ ، $\sqrt[100]{2^{113}}$ ، $\sqrt[500]{2^{217}}$

كما تعني: $2^{0.5}$ ، $2^{1.2}$ ، $2^{1.13}$ ، $2^{0.434}$

(ب) سنقبل بدون دراسة متعمقة أن الأس يمكن أن يكون أي عدد حقيقي، نسبي

- كما مرّ في الأمثلة السابقة - أو غير نسبي مثل $3^{\sqrt{2}}$ حيث الأس $\sqrt{2}$ هو كما

نعلم عدد حقيقي (غير نسبي) يمكن معرفة قيمته المقربة مثل :

٤، ١، ٤١، ٤١٤، ١، ٤١٤٣، ١، ٤١٤٣٣، (حسب درجة التقريب المطلوبة)

وبالتالي فإن $(3^{\sqrt{2}})$ يمكن معرفة قيمته المقربة مثل :

١، ٤٣، ١، ٤١٣، ١، ٤١٤٣، (حسب درجة التقريب المطلوبة) وإن القيمة

الحقيقية (المضبوطة) له هي $3^{\sqrt{2}}$ (نقروها: ٣ أس $\sqrt{2}$) وعليه فإن الأعداد

التالية، مثلاً، هي أعداد حقيقية :

$3^{\frac{9}{5}}$ ، $3^{-٤}$ ، $2^{\sqrt{3}}$ ، 4^{π} ، $(\sqrt{3})^{\pi}$ ، $5^{\sqrt{3}}$ ، $(\frac{1}{4})^{\frac{\pi}{4}}$ ،

وسنقبل أن خصائص قوى عدد حقيقي التي أوردناها في النظرية (٧-٢)، حيث كانت الأسس أعداداً صحيحة، تبقى نفسها إذا كانت الأسس أعداداً نسبية أو حقيقية.

مثال (٧-١٨):

$$. 9 = 23 = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{(27 \times 27)} \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{(27+1)+(27-1)} = \sqrt[3]{28} \times \sqrt[3]{26} \quad (2)$$

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{(27)} = \sqrt[3]{4} \quad (3)$$

$$6,9644 \approx 2,82 = 1,4 \times 2 \approx$$

$$7,1009 \approx 2,8282 = 1,414 \times 2 \approx \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{4} \quad \text{وبدقة أكثر نجد:}$$

(أجرينا الحساب بالآلة الحاسبة التي تحتوي على زر X^Y وقد اكتفينا بأربعة أرقام عشرية).

مثال (٧-١٩):

أوجد $\sqrt[3]{25} + 25 \div \sqrt[3]{25} - 25$ ثم قرّب الأس إلى ثلاثة أرقام معنوية وأوجد قيمة مقربة للناتج بخمسة أرقام معنوية.

الحل:

$$(\sqrt[3]{25} - 25) - \sqrt[3]{25} + 25 = \frac{\sqrt[3]{25} + 25}{\sqrt[3]{25} - 25}$$

$$\sqrt[3]{25} =$$

$$1,732 \times 25 \approx$$

$$3,465 \approx 3,4645 \approx \text{وباستخدام الآلة الحاسبة.}$$

$$262,08 \approx$$

مثال (٧-٢٠):

$$\sqrt[3]{729} \quad \text{أوجد}$$

الحل:

$$3 = 13 = \sqrt[3]{(13)} = \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{(13)}\right)} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{13}}$$

مثال (٧-٢١):

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{\frac{3}{1}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3}} = \sqrt[3]{\frac{27}{27}} = \sqrt[3]{1} = 1$$

الحل:

$$\sqrt[3]{(27)} = \sqrt[3]{\frac{27}{1}} = \sqrt[3]{\frac{27 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3}} = \sqrt[3]{\frac{27 \times 9}{27}} = \sqrt[3]{9}$$

وعندما $\sqrt[3]{3} = 3$ تصبح قيمة المقدار:

$$1 = \sqrt[3]{(1)} = \sqrt[3]{(3 \times 3 \times 3)} = \sqrt[3]{(27)}$$

تمارين (٧-٥)

اكتب الأعداد التالية على صيغة جذور:

$$(1) 203, (2) 0.75, (3) 1.25, (4) 1.41, (5) 25$$

بسّط الجذور التالية ثم اكتب كلاً منها على هيئة قوة أسها عدد عشري:

$$(6) \sqrt[3]{27}, (7) \sqrt[3]{32}, (8) \sqrt[3]{27}, (9) \sqrt[3]{256}$$

(١٠) خزّان مكعب الشكل يسع ٩١١٢٥ لترًا من الماء، كم مترًا طول حرفه من الداخل.

بسّط كلاً مما يلي:

$$(11) \sqrt[3]{(32)}, (12) \sqrt[3]{(-13)}, (13) 5 \times 5$$

$$(14) \sqrt[3]{(-2\sqrt{3})} \div \sqrt[3]{(+2\sqrt{3})} \quad (15) \sqrt[3]{23} \times \sqrt[3]{+123} \quad (16) \sqrt[3]{(أ.ب)} \sqrt[3]{(ب.أ)}$$

$$(17) \sqrt[3]{ب^2} \cdot \sqrt[3]{ب^{-1}} \quad (18) \sqrt[3]{8} \div (\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2})$$

$$(19) \sqrt[3]{(2-4 + 2-3)}$$

اكتب كلاً مما يلي على صيغة قوة ذات أسّ عشري مقرباً الأسّ إلى ثلاثة أرقام عشرية:

$$(20) \sqrt[2]{(-\sqrt[3]{15})} \quad (21) \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$(22) \sqrt[3]{\sqrt[2]{10}} \quad (23) \sqrt[3]{(\sqrt[2]{18})}$$

أوجد الجذور الآتية :

(أ) باستخدام الآلة الحاسبة . (ب) بدون استخدام الآلة الحاسبة .

$$(24) \sqrt[3]{10 \times 46606} - \sqrt[3]{310} \quad (25) \sqrt[4]{61,4606}$$

$$(26) \sqrt[6]{10 \times 0,9049}$$

بسّط كلاً مما يلي :

$$(27) \sqrt[4]{4} \times \sqrt[3]{8} \quad (28) \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}$$

$$(29) \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2}$$

$$(30) \left(\sqrt[3]{س} + \sqrt[3]{ص}\right) \left(\sqrt[3]{س} - \sqrt[3]{ص}\right) \quad (31) \sqrt[3]{\left[\sqrt[3]{3}\right]}$$

$$(32) \frac{\sqrt[3]{\left[\sqrt[3]{س}\right]}}{\sqrt[3]{\left[\sqrt[3]{(+2\sqrt{3})}\right] \sqrt[3]{(-2\sqrt{3})}}}$$

٧-٣ الدالة الأسية :

(١) الدالة الأسية :

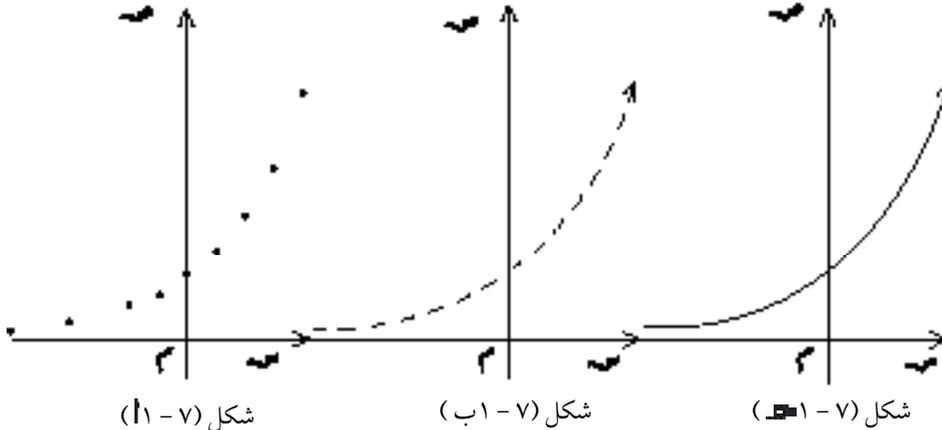
لو بحثنا عن قيم مختلفة للقوة ٢ س وذلك بإعطاء المتغير س قيماً نسبية لحصلنا على جدول كالآتي :

٢	١,٥	١	٠,٥	٠	-٠,٥	-١	-٢	-٣	س
٤	٢,٨ مقربة	٢	١,٤ مقربة	١	٠,٧ مقربة	٠,٥	٠,٢٥	٠,١٢٥	ص=٢س

ولو مثلنا مجموعة النقاط الحاصلة في المستوي الإحداثي لحصلنا على الشكل (٧-١) .

ولو أعطينا المتغير س قيماً حقيقية غير نسبية بالإضافة إلى هذه القيم مثل :
 س = -١ ، -٣ ، -٢ ، -٢ ، -٣ ، لحصلنا على القيم المقربة :
 س٢ = ١ ، ٣ ، ٤ ، ٧ ، ٣ ، ٣ ،

وبإضافة النقاط الممثلة لهذه القيم إلى النقاط التي حصلنا عليها من الجدول السابق ، نحصل على الشكل (٧-١ ب) حيث تجد النقاط أصبحت مترابطة ، ولو تابعنا التعويض بقيم حقيقية أكثر لحصلنا على المنحني المرسوم بالشكل (٧-١ ج) .



وبطريقة مماثلة نستطيع البحث عن القيم المختلفة للقوة $٣^س$ أو $٢^{-س}$ ،
 إن كلاً من هذه القوى التي أساسها عدد حقيقي موجب وأسسها متغير حقيقي
 تمثل دالةً مجالها \mathbb{R} ، ندعوها : دالة أسية ، وواضح أنه لو كان الأساس مساوياً ١
 لأصبحت الدالة الأسية معرّفة بالقاعدة : $١ = ١^س$ فهي ذات قيمة ثابتة مهما كانت
 قيمة المتغير الحقيقي س . وبصورة عامة نعرّف الدالة الأسية كما يلي :

تعريف (٧-٧) :

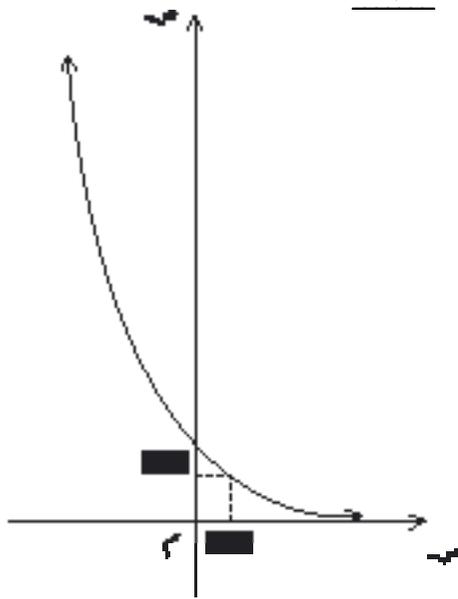
إذا كان العدد الحقيقي $١ < ا$ ، $ا \neq ١$ ، فالدالة المعرّفة على القاعدة
 $ص = ا^س = (س) ا$ ، ندعوها دالة أسية أساسها $ا$.

مثال (٧-٢٢) :

ارسم جزءاً من منحنى الدالة المعرّفة على \mathbb{R} بالقاعدة $ص = (\frac{١}{٣})^س$ ثم
 استفد من الشكل لإيجاد قيمة مقربة للعدد $\frac{١}{٣}$

الحل :

$$٣^{-س} = ٣^{(١-س)} = (\frac{١}{٣})^س$$



شكل (٧-٢) (٢ - ٧)

ص	س
٥, ٢ (مقربة)	-١, ٥
٣	-١
١	٠
٠, ٦ (مقربة)	٠, ٥
$\frac{١}{٣}$	١
$\frac{١}{٩}$	٢

$$\text{العدد } \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

بالرجوع إلى الشكل (٧-٢)، عند $s = 2, 0$ نجد $s \approx 8, 0$

(٢) بعض خصائص الدالة الأسية :

لورجعنا إلى الشكل (٧-١-٣) الذي يمثل جزءاً من منحنى الدالة المعرفة على \mathbb{R} بالقاعدة $s = 2$ لوجدنا أن قيمة s تتزايد بتزايد قيمة المتغير s ، فندعوها دالة متزايدة، بينما في الشكل (٧-٢) الذي يمثل جزءاً من منحنى الدالة المعرفة على \mathbb{R} بالقاعدة $s = \left(\frac{1}{3}\right)^s$ ، نجد أن قيمة s تتناقص بتزايد قيمة المتغير s فندعوها دالة متناقصة .

ولو أعدنا الكرة ورسمنا عدداً من المنحنيات لدوال أسية أخرى حيث :

$$\mathcal{D}(s) = 3^s, \quad \mathcal{D}(s) = \sqrt[2]{s}, \quad \mathcal{D}(s) = \left(\frac{1}{4}\right)^s, \dots \text{ لوجدنا :}$$

- (١) إذا كان $a < 1$ فإن الدالة \mathcal{D} متزايدة، أي أن قيمتها تتزايد قيمة المتغير s .
 - (٢) إذا كان $1 < a < \infty$ فإن الدالة \mathcal{D} متناقصة، أي أن قيمتها تتناقص بتزايد قيمة المتغير s .
- من جهة أخرى : فإن الدالة \mathcal{D} عبارة عن تطبيق مجاله \mathbb{R} ومجاله المقابل \mathbb{R}^+ ومداه أيضاً \mathbb{R}^+ وحيث أن مجاله المقابل = مداه فهو تطبيق شامل (غامر) ونلاحظ من الشكلين (٧-١-٣)، (٧-٢) أنه :

إذا كان $s_1 \neq s_2$ فإن $a^{s_1} \neq a^{s_2}$ وهذا يعني أن التطبيق متباين وبالتالي :

$$\text{فإن التطبيق } \mathcal{D} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : \mathcal{D}(s) = a^s \text{ هو تقابل}$$

$$\text{ينتج من ذلك : } a^{s_1} = a^{s_2} \Leftrightarrow s_1 = s_2$$

مثال (٧-٢٣) :

أوجد قيمة s إذا علمت أن : $125 = 5^{2s}$ (تحقق من صحة الإجابة).

الحل:

المعادلة المعطاة تكتب على الصورة: $5^{س+2} = 5^3$
وحيث إن الدالة الأسية تقابل فإن:

$$5^{س+2} = 5^3 \Leftrightarrow 3 = س + 2$$

$$1 = س \Leftrightarrow$$

التحقيق: $5^{س+2} = 5^{1+2} = 5^3$ نضع $س = 1$

$$5^{2+1} = 5^3$$

والإجابة صحيحة. $5^3 = 5^3$

مثال (٧-٢٤):

حل المعادلة: $(\frac{1}{3})^{س-1} = 27^{س-1}$

الحل:

$$(\frac{1}{3})^{س-1} = 27^{س-1}$$

$$3^{-(س-1)} = 3^{3(س-1)}$$

$$-3^{س-1} = 3^{3س-3}$$

إذن: $-2 = س + 1 = 3س - 3$

$$س = 8, 0$$

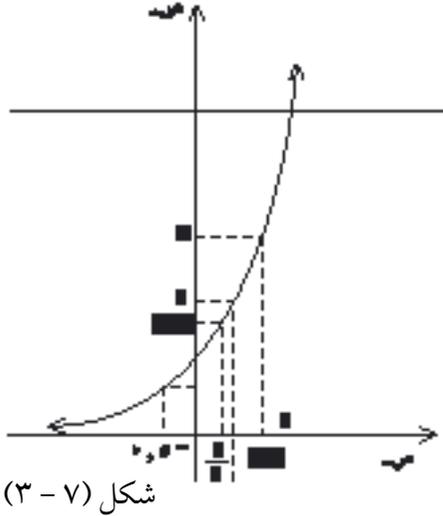
مثال (٧-٢٥):

ارسم جزءاً من المنحني $ص = 3^س$ مستعيناً بصور عناصر المجموعة:

{ 5, 1, 1, 0, 1, -1, 2- } ومن الرسم أوجد:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \times \sqrt[3]{3}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \quad \sqrt[3]{3}$$

استعن بالرسم لحل كل من المعادلتين: $3 = \sqrt[3]{3}$ ، $2 = \sqrt[3]{3}$



شكل (٧-٣)

الحل:

ص = $\sqrt[3]{3}$	س
$\frac{1}{9}$	-٢
$\frac{1}{3}$	-١
١	٠
٣	١
٥,٢ (مقرّبة)	١,٥

$\sqrt[3]{3} = 1,٥$ ، ومن المنحني المرسوم في الشكل (٧-٣):

عند $س = ٠,٥$ نجد $ص \approx ١,٧$ أن $\sqrt[3]{3} \approx ١,٧$

$\frac{1}{\sqrt[3]{3}} = ٠,٦$ ، ومن الشكل (٧-٣) ، عند $س = ٠,٥$ فإن $ص \approx ٠,٦$

أي أن: $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \approx ٠,٦$

وهذا ما يتفق مع القيمة $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \times \sqrt[3]{3} \approx ٠,٦ \times ١,٧ \approx ١,٠٢ \approx ١$ ، وهذا ما يتفق مع القيمة

المضبوطة لهذا المقدار، إذ أن: $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \times \sqrt[3]{3} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \times \sqrt[3]{3} = ١$.

المعادلة الأولى $3 = \sqrt[3]{3}$ من الرسم البياني نجد أن $ص = 3 \Leftrightarrow س \approx ١$

المعادلة الثانية: $2 = \sqrt[3]{3}$ من الرسم البياني نجد أن $ص = 2 \Leftrightarrow س \approx ٠,٧$

تمارين (٦ - ٧)

(١) إذا كان $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ ، $a^b = b^a$ فأثبت أنه :

$$\text{إما } a = b \text{ ، أو } a = 0 = b$$

(٢) أثبت أن جميع المنحنيات التي تمثل الدالة الأسية $d : s \leftarrow a^s$ ($a < 0$)

تمر بنقطة ثابتة هي $(0, 1)$.

(٣) ما هي العلاقة بين منحنىي الدالتين : $s^3 = s^{-3}$ ، $s = (\frac{1}{s})^s$ ؟

(٤) ما هي العلاقة بين منحنىي الدالتين : $s^3 = s$ ، $s^{-3} = s$ ؟

أي العددين من بين الأزواج الآتية أكبر :

$$(5) \quad 3^{1,5} \text{ أم } 1,5^{3,5} \quad (6) \quad (\frac{1}{3})^{3,5} \text{ أم } (\frac{1}{3})^{1,5} \quad ?$$

$$(7) \quad 5^{-\frac{1}{2}} \text{ أم } 1,5^{-5} \quad (8) \quad 2^{3,2} \text{ أم } 0,74^{2,3} \quad ?$$

$$(9) \quad 5^{-\frac{1}{2}} \text{ أم } 1,5^{-25} \quad (10) \quad 2^{15,2} \text{ أم } (\frac{1}{4})^{-2} \quad ?$$

حل المعادلات الآتية :

$$(11) \quad 23 = -1s^{23} \quad (12) \quad 5^{3+1s} = +3s^5$$

$$(13) \quad 5^{2s} = +9s^5 \quad (14) \quad (\frac{1}{3})^{2s} = -3s^{2-3}$$

$$(15) \quad (\frac{9}{4})^{2s} = (\frac{2}{3})^{s-6} \quad (16) \quad (\frac{1}{4})^{s+2} = +2s^8 \times +1s^2 \times -2s^8$$

(١٧) ارسم بدقة جزءاً من المنحني البياني للدالة : $s^2 = s$

ومن الرسم أوجد كلاً من : $2^{\frac{1}{4}}$ ، $2^{-\frac{5}{4}}$ ، $2^{0,3}$ ، $2^{0,7}$

ثم أوجد: $\frac{1}{4} \times 2^{-\frac{1}{2}}$ ، 0.32×0.72

(أ) بالاعتماد على القيم التي أوجدتها من الرسم .

(ب) بالاعتماد على قاعدة ضرب القوى ذات الأسس الحقيقية .

٧-٤ تطبيقات جبرية

أوردنا في الفقرة السابقة أمثلة على حل المعادلات التي من الشكل :

$a^x = a^y$ معتمدين على كون الدالة الأسية هي تقابل من \mathbb{R} إلى \mathbb{R}^+ ، وسنورد

في هذه الفقرة تطبيقات جبرية على (المعادلات الأسية) وهي المعادلات التي يكون

الأس فيها محتويًا على المجهول .

مثال (٧-٢٦) :

لحل المعادلة : $4^s - 9 \times 2^s + 8 = 0$ (١)

لاحظ أن : $4^s = (2^2)^s = 2^{2s}$

ولو اتخذت 2^s مجهولاً ، أي أن : $2^s = v$

لأصبحت المعادلة : $v^2 - 9v + 8 = 0$

ما هما جذرا هذه المعادلة؟ لعلك وجدتهما : $v = 1$ أو $v = 8$.

ماهي قيم s إذن ؟

ستجد أن : $v = 1$ تعني : $2^s = 1 = 2^0$ أي أن : $s = 0$

وأن : $v = 8$ تعني : $2^s = 8 = 2^3$ أي أن : $s = 3$

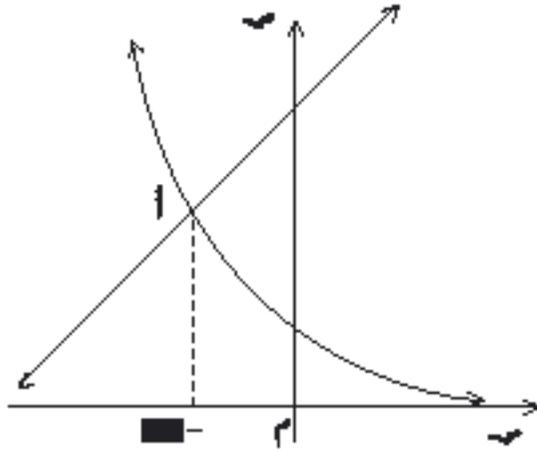
تدريب (٧-١) :

عوّض قيمتي s في المعادلة (١) وتأكد من صحة الإجابتين .

مثال (٧-٢٧):

لحل المعادلة: $٤ + س = ٢^{-س}$ (١)

لعلك تلاحظ أن قيمة س التي تحقق هذه المعادلة هي الإحداثي السيني لنقطة تقاطع المنحني $٢^{-س} = ص$ والمستقيم $ص = ٤ + س$



شكل (٧-٤)

لقد رسمنا لك في الشكل (٧) كلاً من المنحني $ص = ٢^{-س}$ والم $ص = ٤ + س$ ، ولو أعدت ال بنفسك لوجدت أن نقطة التقاطع الموافقة للقيمة : $س = -١$ ، ١ .
أوجد باستخدام الآلة الحاسبة قيمة $٢^{-١}$ و تحقق من صحة المعادلة (١).

تمارين (٧-٧)

في التمارين (١-٨) المطلوب حل المعادلات في .

$$(١) س٣ = \frac{١}{٨١}$$

$$(٢) ٢٧س٢ = ٣س١ + ١$$

$$(٣) ٥س٣ - ٢٤٣ = ٠$$

$$(٤) ٢س١ + ٤س٣ = ٠$$

$$(٥) ٢س٢ \times ٢س^{-٢} = ١٦$$

$$(٦) ٤٢س - ١٢ \times ٢س٢ + ٣٢ = ٠$$

$$(٧) ٤س٢ + س^{-٢} = ١$$

$$(٨) ١ = ٢س٢ + س٧٢$$

(٩) هل للمعادلة: $٥س٢ + س^{-٢} = ٠$ حل في \mathbb{R} ؟ ولماذا؟

في التمارين (١٠ - ١٣) وبلاستعانة بالرسم البياني، حل المعادلات لأقرب عشر:

$$(١٠) \quad ٣٢ - ٤ = ٣٢ \quad (١١) \quad ٣٢ = ٣٢$$

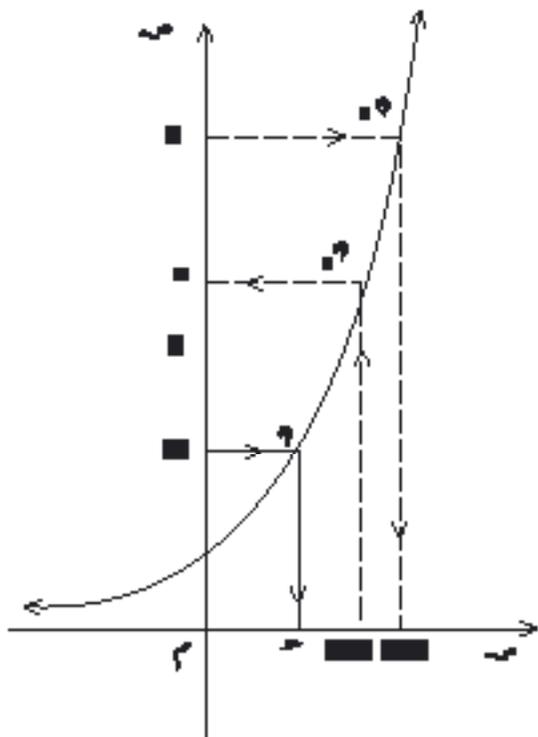
$$(١٢) \quad ٢ + ٣٢ = ٣٢ \quad (١٣) \quad ٣٢ - ٢ = ٣٢$$

٧ - ٥ تعريف اللوغاريتم - الدالة اللوغاريتمية

(١) رأينا أن الدالة الأسية هي تقابل، وعلى هذا فإنه من أجل أية نقطة $(س، ص)$

من المنحني البياني للدالة $ص = ٣^س$ ، يمكن إيجاد قيمة وحيدة لـ $ص$ انطلاقاً من قيمة مفروضة لـ $س$ وبالعكس.

على سبيل المثال :



في الشكل (٧ - ٥) أعدنا رسم جزء

من منحني الدالة الأسية

$ص = ٣^س$ (الذي سبق أن رسمناه

في الشكل (٧ - ١) - ب، ج، د).

فلو اعتبرنا $س = ٢, ٣$ سنحصل

على قيمة مقربة لـ $ص = ٣^٢, ٣ \approx ٩, ٢٧$

(إذ لو رفعنا من النقطة $س = ٢, ٣$

عموداً على المحور $ص$ لللقى المنحني

في النقطة الوحيدة $س = ٢, ٣$ ، ومن الشكل

نجد أن $ص = ٩$

(تحقق باستخدام الآلة الحاسبة أن $٣^٢, ٣ \approx ٩$) شكل (٧ - ٥)

وبالعكس: لو اعتبرنا $ص = ٩$ ، سنحصل على النقطة الوحيدة

• (س، ٢) ويكون: $7 = 2^3$ ، وواضح من الشكل أن $8 \approx 2, 2$ ، أن:
 $7 \approx 2, 8$ (تحقق من ذلك باستخدام الآلة الحاسبة).

وكما هو واضح في الشكل (٧-٥)، لو اعتبرنا أي عدد حقيقي موجب b فإنه يقابله عدد حقيقي وحيد a ، حيث:

$$b = a^2$$

الأس a نسميه لوغاريتم العدد b للأساس ٢

ونكتب لو $b = a$

وعليه فإن: لو $8 = 3$ لأن $8 = 2^3$

$$\text{لو } \frac{1}{4} = -2 \text{ لأن } 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{لو } 5 \approx 2, 3 \text{ لأن } 2, 3 \approx 5$$

$$\text{لو } 7 \approx 2, 8 \text{ لأن } 2, 8 \approx 7$$

تدريب (٧-٢):

استعن بالشكل (٧-٥) وتحقق أن: $6 \approx 2, 6$ ، $4, 0 \approx 2^{-3}$ ثم استنتج قيمة مقربة لكل من لو 6 ، لو $4, 0$.

من الطبيعي أن نستطيع أن نستبدل بالأساس ٢ أي أساس آخر، شريطة أن يكون هذا الأساس عدداً حقيقياً موجباً لا يساوي ١، لأن جميع قوى العدد ١ هي ١، وعليه نستطيع أن نضع تعريف اللوغاريتم:

تعريف (٧-٨) :

إذا كان a ، b عددين حقيقيين موجبين ($a \neq 1$) فإن :

$$\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$$

الرمز ($\log_a b$) يقرأ : لوغاريتم b للأساس a .

نتائج (٧-١) :

(١) حيث اعتبرنا الأساس a موجباً ($a \neq 1$) والعدد b موجباً ، فإنه يوجد عدد وحيد c بحيث : $b = a^c$ ، وهذا يعني أن $\log_a b$ له قيمة وحيدة .

(٢) يمكن أن نعبر عن تعريف اللوغاريتم بقولنا :

إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً ، $a \neq 1$ فإن :

لوغاريتم العدد الموجب b للأساس a هو الأس الذي يجب أن نرفع إليه الأساس a لنحصل على العدد b .

(٣) بما أن العلاقتين : $\log_a b = c$ و $b = a^c$ متكافئتان ، فلو عوضنا قيمة c في أولاهما بالعلاقة الثانية لنتج لدينا : $a^{\log_a b} = b$

(٤) حيث إن : $a^1 = a$ فإن : $\log_a a = 1$

أي أن لوغاريتم العدد a يساوي الصفر مهما كان الأساس .

وحيث إن : $a^0 = 1$ فإن : $\log_a 1 = 0$

أي أنه إذا تساوى العدد والأساس فإن اللوغاريتم يساوي الواحد .

مثال (٢٨-٧) :

اكتب الصيغة اللوغاريتمية المقابلة للصيغة الأسية :

$$(أ) 9 = 2^3 \quad (ب) 5^{-3} = \frac{1}{125} \quad (ج) 10^{-5} = 0,00001$$

الحل :

اللوغاريتم هو الأس الذي نرفع إليه الأساس لنحصل على العدد، فيكون :

$$(أ) 9 = 2^3 \Leftrightarrow \log_2 9 = 3$$

$$(ب) 5^{-3} = \frac{1}{125} \Leftrightarrow \log_5 \frac{1}{125} = -3$$

$$(ج) 10^{-5} = 0,00001 \Leftrightarrow \log_{10} 0,00001 = -5$$

مثال (٢٩-٧) :

أوجد اللوغاريتمات الآتية :

$$(أ) \log_2 64 \quad (ب) \log_{10} 10000 \quad (ج) \log_{\frac{1}{4}} 0,25$$

الحل :

$$(أ) \text{ بما أن } 64 = 2^6 \text{ فإن } \log_2 64 = 6$$

$$(ب) \text{ بما أن } 10000 = 10^4 \text{ فإن } \log_{10} 10000 = 4$$

$$(ج) \text{ بما أن } 0,25 = \frac{1}{4} = 4^{-1} \text{ فإن } \log_{\frac{1}{4}} 0,25 = -1$$

مثال (٣٠-٧) :

حل المعادلات :

$$(أ) \log_4 16 = 3 \quad (ب) \log_{10} 1000 = 3 \quad (ج) \log_{10} 625 = 2 \quad (د) \log_{10} 0,001 = -4$$

الحل:

$$\begin{aligned} (أ) \text{ لو } ٤ = ٣ & \Leftrightarrow \text{س} = ٣ = ٨١ \\ (ب) \text{ لو } ٣ = ١٠٠٠ & \Leftrightarrow \text{س} = ٣ = ١٠٠٠ \\ (ج) \text{ لو } ٦٢٥ = \text{س} & \Leftrightarrow \text{س} = ٣ = ٦٢٥ \text{ فيكون } \text{س} = ١٠ \\ (د) \text{ لو } -٤ = ٠,٠٠٠١ & \Leftrightarrow \text{س}^{-٤} = ٠,٠٠٠١ = \frac{١}{٤١٠} \\ \text{أو: } \text{س} = ٤ = ١٠ & \\ \text{أي أن } \text{س} = ١٠ \text{ أو } -١٠ & \\ \text{لكن } \text{س} < ٠ \text{ فيكون الحل } \text{س} = ١٠ & \end{aligned}$$

(٢) الدالة اللوغاريتمية:

تعريف (٧-٩):

الدالة المعرفة من أجل أي عدد حقيقي $\text{س} > ٠$ بالمعادلة: $\text{ص} = \text{لو } \text{س}$
(أ عدد حقيقي ثابت موجب، $١ \neq \text{أ}$) نسميها دالة لوغاريتمية للأساس أ

واضح أن مجال هذه الدالة هو \mathbb{R}^+

نستطيع أن نكتشف العلاقة بين المنحنيين البيانيين:

للدالة اللوغاريتمية حيث: $\text{ص} = \text{لو } \text{س}$

والدالة الأسية حيث: $\text{ص} = \text{أ}^{\text{س}}$

بالاعتماد على التعريف (٧-٨) - حيث سنهتم بالحالة التي يكون فيها

الأساس $1 < \alpha$ - وسنجد ما يلي :

(١) إذا كانت النقطة (ج، ب) منتمية إلى المنحني $ص = لو س$ فإن :

$ب = لو س$ وهذه العلاقة تكافئ : $ب = \alpha س$

أي أن النقطة (ب، ب) ستنتهي إلى المنحني $ص = \alpha س$

(٢) النقطتان : $(\alpha س, ب)$ ، $(ب, \alpha س)$ متناظرتان بالنسبة للمستقيم

$ص = س$ ، انظر الشكل (٦-٧)

(لاحظ أن المستقيم $ص = س$

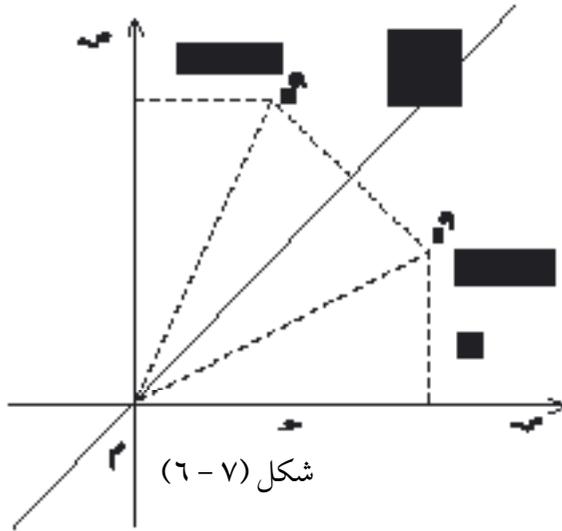
هو العمود المنصف للقطعة الم

$[\alpha س, \alpha س]$)

لعلك أدركت من هذا أن المنح

البيانيين للدالتين متناظران

بالنسبة للمستقيم $ص = س$



شكل (٦-٧)

في الشكل (٧-٧) رسمنا منحنيي الدالتين $ص = لو س$ و $ص = \alpha س$.

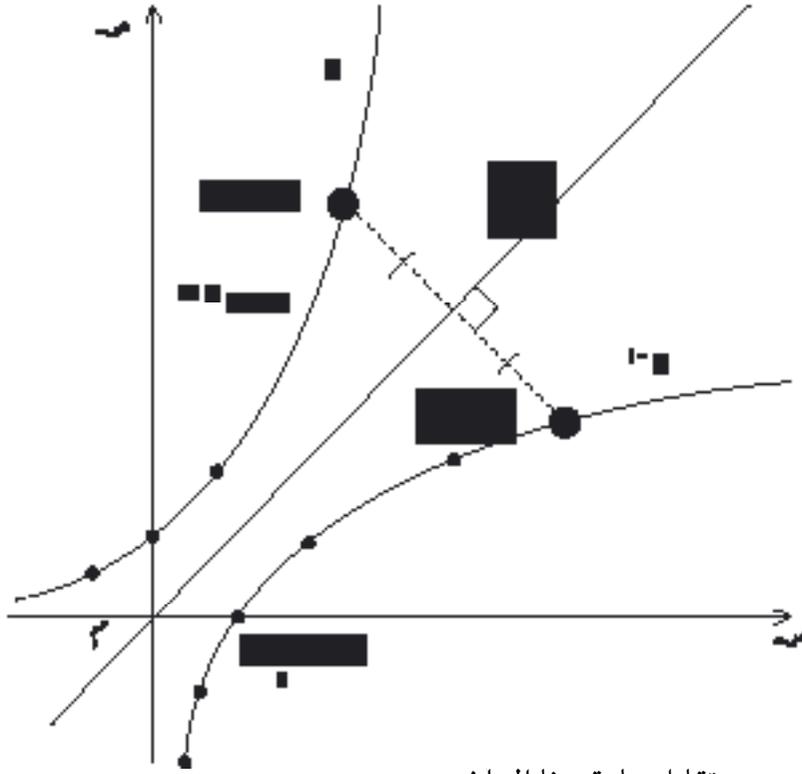
$ص = لو س$ والأسية حيث $ص = \alpha س$ وذلك بفرض $ب = \alpha س$

لاحظ أن النقاط التي استعنا بها لرسم المنحني $ص = \alpha س$ هي نقاط المجموعة :

$$\{(\alpha س, \alpha س), (\alpha س, س), (س, \alpha س), (س, س), (\alpha س, س)\} = \alpha س$$

والنقاط التي استعنا بها لرسم المنحني $ص = لو س$ هي نقاط المجموعة :

$$\{(س, س), (س, \alpha س), (\alpha س, س), (\alpha س, \alpha س), (س, س)\} = لو س$$



شكل (٧-٧)

وأن كل نقطة (ب، ص) من
المجموعة ١ حيث $ص = ١$
تقابلها بالتناظر حول المستقيم
ص = س النقطة (ب، ص)
المجموعة ٢ حيث $ب = ١$
أي أن: التقابل:
 $١ \leftrightarrow ٢$
 $٢ \leftrightarrow ١$
تقابله العكسي: $١^{-1} : ٢^{-1}$
س

وبطريقة مشابهة نستطيع التو

تا: $١ \leftrightarrow ٢$: س \leftarrow لو س هي تقابل مما يقودنا إلى ان:

$$١ \text{ لو س} = ٢ \text{ لو س} \Leftrightarrow ١ \text{ س} = ٢ \text{ س}$$

تدريب (٣-٧):

علل ما يلي: (١) الأعداد التي لها لوغاريتم لأساس $١ < ١$ هي الأعداد الحقيقية الموجبة.

(٢) الأعداد الحقيقية السالبة ليس لها لوغاريتم.

مثال (٣١-٧):

أوجد أكبر فترة تصلح مجالاً لكل من الدالتين الآتيتين، ثم قارن بين المجالين:

(ب) $ص = لو(٣ - س)$

(أ) $ص = \sqrt{٧ - س}$

الحل:

(أ) العدد السالب ليس له جذر تربيعي حقيقي وعليه فإن:

$$-3 \leq s \leq 0 \text{ أو } s \geq 3 \text{ والفترة المطلوبة } f = (-\infty, 3]$$

(ب) في حالة لو (3 - s) فإن:

$$-3 < s < 0 \text{ أو } s > 3 \text{ والفترة المطلوبة } f = (-\infty, 3)$$

واضح أن $f \supset f$ وأن $f - f = \{3\}$.

مثال (٧-٣٢):

حل في \mathbb{Z} المعادلة: لو (س - ٢) = لو ٦ (١)

الحل:

$$\text{المعادلة (١)} \Leftrightarrow (س - ٢) = ٦ \Leftrightarrow س - ٢ = ٦ - س$$

$$\Leftrightarrow (س + ٢) = (-٣س)$$

$$\Leftrightarrow (س = -٢ \text{ أو } س = ٣)$$

التحقيق:

$$(١) \text{ عندما } س = -٢$$

المعادلة (١) تصبح:

$$\text{لو}(-٢) - ٢(-٢) \stackrel{؟}{=} \text{لو} ٦$$

$$\text{أي أن: لو}(٢+٤) = \text{لو} ٦$$

وهذا محقق

$$(٢) \text{ عندما } س = ٣$$

المعادلة (١) تصبح:

$$\text{لو}(٢-٣) \stackrel{؟}{=} \text{لو} ٦$$

$$\text{أي أن: لو}(٣-٩) = \text{لو} ٦$$

وهذا محقق

والحلان مقبولان، أي أن مجموعة الحل: $\{-٢, ٣\}$

تمارين (٧-٨)

اكتب العبارات الأسية المقابلة للعبارات اللوغاريتمية :

$$(1) \text{ لو } 125 = 3 \quad (2) \text{ لو } 3 = \frac{1}{2} \quad (3) \text{ لو } \frac{1}{3} = 8 - 3$$

اكتب العبارات اللوغاريتمية المقابلة للعبارات الأسية :

$$(4) 1000 = 3^{10} \quad (5) 10^{-3} = \frac{1}{243} \quad (6) 125 = \frac{2}{3}$$

أوجد عددين صحيحين متتاليين يكون اللوغاريتم المطلوب محصوراً بينهما :

$$(7) \text{ لو } 8 \quad (8) \text{ لو } 10 \quad (9) \text{ لو } 0,05$$

أوجد قيمة كل مما يلي :

$$(10) \text{ لو } 7^5 \quad (11) \text{ لو } 3^{-2} \quad (12) \text{ لو } 10^4$$

(١٣) إذا كان $1 < a < 10$ و $0 < b < 1$ فبين ما إذا كان $\text{لو } a^b$ موجباً أو سالباً

(١٤) إذا كان $0 < a < 1$ و $0 < b < 1$ فبين ما إذا كان $\text{لو } a^b$ موجباً أو سالباً

أوجد اللوغاريتمات الآتية :

$$(15) \text{ لو } 8 \quad (16) \text{ لو } 0,001 \quad (17) \text{ لو } 27$$

$$(18) \text{ لو } \frac{1}{8} \quad (19) \text{ لو } 25 \quad (20) \text{ لو } \frac{1}{4}$$

حل في \mathbb{R} المعادلات الآتية :

$$(21) \text{ لو } 32 = 8 \quad (22) \text{ لو } 3 = 81 \quad (23) \text{ لو } 3 = 3$$

$$(24) \text{ لو } 125 = 5 \quad (25) \text{ لو } 1 = (1+2)$$

في كلٍّ مما يلي ارسم جزأين من المنحنيين البيانيين على المستوي الإحداثي نفسه
متخذاً وحدة القياس نفسها :

$$(26) \text{ ص} = 3 \text{ س} , \text{ ص} = \text{لوس} \quad (27) \text{ ص} = 10 \text{ س} , \text{ ص} = \text{لوس}$$

بسّط كلاهما يلي :

$$(28) \text{ لوس} \times 81 \text{ لوس} \quad (29) \text{ لوس} \times 8 \text{ لوس}$$

$$(30) \text{ لوب} \times \text{لوا} \text{ (ضع لوب} = \text{س} , \text{ ثم أوجد بدلالة س : لوا)}$$

$$(31) \text{ أثبت أن : لو} = \text{لوا} \text{ (لوا} = 8 \text{) } = 0$$

$$(32) \text{ أثبت أن : لو} = \text{لوا} \text{ (لوا} = 1 \text{) } = 0$$

$$(33) \text{ أثبت أن : لو} = \text{لوا} \text{ (لوا} = 1 \text{) } = 1 \quad (34) \text{ أوجد : لو} = \text{لوا} \text{ (لوا} = 16 \text{) }$$

$$(35) \text{ أثبت أن : لوب} \times \text{لوا} = \text{لوا} \text{ (ضع لوب} = \text{س} , \text{ لوب} = 8 \text{) } = 8$$

٦ - ٧ قوانين اللوغاريتمات :

سوف ندرس في هذا البند أهم قوانين اللوغاريتمات، والجدير بالذكر أننا
عندما نذكر لوس مثلاً، أثناء عرض هذه القوانين، أو البرهان عليها، فلا بد من
أن نكون قد فرضنا ضمناً أن : س $\in \mathbb{R}^+$ ، $\{1\} - \mathbb{R}^+$ لذا فإننا لن نذكر ذلك
توخياً لعدم التكرار .

نظرية (٧-٤) :

$$\text{لو} (\text{ب} \times \text{ج}) = \text{لو} \text{ب} + \text{لو} \text{ج}$$

البرهان :

$$\text{من تعريف اللوغاريتم} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ب} = \text{ا}^{\text{س}} \\ \text{ج} = \text{ا}^{\text{ص}} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{لو ب} = \text{س} \\ \text{لو ج} = \text{ص} \end{array} \right.$$

$$\text{وعليه يكون: } \text{ب} \times \text{ج} = \text{ا}^{\text{س}} \times \text{ا}^{\text{ص}}$$

$$\text{أو: } \text{ب} \times \text{ج} = \text{ا}^{\text{س} + \text{ص}} \quad (\text{لماذا؟})$$

$$\text{لو}(\text{ب} \times \text{ج}) = \text{س} + \text{ص}$$

$$\text{أو: } \text{لو ب} + \text{لو ج} = \text{لو}(\text{ب} \times \text{ج})$$

تدريب (٤-٧) :

$$\text{تحقق أن: } \text{لو}(\text{ب} \times \text{ج} \times \text{د}) = \text{لو ب} + \text{لو ج} + \text{لو د}$$

$$\text{ثم استنتج أن: } \text{لو}(\text{ب} \times \text{ج} \times \text{د} \times \text{هـ} \times \text{و} \times \text{ز}) = \text{لو ب} + \text{لو ج} + \text{لو د} + \text{لو هـ} + \text{لو و} + \text{لو ز}$$

مثال (٣٣-٧) :

$$(١) \quad \text{لو}(٨١ \times ٢٧) = \text{لو}٨١ + \text{لو}٢٧ = ٤ + ٣ = ٧$$

$$(٢) \quad \text{لو}(٨ \times ١٢٥ \times ٠,٠٠١) = \text{لو}٨ + \text{لو}١٢٥ + \text{لو}٠,٠٠١ = ٠,٠٠١ + ١٢٥ + ٨ = \text{لو}(٠,٠٠١ \times ١٢٥ \times ٨) = \text{لو}١ = \text{الصفر}$$

نظرية (٥-٧) :

$$\text{لو} \frac{\text{ب}}{\text{ج}} = \text{لو ب} - \text{لو ج}$$

البرهان :

$$\text{بفرض: } \frac{ب}{ب} = \frac{ب}{ب}$$

يكون : $\frac{ب}{ب} \times \frac{ب}{ب} = ب$ وبحساب اللوغاريتم

$$\text{نجد : } \log\left(\frac{ب}{ب} \times \frac{ب}{ب}\right) = \log ب$$

$$\text{أو : } \log ب + \log ب = \log ب \text{ بتطبيق النظرية (٧-٤٧)}$$

$$\text{وبالتالي: } \log ب - \log ب = \log ب$$

$$\text{أي أن : } \log ب - \log ب = \frac{ب}{ب}$$

مثال (٧-٣٤) :

إذا علمت أن $\log ٥ \approx ٠,٦٩٩٠$ فأوجد $\log ٢$

الحل :

$$\frac{١}{٥} = ٢ \text{ فيكون } \log ٢ = \log ١٠ - \log ٥$$

$$\approx ٠,٣٠١٠ = ٠,٦٩٩٠ - ١$$

نتيجة (٧-٢)

$$\log ب - \log ١ = \log \frac{ب}{ب}$$

$$\log ب - ٠ =$$

$$\text{أي أن : } \log ب = \log \frac{ب}{ب}$$

مثال (٧-٣٥) :

بالاعتماد على أرقام المثال السابق أوجد $\log_{\frac{1}{4}}$ ، $\log_{\frac{1}{5}}$

الحل :

$$\log_{\frac{1}{4}} = -\log_4 = 2 \log_{\frac{1}{2}} = -0,3010$$

$$\log_{\frac{1}{5}} = -\log_5 = 0,6990$$

نظرية (٧-١) :

$$\log_{\frac{1}{a}} = -\log_a \quad \text{حيث } a > 0$$

البرهان :

نفرض أن : $\log_{\frac{1}{a}} = x$

فيكون : $a^x = \frac{1}{a}$

من تعريف اللوغاريتم

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x} \quad \Leftarrow$$

$$a^{-x} = a^1 \quad \Leftarrow$$

$$\text{من تعريف اللوغاريتم} \quad \log_{\frac{1}{a}} = -x \quad \Leftarrow$$

$$\log_{\frac{1}{a}} = x \quad \Leftarrow$$

تدريب (٧-٥) :

$$\text{تحقق من أن : (١) } \log_{\frac{1}{a}} = \sqrt[n]{\log a} \quad \text{(٢) } \log_{\frac{1}{a}} = \sqrt[n]{\log a}$$

مثال (٧-٣٦):

إذا علمت أن $٥ \text{ لو٣} = ١,٤٦٥$ و $٢ \text{ لو٣} = ٠,٦٣١$ فأوجد:

(أ) لو٣ ١٠ (ب) لو٣ ١٥ (ج) لو٣ ١٦

(د) لو٣ ٢,٥ (هـ) لو٣ ٠,٤ (و) لو٣ ٤

الحل:

<p>(ب) $١٥ \text{ لو٣} = ٣ \times ٥ \text{ لو٣} =$ $٣ \text{ لو٣} + ٥ \text{ لو٣} =$ $١ + ١,٤٦٥ =$ $٢,٤٦٥ =$ <p>(د) $٢,٥ \text{ لو٣} = \frac{٥}{٣} \text{ لو٣} =$ $٢ \text{ لو٣} - ٥ \text{ لو٣} =$ $٠,٦٣١ - ١,٤٦٥ =$ $٠,٨٣٤ =$ <p>(و) $٤ \text{ لو٣} = \sqrt[٤]{٢٢} \text{ لو٣} =$ $\frac{٢}{٣} \text{ لو٣} =$ $٢ \text{ لو٣} \times \frac{٢}{٣} =$ $٠,٦٣١ \times \frac{٢}{٣} =$ $٠,٤٢١ \approx$</p> </p></p>	<p>(أ) $١٠ \text{ لو٣} = ٢ \times ٥ \text{ لو٣} =$ $٢ \text{ لو٣} + ٥ \text{ لو٣} =$ $٠,٦٣١ + ١,٤٦٥ =$ $٢,٠٩٦ =$ <p>(هـ) $١٦ \text{ لو٣} = ٢ \text{ لو٣} =$ $٤ \text{ لو٣} =$ $٠,٦٣١ \times ٤ =$ $٢,٥٢٤ =$ <p>(ج) $٠,٤ \text{ لو٣} = \frac{٤}{١٠} \text{ لو٣} =$ $\frac{٢}{٥} \text{ لو٣} =$ $٢ \text{ لو٣} - ٥ \text{ لو٣} =$ $١,٤٦٥ - ٠,٦٣١ =$ $٠,٨٣٤ =$</p> </p></p>
---	--

مثال (٧-٣٧) :

حل في \mathbb{Z} المعادلة : لو س + لو (س-٦) = ٢

الحل :

$$\text{لو س} + \text{لو (س-٦)} = ٢$$

$$\text{لو س (س-٦)} = ٢ \quad \text{النظرية (٧-٤)}$$

لو (س٦ - ٢) = ٢ نحول إلى عبارة أسية.

$$\text{س}^٦ - ٢ = ٢$$

$$\text{س}^٦ - ٢ = ١٦$$

$$\text{س}^٦ = ١٨$$

$$\text{س} = ٨ \quad \text{أو} \quad \text{س} = -٢$$

البحث عن الحل المقبول :

(١) إذا كان س = -٢ فإن لو س لا وجود له في \mathbb{Z} لأن العدد السالب ليس له

لو غاريتم وهذا يعني أن -٢ ليس جذراً للمعادلة .

$$(٢) إذا كان س = ٨ فإن لو س + لو (س-٦) = لو ٨ + لو ٢ = ٢$$

$$= ٢ \times ٨ = ١٦ = ٢ \quad \text{وهذا يحقق المعادلة .}$$

ومجموعة الحل هي : {٨}

تمارين (٧ - ٩)

في كلٍّ من التمارين الآتية، حوّل العبارة المعطاة إلى عبارة لا تحوي سوى لوغاريتم متغيرٍ أو لعدد، علماً بأن جميع المتغيرات الواردة تمثل أعداداً حقيقية موجبة.

$$\text{مثال} \quad \frac{\text{لو}^{\frac{3}{2}} \text{س}^{\frac{2}{3}}}{\text{لو}^{\frac{2}{3}} \text{س}^{\frac{2}{3}}} \quad \text{الحل:} \quad \frac{\text{لو}^{\frac{3}{2}} \text{س}^{\frac{2}{3}}}{\text{لو}^{\frac{2}{3}} \text{س}^{\frac{2}{3}}} = \text{لو}^{\frac{3}{2}} \text{س}^{\frac{2}{3}} - \text{لو}^{\frac{2}{3}} \text{س}^{\frac{2}{3}}$$

$$= \text{لو}^{\frac{3}{2}} \text{س}^{\frac{2}{3}} + \text{لو}^{\frac{2}{3}} \text{س}^{\frac{2}{3}} - \text{لو}^{\frac{2}{3}} \text{س}^{\frac{2}{3}}$$

$$= \text{لو}^{\frac{3}{2}} \text{س}^{\frac{2}{3}} + \text{لو}^{\frac{2}{3}} \text{س}^{\frac{2}{3}} - \text{لو}^{\frac{2}{3}} \text{س}^{\frac{2}{3}}$$

$$(١) \text{لو}^{\frac{3}{4}} \text{س}^{\frac{2}{3}} \quad (٢) \text{لو}^{\frac{2}{5}} \text{س}^{\frac{2}{3}} \quad (٣) \text{لو}^{\frac{2}{3}} \text{س}^{\frac{2}{3}} \quad (٤) \text{لو}^{\frac{3}{2}} \text{س}^{\frac{2}{3}}$$

$$(٥) \text{لو}^{\frac{3}{2}} \text{س}^{\frac{2}{3}} \quad (٦) \text{لو}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\text{س}}{\text{لو}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (٧) \text{لو}^{\frac{3}{2}} \sqrt{\text{س}} \quad (٨) \text{لو}^{\frac{3}{2}} (\text{س}^{\frac{2}{3}} \times \text{لو}^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}}$$

في كلٍّ مما يلي حدّد العبارة الصحيحة من الخاطئة وبين السبب :

$$(٩) \text{لو}^{\frac{3}{4}} (\text{س} + \text{لو}) \neq \text{لو}^{\frac{3}{4}} \text{س} + \text{لو}^{\frac{3}{4}} \text{لو} \quad (١٠) \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3} \right)^{-1}$$

$$(١١) \text{لو}^{\frac{3}{4}} (\text{س} - \text{لو}) = \text{لو}^{\frac{3}{4}} \text{س} - \text{لو}^{\frac{3}{4}} \text{لو} \quad (١٢) -2 = \text{لو}^{\frac{3}{4}} (-4)$$

$$(١٣) \text{لو}^{\frac{3}{4}} (\text{س} + 4) = 12 \quad (١٤) 5 = \text{لو}^{\frac{3}{4}} (8 + 4)$$

$$(١٥) 5 = \text{لو}^{\frac{3}{4}} (8 \times 4) \quad (١٦) \text{لو}^{\frac{3}{4}} - \text{لو}^{\frac{3}{4}} = \frac{\text{لو}^{\frac{3}{4}}}{5}$$

في كلٍّ من التمارين التالية اكتب العبارة المعطاة على شكل لوغاريتم لمقدار واحد

فقط ، علماً بأن جميع المتغيرات الواردة تمثل أعداداً حقيقية موجبة :

مثال: $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} - \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} - \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27}} - \sqrt[3]{\frac{1}{8}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{27}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}} =$$

$$(17) \sqrt[3]{\frac{1}{27}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} - \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$$

$$(19) \sqrt[3]{\frac{1}{27}} - \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} - 1$$

$$(21) \sqrt[3]{\frac{1}{27}} - \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} - 2$$

أوجد قيمة س فيما يلي :

$$(23) \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} + \sqrt[3]{\frac{1}{27}}$$

$$(25) \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} + \sqrt[3]{\frac{1}{27}} - 2$$

إذا علمت أن $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = 0,699$ و $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 0,477$ فأوجد :

$$(27) \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = 15 \quad (28) \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = 125 \quad (29) \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = 6,0 \quad (30) \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = 9$$

أثبت صحة ما يلي :

$$(31) \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} + \sqrt[3]{\frac{1}{27}} - \sqrt[3]{\frac{1}{27}}$$

$$(32) \sqrt[3]{\frac{1}{27}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} - 3 = -3$$

$$(33) \quad \frac{2}{3} = \frac{4 \text{ لو} - 3 \text{ لو}}{8 \text{ لو} - 9 \text{ لو}}$$

حل في $\frac{2}{3}$ كلاً من المعادلتين :

$$(34) \quad 2 \text{ لو} + 1 = (1 + 3 \text{ س}) \text{ لو} + (-7 \text{ س}) \text{ لو}$$

$$(35) \quad 4 = (3 - \text{س}) \text{ لو} + (+3 \text{ س}) \text{ لو}$$

٧ - ٧ اللوغاريتمات العشرية :

(١) تسمى اللوغاريتمات التي أساسها (١٠) اللوغاريتمات العشرية أو اللوغاريتمات المعتادة .

وتستعمل اللوغاريتمات العشرية عادة في إجراء الحسابات المعقدة ، وقد اصطلح على عدم كتابة الأساس ١٠ ، فنكتب مثلاً : لو ٣٥ ونعني بذلك لو ٣٥ وكذلك فإن لو ١٢ , ١٥ تعني لو ١٢ , ١٥ وهكذا ...

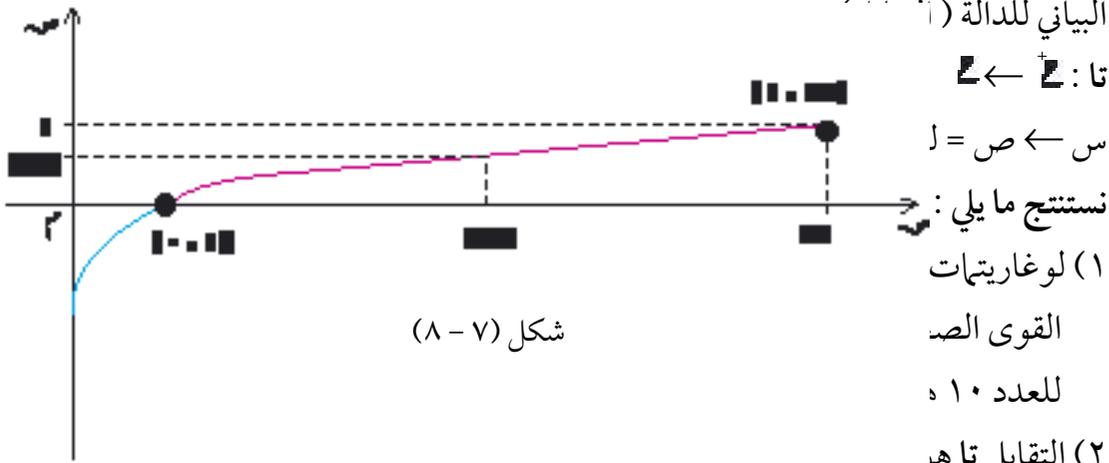
الجدول الآتي يبين لنا اللوغاريتمات العشرية لبعض القوى الصحيحة للعدد ١٠ ، وقد أنشأناه معتمدين على كون : لو ١٠ = ١ (لماذا؟)

$$\text{مثلاً : لو } 3 = 1000 \text{ لأن } 3^{10} = 1000$$

$$\text{لو } -3 = 0,001 \text{ لأن } 3^{-10} = \frac{1}{1000} = 0,001$$

س < ١٠		١ ≤ س ≤ ١٠			س > ١٠				
١٠٠٠٠	١٠٠٠	١٠٠	١٠	١	٠,١	٠,٠١	٠,٠٠١	٠,٠٠٠١	العدد س
٤١٠	٣١٠	٢١٠	١١٠	٠١٠	١-١٠	٢-١٠	٣-١٠	٤-١٠	الصيغة الأسية للعدد س
٤	٣	٢	١	٠	-١	-٢	-٣	-٤	لوس
لوس < ١		١ ≤ لوس ≤ ١			اللوغاريتمات العشرية سالبة				

بالرجوع إلى هذا الجدول وإلى الشكل (٧ - ٨) الذي يمثل جزءاً من المنحني



شكل (٧ - ٨)

البياني للدالة (١)

تا : ←

س ← ص = ل

نستنتج ما يلي :

(١) لوغاريتمات

القوى الص

للعدد ١٠

(٢) التقابل تاهر

(مثلاً : عندما تتزايد س من ١ إلى ١٠ تتزايد ص = لوس من ٠ إلى ١).

(٣) نلاحظ ما يلي :

(أ) عندما $s \geq 0$ فإن س ليس له لوغاريتم، ونعبر عن ذلك بقولنا :

عندما س $\in (-\infty, 0]$ يكون لوس غير معرّف.

(ب) عندما $s > 0$ فإن س $\in (0, 1)$ يكون عدداً سالباً

(لاحظ الجزء الأزرق من المنحني).

(ج) س = ١ \Leftrightarrow لوس = ٠

(د) عندما س < 1 فإن لوس < 0

(٢) العدد البياني والجزء العشري من لوغاريتم عدد :

بالرجوع إلى الشكل (٧ - ٨) نلاحظ أنه :

عندما س $\in (1, 10)$ فإن لوس $\in (0, 1)$

وإن أي عدد موجب س ، إذا لم يكن مساوياً إحدى قوى العشرة، فإنه يكتب

بالشكل : س = ب $\times 10^a$ حيث $1 > ب > 10^{-1}$ ، عدد صحيح

وعليه فإن لوس = لو (ب $\times 10^4$) = لوب + 10^4 (لماذا ؟)
 لعلك تلاحظ معنا أن لوس يتألف من جزأين :
 لوب وهو جزء عشري موجب .
 10^4 وهو عدد صحيح نسميه العدد البياني .

مثال (٧-٣٨) :

أ) حاول أن تبحث عن : لو ٥٥٠

$$\text{ستجد أن : } 550 = 5,5 \times 10^2$$

$$\text{وعليه : لو } 550 = 5,5 + 2$$

تستطيع الحصول على قيمة مقربة للعدد (لو ٥,٥) من الشكل (٧-٨) ستجد

$$\text{أن لو } 5,5 \approx 0,7$$

$$\text{فيكون : لو } 550 = 5,5 + 0,7 = 2,7$$

ب) حاول إيجاد قيمة مقربة لكل من : لو ٥٥٠٠٠ ، لو ٥٥٥٥٥

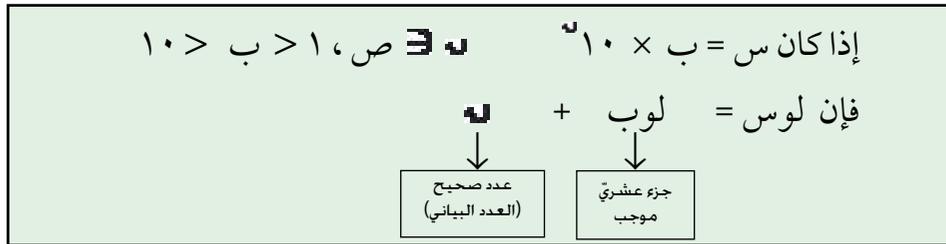
$$\text{ستجد أن : } 55000 = 5,5 \times 10^4 \quad \text{وأن : } 55555 = 5,5 \times 10^3$$

$$\text{فيكون : لو } 55000 = 5,5 + 4 \quad \text{فيكون : لو } 55555 = 5,5 + 3$$

$$5,5 + 0,7 \approx 3 - 0,7$$

$$5,7 = 4$$

وبصورة عامة :



(٣) طريقة إيجاد لوغاريتم عدد (وبالعكس) :

(١) كيف توجد العدد البياني من لوغاريتم عدد $s < ٠$ ؟

حيث إن العدد البياني \mathbb{N} عدد صحيح ، لذا نميِّز حالتين :

أولاً : $s \leq ١$ وهذا يعني أن العدد البياني $\mathbb{N} \leq ٠$

من خلال الأمثلة الآتية نجد :

عندما $s = ٧, ٥٣٢ = ٣٢٧, ٥ = ١٠ \times ٥$ فإن العدد البياني من لوس هو ٢ .

وعندما $s = ٥, ٥ = ٥, ٥ = ١٠ \times ٥$ فإن العدد البياني من لوس هو ٠

وعندما $s = ٥ = ٧٥٠٠٠, ٥ = ١٠ \times ٧$ فإن العدد البياني من لوس هو ٤

قارن في كل حالة بين العدد البياني وعدد أرقام القسم الصحيح من s لعلك

أدركت القاعدة الآتية :

إذا كان العدد $s \leq ١$ فإن العدد البياني من (لوس) هو عدد صحيح غير

سالب ينقص واحداً عن عدد أرقام القسم الصحيح من s

تدريب (١-٦) :

تحقق من أن :

العدد البياني من لوس ٧٤٥٠٠٠ هو ٥

والعدد البياني من لوس $٧, ٤٥$ هو ٠

والعدد البياني من لوس $٧٤, ٥$ هو ١

وبالعكس :

إذا كان العدد البياني من لوس مساوياً (\mathbb{N} عدد صحيح غير سالب) فإن عدد

أرقام القسم الصحيح من s يزيد واحداً على العدد البياني أي أنه يساوي ($\mathbb{N} +$

مثلاً : إذا كان لوس = ٢ + جزء عشري موجب

فإن عدد أرقام القسم الصحيح من $\frac{3}{10} = 1 + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$

مثال (٧-٣٩) :

إذا علمت أن لوس = ٢, ٩٢٧٩ فإن س = ٢, ٩٢٧٩١٠ التعريف (٧ - ٨).

أو : س = ٢, ٩٢٧٩١٠ × ١٠

وباستخدام الآلة الحاسبة التي تحتوي على الرمز (X^Y) ستجد أن :

س $\approx 2,9279 \times 10^8 = 292,790,000$ (اكتفينا بخمسة أرقام معنوية).

٨٤٧, ٠٣ =

(لاحظ أن عدد المنازل الصحيحة = ٢ + ١ أي : العدد البياني + ١)

ثانياً : $0 < س < ١$ وهذا يعني أن العدد البياني $١ > ٠$

من خلال الأمثلة الآتية نجد :

عندما س = ٠, ٦٧٥ = ٠, ٦٧٥ × ١٠^{-١} فإن العدد البياني من لوس هو ١ -

وعندما س = ٠, ٠٠٠٦٧٥ = ٠, ٦٧٥ × ١٠^{-٤} فإن العدد البياني من لوس هو ٤ -

وعندما س = ٠, ٠٦٧٥ = ٠, ٦٧٥ × ١٠^{-٢} فإن العدد البياني من لوس هو ٢ -

قارن في كل حالة بين العدد البياني وعدد الأصفار الموجودة بين الفاصلة وأول

رقم معنوي من س (من جهة اليسار).

لعلك أدركت القاعدة الآتية :

إذا كان العدد الموجب س $١ > س$ فإن العدد البياني من (لوس) هو عدد صحيح سالب، تزيد قيمته المطلقة واحداً على عدد الأصفار الواقعة عن يمين الفاصلة العشرية وقبل الوصول إلى أول رقم معنوي .

تدريب (٧-٧):

تحقق من أن:

العدد البياني من لو $٠,٧٤٥$ هو -١

والعدد البياني من لو $٠,٠٠٧٤٥$ هو -٣

والعدد البياني من لو $٠,٠٠٠٠٠٠٧٤٥$ هو -٧

وبالعكس:

إذا كان (لو س) يتألف من عدد بياني سالب وجزء عشري موجب فإن $٠ > س > ١$ ، ويكون س محتويًا على أصفار تقع عن يمين الفاصلة ينقص عددها واحدًا عن القيمة المطلقة للعدد البياني السالب.

أي أنه:

إذا كان: لو س = -١ + جزء عشري موجب (حيث -١ عدد صحيح موجب)

وتكتب: لو س = -١ + جزء عشري موجب

فإن عدد الأصفار عن يمين الفاصلة في العدد س هو -١

مثال (٧-٤٠):

إذا علمت أن: لو س = -٢ , ٩٢٧٩ = $(٢ - ٠, ٩٢٧٩)$

فإن: س = $١٠(٢ - ٠, ٩٢٧٩)$ (التعريف (٧-٨)).

$$٢ - ١٠ \times ٠, ٩٢٧٩ ١٠ =$$

وبالاستفادة من المثال (٧-٣٩) نجد أن:

$$\text{العدد البياني} \rightarrow ٢ - ١٠ \times ٨, ٤٧٠٣ = \text{س}$$

$$٠, ٠٨٤٧٠٣ =$$

(صفر واحد)

أي أن: عدد الأصفار = القيمة المطلقة للعدد البياني -١

ب) كيف توجد الجزء العشري من لوغاريتم عدد س < ٠ ؟
يستخرج الجزء العشري من جداول نظمها الرياضيون تسمى : (الجداول اللوغاريتمية) ، والجدير بالذكر أن القيم التي نحصل عليها هي قيم مقربة وليست كلها مضبوطة ، ومن هنا نجد نماذج عدة لهذه الجداول ، وذلك تبعاً لدرجة التقريب التي روعيت فيها .

هناك جداول تعطي الجزء العشري مقرباً إلى أربعة أرقام عشرية ، وهي التي نستعملها عادة في المدارس الثانوية ، وهناك جداول مقربة إلى ثلاثة أرقام عشرية أو خمسة أو ستة ..

ولعلك لاحظت أن الرسم البياني في الشكل (٧ - ٨) يعطيك قيمة لوس مقربة إلى رقم عشري واحد .

ولكل جدول طريقة لاستعماله تكون موجودة في مقدمة ذلك الجدول ، ولذا فسوف نترك للطالب فرصة الرجوع إلى الجدول الذي سيستعمله ليتعرف على طريقة استعماله سواء لإيجاد لوغاريتم عدد معلوم أو لإيجاد العدد ، إذا علم لوغاريتم ذلك العدد .

الآلة الحاسبة :

بالوقت ذاته ، فإن بإمكاننا الاستغناء عن هذا الجداول واستخدام الآلة الحاسبة ، وهذا ما فعلناه في المثالين (٧ - ٣٩) ، (٧ - ٤٠) حيث أوجدنا س من معرفة (لوس) ، ولو طلب منا إيجاد لوغاريتم عدد معلوم ، فإن الآلة الحاسبة التي تحتوي على زر [Log] ستساعد على حساب ذلك .

ولعل الآلة الحاسبة بمقاساتها المختلفة وأشكالها المتطورة هي من أهم سمات هذا العصر الذي فتح الله فيه على العقل البشري ، فوصل إلى ما وصل إليه من علم وتقانه ، مصداقاً لقوله تعالى : ﴿ سُرِّيهِمْ أَيْنَ أَنفُسِهِمْ ﴾ (سورة فصلت ٥٣) .

تُرى ما هو شكل الآلة التي سيوفِّق الله تعالى هذا الإنسان، المُسْتَخْلَفَ في هذه الأرض على صناعتها؟ مما سيجعل، والله أعلم، آلتنا الحالية المتطوّرة، مثُلها كمثل الجداول الرياضية التي في طريقها إلى الزوال وسبحانه جَلَّ مِنْ قَائِلٍ: ﴿وَيَخْلُقُ مَا لَا تَعْلَمُونَ﴾ (سورة النحل ٨).

أما عن طريقة استعمال الآلة الحاسبة، فلكل آلة طريقتهَا، المنسجمة مع طريقة ابتكارها، ويرافق كلَّ آلة دليلها الذي يرشدك على طريقة الاستعمال. والآلة الحاسبة بدورها، تختلف كفاءتها من حيث درجة التقريب، تبعاً للأغراض التي صُمِّمت من أجلها.

والذي يزيد الآلة الحاسبة أهمية أنها تعطيك لوغاريتم العدد بكامله، بما في ذلك عدده البياني وقسمه العشري، هذا يجعلها متميّزة عن الجداول التي لا تُعطيك إلا الجزء العشري من اللوغاريتم، وعليك أن تبحث عن العدد البياني باتباع ما قدمناه آنفاً. وكذلك الحال، إذا عَلِمَ اللوغاريتم وُطِبَ منك إيجاد العدد الذي يقابله، فإن الآلة تعطيك العدد بما في ذلك الفاصلة العشرية التي ستقدّمها لك في مكانها، في حين أن الجداول تُعطيك العدد بأرقامه المعنوية، وعليك أنت أن تحدد مكان الفاصلة العشرية متبعاً القواعد التي تعلّمتهَا.

والآلة الحاسبة بالإضافة إلى سرعة أداؤها، تعطيك النتائج بثمانية أرقام معنوية على الأقل مما يجعلها متميّزة على الجداول.

مثال (٧-٤١):

١) أوجد لوغاريتم كلٍّ من: ٤, ٥٢١, ٣, ٤٢٥٦, ٠, ٠٠٦٥

(١) باستخدام جداول ذات أربعة أرقام عشرية.

(٢) باستخدام الآلة الحاسبة مقرباً الجواب إلى أربعة أرقام عشرية.

ب) استنتج بدون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة كلاً مما يلي :

$$(1) \text{ لو } 5214, 521400, \text{ لو } 0,005214$$

$$(2) \text{ لو } 34,25, \text{ لو } 0,3425, \text{ لو } 342,5$$

$$(3) \text{ لو } 0,065, \text{ لو } 6,5, \text{ لو } 650000$$

الحل:

(1) باستخدام الجداول :

$$\text{لو } 521,4$$

$$\text{العدد البياني} = 2$$

والجزء العشري نوجده من الجدول

$$\text{فيكون: لو } 521,4 \approx 2,7172$$

$$\text{لو } 3,4256$$

الجدول الذي بين أيدينا طاقته

أربعة أرقام معنوية، لذا نقرب العدد

إلى أربعة أرقام معنوية فنجد :

$$3,426 \approx 3,4256$$

العدد البياني = 0 ، وبعد مطالعة

الجدول نجد :

$$\text{لو } 3,426 \approx \text{لو } 3,4256$$

$$\approx 0,5348$$

(2) باستخدام الآلة الحاسبة :

ندخل العدد في الآلة ، ثم نضغط

على الزر $\boxed{\text{Log}}$ فنجد على

الشاشة 71 $\boxed{2.7171}$ وبالتقريب

المطلوب يكون:

$$\text{لو } 521,4 \approx 2,7172$$

ندخل العدد بأرقامه الخمسة

في الآلة ثم نضغط على الزر

$\boxed{\text{Log}}$ فنجد :

$$366 \boxed{0.5347}$$

وبالتقريب المطلوب يكون :

$$\text{لو } 3,4256 \approx 0,5347$$

(لاحظ أن سبب الاختلاف في الرقم

الأخير هو التقريب مرتين في الجدول)

ندخل العدد في الآلة ونضغط

على [Log] لنجد :

866 **-2.1870**

فيكون لو $0,0065 = -2,1871$

لو $0,0065$

العدد البياني $= -3$

وبعد مطالعة الجدول نجد :

لو $0,0065 \approx \bar{3},8129$

هل يوجد تناقض بين إجابتي الجدول والآلة في العدد الأخير ؟

إن الإجابة في الآلة هي : لو $0,0065 \approx -2,1871$

$$2 - 0,1871 =$$

$$\overbrace{-12} - \overbrace{0,1871-1} =$$

وبإضافة $1 - 1$ نجد :

$$3 - 0,8129 =$$

$$= \bar{3},8129 \text{ وهي الإجابة نفسها التي حصلت}$$

عليها من الجدول

ملحوظة (٧ - ٩) :

لاحظ أن بإمكانك الحصول على الجزء العشري الموجب باستخدام الآلة ،

وكتابة العدد البياني بالاعتماد على معلوماتك وذلك

$$\text{بأن تكتب : } 0,0065 = 6,5 \times 10^{-3}$$

فيكون : لو $0,0065 = 6,5 - 3$

$$0,8129 \approx 0,8129134 = 6,5 \text{ لو تعطيك}$$

$$\text{وبالتالي : لو } 0,0065 \approx \bar{3},8129$$

(ب)

لقد حسبنا لو $521,4$

$$3,7172 = 1 + 521,4 \text{ لو} = 5214 \Leftrightarrow 10 \times 521,4 = 5214$$

$$\text{وكذلك : } 10 \times 521,4 = 521400$$

$$\Leftrightarrow 5,7172 = 3 + 521,4 \text{ لو} = 521400$$

وأيضاً: $0,005214 = 0,4 \times 10^{-5}$

\Leftrightarrow لو $0,005214 = 0,4 - 521,4 = 3,7172$

ونترك للطالب حل الفقرتين (٢)، (٣).

مثال (٧-٤٢):

أوجد س إذا علمت (لوس) في كل مما يلي:

(١) باستخدام الجداول (٢) باستخدام الآلة الحاسبة

لوس $2,3746$ ، لوس $0,56243$ ، لوس $3,5647$

الحل:

(١) من الجداول

لوس $2,3746$

نبحث في جداول الأعداد المقابلة للوغاريتمات المعتادة ونغض النظر عن العدد البياني لأن مهمته تبيان عدد أرقام القسم الصحيح في العدد المطلوب، وموضع الفاصلة العشرية إن وجدت.

طريقة (١)

ندخل اللوغاريتم: $2,3746$ في الآلة ثم نضغط على الزر **INV** ثم على **Log** يظهر على الشاشة: **236.91906** فإذا أردنا الاكتفاء بأربعة أرقام معنوية نجد أن $236,9 = س$

طريقة (٢)

نعتمد على أن لوس $2,3746 = س$
 $\Leftrightarrow س = 10^{2,3746}$

وباستخدام الزر (X^Y) كما في المثال (٧-١٨) نجد العدد نفسه (تحقق من ذلك).

العدد البياني في هذا المثال هو ٢ يدل على أن القسم الصحيح من العدد الناتج يتألف من ثلاثة أرقام.

نبحث في الجدول عن مقابل $2,3746$ فنجد 2369

وعليه يكون $236,9 = س$

$$\text{لوس} = 0,56243$$

العدد البياني $0 =$ فالقسم الصحيح يتألف من رقم واحد ($0 + 1 = 1$).

وحيث إنَّ الجدول مقربة أعدادهِ إلى أربعة

$$\text{أرقام فإن : } 0,56243 \approx 0,5624$$

نبحث في الجدول عن مقابل $0,5624$

ف نجد : $0,3651$ وعليه يكون :

$$\text{س} = 3,651$$

$$\text{لوس} = 3,5647$$

العدد البياني -3 يدل على وجود صفرين

بين الفاصلة العشرية وأول رقم معنوي

القسم العشري $0,5647$ يقابله في

جدول الأعداد المقابلة للوغاريتمات

3670 وعليه يكون :

$$\text{س} = 0,003670$$

مثال (٤٣-٧) :

سنتبع الطريقة الأولى فنجد أن :

$$\text{س} = 3,6511527$$

$\approx 3,651$ (تحقق من العدد

نفسه باتباع الطريقة الثانية).

سنتبع الطريقة الأولى فندخل في

الآلة : $-3 + 0,5647$

ثم نضغط على **INV** ثم **Log**

لنجد : $3.6702868-0.3$

وهذا يعني أن :

$$\text{س} = 0,0036702868$$

أو : $\text{س} \approx 0,003670$

استفد من نتائج المثال (٧ - ٤٢) لإيجاد الأعداد التي علمت لوغاريتماتها فيما

يلي، دون استخدام الآلة الحاسبة أو الجداول :

$$\text{لوس} = 2,3746 \quad , \quad \text{لوس} = 1,56243 \quad , \quad \text{لوس} = 6,5647$$

الحل :

رأينا في المثال (٧-٤٢) أن مقابل $0,3746$ هو : 2369 وعليه يكون :

$$\text{لوس} = 2,3746 \Leftrightarrow \text{س} = 0,02369$$

وكذلك ستجد أن :

$$\text{لوس} = 1,56243 \Leftrightarrow \text{س} = 36,51$$

$$\text{لوس} = 6,5647 \Leftrightarrow \text{س} = 3670000$$

ولو استعملنا العدد الناتج من الآلة لقلنا إن $\text{س} = 3670286,8$

فلو اكتفينا بأربعة أرقام معنوية لوجدنا $\text{س} = 3670 \times 10^3 = 3670000$

تمارين (٧ - ١٠)

في كلٍّ مما يلي حدّد العبارة الصحيحة والخاطئة وبيّن السبب :

(١) لو س = لوب \Leftrightarrow لوب = لو س (٢) $\frac{\text{لوب}}{\text{لوب}} = \frac{\text{لوب}}{\text{لوب}} - \text{لوب}$

(٣) إن مجال الدالة $f(x) = \text{س}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة .

(٤) لو $(2 - 4,576) = \text{لوب}$ $0,04576$

(٥) $3,5840 = 4,4160$

(٦) $2 - 4,682 = 0,4682$ (٧) لو $5 + 2 = \text{لوب}$ $7,28$

(٨) لو $5,5 = 4,7404$

(٩) $10^{2,57} = \text{س} \Leftrightarrow \text{لوس} = 2,57$

(١٠) لو $2,7993 = 630 \Leftrightarrow \text{لوب} = 0,630$ $1,7993$

أوجد اللوغاريتمات العشرية للأعداد الآتية :

(١١) $5,032$ (١٢) $1,641$ (١٣) 570000 (١٤) $0,0003$

(١٥) $0,0245$ (١٦) $0,003416$ (١٧) $32,7546$ (١٨) $0,689182$

أوجد الأعداد المقابلة لللوغاريتمات الآتية :

$$٧,٦٤٨٢(٢١) \quad \bar{٢},٦٤٨٢(٢٠) \quad ٢,٦٤٨٢(١٩)$$

$$١,٠٠٠٦(٢٤) \quad \bar{١},٠٠٠٦(٢٣) \quad ٠,٠٠٥٧٦(٢٢)$$

أوجد كلاً مما يلي :

$$\bar{٣},٢٢٨٢ \ ١٠(٢٧) \quad \bar{١},٦٣٠٠ \ ١٠(٢٦) \quad ٢,٥٧ \ ١٠(٢٥)$$

إذا كان لو $٤,٥٦٦ \approx ٠,٦٥٩٥٤$ فأوجد بدون استخدام الجدول أو الآلة:

$$(٢٨) \text{ لو } ٤٥٦٦٠ \quad (٢٩) \text{ لو } ٤٥,٦٦ \quad (٣٠) \text{ لو } ٠,٠٠٠٤٥٦٦$$

$$(٣١) \text{ أوجد لو } \left(\frac{١}{ب}\right)^٢ \text{ علماً بأن } ٣,٤٥٧ = ١ \text{ ، } ٠,٠٠٢٦١ = ب$$

$$(٣٢) \text{ إذا كان لو } ١ = ١,٦٤٣٢ \text{ ، لو } ٤ = ٤,٦٤٣٢ \text{ فأوجد قيمة } ١ \text{ بدلالة } ب$$

٧ - ٨ الاستفادة من اللوغاريتمات في إجراء الحسابات :

يُستفاد من اللوغاريتمات في تبسيط العمليات الحسابية، خاصة المعقدة منها والتي لا يمكن إجراؤها، أو أن إجرائها يستغرق وقتاً كبيراً، على أن اكتشاف الآلات الحاسبة المتطورة يفتح الطريق لإنجاز هذه العمليات بوقت قصير وبدقة أكثر وطريق أيسر.

تتلخّص الفكرة في استخدام الجمع والطرح مكان الضرب والقسمة، في حل المسائل التي تحتوي على أعداد كبيرة، تلك الفكرة التي لمعت أول ما لمعت في الفكر العربي في العصر الذهبي لحضارتنا الإسلامية، ففي نحو سنة ٢١٠هـ ألف سنان ابن الفتح الحرّاني كتابه الجمع والتفريق شرح فيه الطريقة التي نستطيع أن نحل بها المسائل القائمة على الضرب والقسمة بالجمع والطرح، ثم استطاع بعده ابن يونس المصري المتوفى عام ٣٩٩هـ أن يوجِد ما يسمّى بقانون التحويل: $ح تا \times ح تا =$ $\frac{١}{٢} \text{ ح تا } (١ + ب) + \frac{١}{٢} \text{ ح تا } (١ - ب)$ وهو كما تشاهد خطوة متقدّمة إلى الأمام

لانتقال من الضرب إلى الجمع، وتابع الرياضيون المسلمون التقدُّم في هذا الموضوع حتى استطاع ابن حمزة المغربي في القرن العاشر الهجري من اكتشاف الصلة بين المتابعتين :

$$(1) \quad 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$(2) \quad 2=1^2, 4=2^2, 8=3^2, 16=4^2, 32=5^2, \dots$$

(لاحظ العلاقة بين الأسس في السطر الثاني والأعداد في السطر الأول). وهكذا وضع المغربي أصول الأسيس (اللوغاريتم) ومهَّد لاختراعه فمثله كمثل من صنع مصباحاً وهياًه للاشتعال ، فما كان من (جون نابير) الاسكتلندي الذي عاش في الفترة (١٥٥٠ - ١٦١٧م) - القرن الحادي عشر الهجري - إلاَّ أنه استعمل عود الثقاب فأضاء المصباح الذي بدأ في صنعه (سنان) وشارك في تحسينه (ابن يونس) وأنجزه (ابن حمزة) ، استفاد (نابير) مما توصل إليه علماءنا الأفاضل فصنع جداول اللوغاريتمات التي أدخلت عليها العديد من التعديلات حتى آلت إلى شكلها الحاضر.

من جهة أخرى فإنَّ ما نشاهده من ارتباط وثيق بين مجموعة الأعداد الكلية، ومجموعة قوى العدد ٢ حيث أن عملية الضرب $4 \times 8 = 32$ في السطر (٢) تقابلها عملية الجمع $3 + 2 = 5$ ، إن هذا الارتباط الذي قاد إلى ادخال مفهوم اللوغاريتم في الرياضيات، إن دلَّ على شيء فإنما يدلُّ على أن هذا الكون محكم الصنعة، ما وُجد صدفةً وما خُلِق عبثاً، وأنَّ خالقه، جلَّ جلاله، واحدٌ أحد، ﴿لَوْ كَانَ فِيهِمَا آلِهَةٌ إِلَّا اللَّهُ لَفَسَدَتَا﴾ الأنبياء .

وبالنسبة لدور المسلمين في ابتكار اللوغاريتمات يذهب بعض الباحثين المعاصرين إلى أن الخوارزمي (-١٦٤ ٢٣٥هـ) هو الذي ابتكرها وعمل لها جداول تعرف باسمه الذي جرى تحريفه باللغات الغربية ليصبح (Algorithm). تعال نقطف ثمار هذا الباب ونُجري بعض الحسابات المعقَّدة، حيث سنستعمل الآلة الحاسبة بديلاً عن الجداول للأسباب التي ذكرناها.

مثال (٧-٤٤) :

لو طلب منك إيجاد $\sqrt[5]{75,643}$ ، فإنه قبل الآلة الحاسبة ، كانت الطريقة الوحيدة لإيجاد الجواب هو الاعتماد على خواص اللوغاريتمات والاستعانة بالجداول، وسنقوم بذلك مستعملين الآلة بدلاً من الجداول فنضع :

$$س = \sqrt[5]{75,643} ، \text{ فيكون :}$$

$$\frac{1}{5} = \text{لو } 75,643$$

وبالرجوع إلى الآلة وفق التسلسل الآتي :

$$\boxed{75.643} \boxed{\text{Log}} \boxed{\div} \boxed{5} \boxed{=} \rightarrow \boxed{0.3757537}$$

ثم نوجد س الذي لوغاريتمه لم يزل على الشاشة فنضغط على الأزرار :

$$\boxed{\text{INV}} \boxed{\text{Log}} \rightarrow \boxed{2.375493}$$

$$\text{أي أن : } س = 2,375493$$

ولو أردنا إجراء الحساب المباشر دون اللجوء إلى اللوغاريتم وذلك بكتابة :

$$\sqrt[5]{75,643} = (75,643)^{\frac{1}{5}} \text{ واستعمال الزر } X^{\frac{1}{Y}}$$

أو الزر X^Y لحصلنا على الجواب نفسه في كلتا الحالتين . (تحقق من ذلك).

ملحوظة (٧-١٠) :

إن بعض الآلات الحاسبة تستعمل الزر X^Y أو الزر $X^{\frac{1}{Y}}$ مباشرة وبعضها الآخر بوساطة الزر $\boxed{\text{INV}}$ وكذلك الحال بالنسبة لمقابل اللوغاريتم حيث تحتوي بعضها على زر $\boxed{\text{Log}^{-1}}$ وبعضها الآخر تعطينا العدد المقابل للوغاريتم عن طريق :

$$\boxed{\text{INV}} \boxed{\text{Log}}$$

مثال (٤٥-٧) :

$$\frac{3(10,48)}{100,57 \times 2(0,038)} = \text{استعمل الآلة الحاسبة في إيجاد س}$$

(١) بتطبيق اللوغاريتمات. (٢) بالحساب المباشر بدون وساطة اللوغاريتمات.

الحل:

$$(1) \text{ لو س} = 3 \text{ لو } 10,48 - 2 \text{ لو } 0,038 - \text{ لو } 100,57$$

نتبع التسلسل الآتي (حيث استخدمنا آلة تحتوي على الزر [INV]).

$$10.48 \text{ [Log] } \times \text{ [3] } - 0.038 \text{ [Log] } \times \text{ [2] } - 100.57 \text{ [Log] } =$$

$$\text{[INV] [Log] } \rightarrow 7925.892986$$

فيكون : س $\approx 7925,893$

(٢) بالحساب المباشر باستعمال آلة تحتوي على الزر $[X^Y]$ ستحصل على الجواب نفسه (تحقق من ذلك).

مثال (٤٦-٧) :

بدأ تاجر برأس مال قدره ٣٠٠٠٠٠٠ ريال وكان صافي أرباحه السنوية ٥,٢٢٪ من رأس المال ، كما يؤدي زكاة ماله سنوياً . احسب رأس ماله في نهاية ١٢ سنة، علماً بأن الأرباح تضاف سنوياً لتصبح رأس مال جديد للسنة الجديدة . (يطلب الحل عن طريق اللوغاريتمات مع استعمال الآلة الحاسبة) .

الحل:

الربح السنوي ٥,٢٢ أي أن كل ريال يصبح بعد سنة ٢٢٥,١ ريالاً ، يدفع التاجر في نهاية كل سنة زكاة بواقع ٥,٢٪ ، أي أن كل ريال من رصيده السنوي (رأس المال وصافي الأرباح) يُصبح : ١ - ٠,٢٥ = ٠,٧٥ ، ريال .

فيكون رصيده في نهاية السنة الأولى $300,000(1,225)(0,975)$ ريال .
وفي نهاية السنة الثانية $300,000(1,225)^2(0,975)^2$ ريال .
وهكذا ...

ففي نهاية ١٢ سنة يكون رصيده :

$$\text{ص} = 300,000(1,225)^{12}(0,975)^{12} \text{ ريال}$$

ومن أجل حساب ص نستيد من اللوغاريتمات فنجد :

$$\text{لو ص} = \text{لو } 300,000 + 12 \text{ لو } 1,225 + 12 \text{ لو } 0,975$$

وباستخدام الآلة الحاسبة :

$$\boxed{300.000} \boxed{\text{Log}} \boxed{+} \boxed{1.225} \boxed{\text{Log}} \boxed{\times} \boxed{12} \boxed{+} \boxed{0.975} \boxed{\text{Log}} \boxed{\times} \boxed{12}$$

$$\boxed{=} \boxed{\text{INV}} \boxed{\text{Log}} \rightarrow \boxed{252818909}$$

فيكون رأس المال التاجر في نهاية ١٢ سنة : 2528190 ريالاً .

مثال (٧-٤٧) :

$$\text{أوجد ص} = \frac{3(6,045)0,6582}{955,5\sqrt[4]{+} + 1,8940}$$

الآلة الحاسبة.

الحل :

إن وجود الجمع بالمقام لا يسمح لنا بحساب ص بواسطة اللوغاريتمات مباشرة،

$$\text{لذا فإن علينا أن نحسب المقدار } 955,5\sqrt[4]{+} = \text{فيكون:}$$

$$\text{لو ص} = \frac{1}{4} \text{ لو } 955,5 \text{ وباستخدام الآلة الحاسبة نجد:}$$

$$\boxed{955.5} \boxed{\text{Log}} \boxed{\div} \boxed{4} \boxed{=} \boxed{\text{INV}} \boxed{\text{Log}} \boxed{5.5597808}$$

س $\approx 5,5598$ (قربنا الجواب إلى أربعة أرقام عشرية كما هو الحال في بقية الأعداد). فيكون:

$$\frac{{}^3(6,045)^{0,6582}}{7,4538} = \frac{{}^3(6,045)^{0,6582}}{5,5598 + 1,8940} = \text{ص}$$

وعليه فإن: لو ص = لو $0,6582 + 3$ لو $6,045$ - لو $7,4538$
 باستخدام الآلة الحاسبة نجد:

$$\boxed{0,6582} \boxed{\log} \boxed{+} \boxed{6.045} \boxed{\text{Log}} \boxed{\times} \boxed{3} \boxed{-} \boxed{7,4538} \boxed{\text{Log}} \\ \boxed{=} \boxed{\text{INV}} \boxed{\text{Log}} \rightarrow \boxed{19,506038}$$

ص $\approx 19,5060$

مثال (٧-٤٨):

حل في $\frac{18}{12}$ كلاً من المعادلتين: $18 = 12^s$ ، $19 = 3^{s+1}$
 الحل:

(١) $18 = 12^s$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين: s لو $12 =$ لو 18
 فيكون $s = \frac{\text{لو } 18}{\text{لو } 12}$ وباستخدام الآلة الحاسبة:

$$\boxed{18} \boxed{\text{Log}} \boxed{\div} \boxed{12} \boxed{\text{Log}} = \rightarrow \boxed{1.1631712}$$

س $\approx 1,163$

(٢) بالطريقة نفسها نجد: $(2 + s + 1)$ لو $3 =$ لو 19
 $(2 + s + 1) = \frac{\text{لو } 19}{\text{لو } 3}$ وباستخدام الآلة الحاسبة
 $2 + s + 1 \approx 2,680$
 $2 + s = 1,680$
 $s = 0,840$

تمارين (٧ - ١١)

أوجد قيمة س :

$$(١) \quad ٢٩ = ٣س$$

$$(٢) \quad ٢٧٥ = ٤س$$

$$(٣) \quad ١٢٣ = ٣س + ١$$

$$(٤) \quad ٥س + ١ = ٣س - ٢$$

أوجد قيمة كل مما يلي :

$$(٥) \quad \sqrt[٣]{٠,٠٦٨٤}$$

$$(٦) \quad \sqrt[٥]{٠,١٦٣٤}$$

$$(٧) \quad (-١٣٢,٠)^٦$$

$$(٨) \quad -٥(٠,٠٢٤٥) - (٩) \quad -٤(٢٥,٤) \quad (١٠) \quad \frac{\sqrt[٣]{٤٩١} \cdot (٦٥,٨)}{٩٧}$$

أوجد قيمة كل مما يلي :

$$(١١) \quad \sqrt[٣]{\frac{٥(٦٤)}{٤(١٢٣)}}$$

$$(١٢) \quad \frac{\sqrt[٣]{٤٨٧} \cdot \sqrt[٣]{٢٦٤}}{\sqrt[٤]{٥٦,٣}}$$

$$(١٣) \quad \frac{(٢٨٤) \cdot (٠,٠٦٣)^٣}{\sqrt[٧]{٧٨٦}}$$

$$(١٤) \quad \sqrt[٣]{٢١٣,٥} \times (٤,٥٨١)^٤$$

(١٥) أوجد طول نصف قطر دائرة مساحتها ٦، ٤٥٧ سم^٢ ($\sqrt[٣]{١٤١٦} = ١١$)

(١٦) أوجد طول نصف قطرة كرة حجمها ٠٠٤، ٧ دسم^٣

(حجم الكرة التي نصف قطرها $\sqrt[٣]{٤}$ = $\sqrt[٣]{١٤١٦}$)

(١٧) احسب: ص = $(١,٠٦)^١٥ - (١,٠٢)^٨$ (قرّب الجواب إلى ٣ أرقام عشرية).

$$(١٨) \quad \text{احسب : } \frac{\sqrt[٣]{٠,٠٠٤٧} \cdot \sqrt[١]{(٢٨١)}}{\sqrt[٦]{(٧٨٤٠)}}$$

تمارين عامة على الباب السابع

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي دون استعمال الآلة الحاسبة أو الجداول :

$$= (1) (a + b)^2$$

$$(b) (a^2 + b^2 + 2ab)$$

$$(a) (a^2 + b^2)$$

$$(c) (a + b)(a - b)$$

$$(d) (a^2 + b^2 + a + b)$$

$$= \sqrt{2}$$

$$(b) a \cdot b$$

$$(a) a + b$$

$$(c) \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}$$

$$(d) \sqrt[3]{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{2}{5} - 1 (3)$$

$$(c) \frac{21}{41}$$

$$(d) \frac{1}{41\sqrt{2}}$$

$$(b) \frac{1}{21\sqrt{2}}$$

$$(a) 21 - 21$$

$$= \sqrt[3]{25, 3} (4)$$

$$(b) \frac{25, 3}{3}$$

$$(a) 3 \text{ لو } 25, 3$$

$$(c) \sqrt[3]{25, 3}$$

$$(d) \frac{1}{3} \text{ لو } 25, 3$$

$$= 27 \text{ لو } \frac{1}{3} (5)$$

$$(c) \sqrt[3]{27}$$

$$(d) 9$$

$$(b) \frac{27}{3}$$

$$(a) 3$$

$$= \text{لوس } 3 \text{ ص } (6)$$

$$(b) 3 \text{ لوس } + \text{ لوص}$$

$$(a) (\text{لوس})^3 + \text{لوص}$$

$$(c) 3 (\text{لوس}) (\text{لوص})$$

$$(d) 3 (\text{لوس} + \text{لوص})$$

$$(٧) \text{ إذا كان لوي } ٦٤ = ٦ \text{ فإن س} =$$

$$(أ) ١٢ \quad (ب) ٢ \quad (ج) \frac{٦٤}{٦} \quad (د) ٣$$

(٨) العبارة $٤٥ = ٦٢٥$ تكافئها العبارة اللوغاريتمية .

$$(أ) \text{ لوي } ٦٢٥ = ٥ \quad (ب) \text{ لوي } ٤ = ٦٢٥$$

$$(ج) \text{ لوي } ٦٢٥ = ٤ \quad (د) \text{ لوي } ٥ = ٦٢٥$$

$$(٩) \text{ إذا كان لوي } ٨,٥١٢ = ٠,٩٣٠٠ \text{ فإن لوي } ٠,٨٥١٢ =$$

$$(أ) ٦,٩٣٠٥ \quad (ب) ٠,٠٩٣٠٠ \quad (ج) ٩,٣٠٥ \quad (د) ١,٩٣٠٥$$

$$(١٠) \text{ إذا كان لوي } ٠,٣٠١٠ = ٢ \text{ و لوي } ٠,٤٧٧١ = ٣ \text{ فإن لوي } ١٢ =$$

$$(أ) ١,١٥٥٢ \quad (ب) ١,٠٧٩١ \quad (ج) ١,٥٩٦٢ \quad (د) ١,٠٧٩٢$$

حدّد العبارة الصحيحة والخاطئة واذكر السبب :

$$(١١) \text{ إذا كان } ٢ + \text{ لوي } ١,٣٦ = \text{ لوس فإن س} = ١٣٦$$

$$(١٢) \text{ لوي } \frac{١}{٦} = \frac{١}{٦} \div \text{ لوي } \frac{١}{٦}$$

$$(١٣) \text{ ب}^{-\frac{٣}{٤}} = \sqrt[٤]{\frac{١}{٦^{-٣}}}$$

$$(١٤) ٣٢ = ٨^٣ \leftarrow \text{ س} = \frac{٥}{٣}$$

$$(١٥) ٩١٠ \times ٦,٨ = ٦٨٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠$$

$$(١٦) \sqrt[٥]{٥} = \sqrt[٢]{٢} + \sqrt[٣]{٣}$$

$$(١٧) \sqrt[٥]{\frac{٣}{٥}} = \sqrt[٥]{٣} - \sqrt[٤]{\frac{٤}{٥}} + \sqrt[٢]{٢}$$

$$(١٨) ٠,٠٠٠٠٠٠٠٥٦ = ١٠^{-٧} \times ٥,٦$$

$$(19) \text{ لو } 2 = 44 \times \text{لو } 11 \quad (20) \text{ لو } 3 = 9 \Leftrightarrow \text{س} = 9$$

(21) اكتشف الخطأ في البرهان الآتي :

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\text{إذن } \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$$

$$\text{ومنه } 1 = \sqrt{(-1)^2} = -1 \text{ وبالتالي } 1 = -1$$

أثبت صحة ما يلي :

$$(22) \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a^3} \quad (23) \text{ لو } 2 = 2 \cdot \text{لو } 1 = 2 - \text{لو } 1$$

$$(24) \frac{1}{2} = \frac{-1 + 1}{-1 - 1} \quad (25) \text{ لو } 3 = 3 \cdot \text{لو } 1 = 3 - \text{لو } 1 = 2$$

(26) كتلتا الشمس والأرض على الترتيب: 99, 10³⁰ كغ، 97, 10²⁴ كغ

ومعدّل نصفي قطريهما 96, 6 × 10⁶ م، 38, 6 × 10⁶ م استفد من هذه

المعلومات لتبين أن كثافة الأرض أربعة أمثال كثافة الشمس تقريباً

(الكثافة = الكتلة ÷ الحجم).

حل المعادلات الآتية في \mathbb{Z} :

$$(27) 5\text{س} + 4\text{س} = 1 \quad (28) \text{لو } 3 + \text{لو } 2 = 1$$

$$(29) 2\text{لو } 3 - \text{لو } 2 = 2 \quad (30) \text{لو } 3 = 2\text{لو } 2 + 1\text{لو } 1 = 9$$

$$(31) \text{لو } 2\text{س} = 2\text{لو } 2 - 6\text{لو } 1 = 2 \quad (32) \text{لو } 2\text{س} = 0, 6415$$

$$(33) \text{لو } | \text{س} | = 2, 8910 \quad (34) 10 \text{ لو } (-2) = 3$$

أوجد قيمة كلٍّ من العبارات التالية :

$$(35) \quad 3^{\circ} \text{ لو } 5 \quad (36) \quad 9^{\circ} \text{ لو } 3 \quad (37) \quad 16^{\circ} \text{ لو } 3 \quad (38) \quad 3^{\circ} \text{ لو } (5^{\circ} + 2^{\circ})$$

إذا علمت أن لو 5 = 0,699 و لو 3 = 0,477 فأوجد :

$$(39) \quad \text{لو } 0,005 \quad (40) \quad \text{لو } 300000 \quad (41) \quad \text{لو } 0,25 \quad (42) \quad \text{لو } 4,5$$

(43) عيّن قيمة ب لكي يكون للمعادلة. $s^2 - 2\sqrt{2}s + 0 = 0$ جذران حقيقيان.

احسب كلاً مما يلي :

$$(44) \quad \sqrt[4]{1,635} \div \sqrt[4]{8,926} \quad (45) \quad \frac{\sqrt[4]{0,035 \times 1^{\circ}(3,712)}}{0,4568}$$

$$(46) \quad 1^{\circ}(3,821) - 1^{\circ}(0,062) \quad (47) \quad \frac{1^{\circ}(0,2765) \times 1^{\circ}(0,19)}{0,0567\sqrt[3]{}}$$

$$(48) \quad \frac{1^{\circ}(4,15) \times \sqrt[4]{0,00436}}{0,0043\sqrt[4]{} \times 1^{\circ}(6,5)}$$

الباب الثامن

الإحصاء

٨ - ١ مقدمة .

٨ - ٢ جمع البيانات .

٨ - ٣ التوزيعات والجداول التكرارية .

٨ - ٤ التمثيل البياني للجداول التكرارية .

٨ - ٥ المتوسطات .

٨ - ٦ الإنحراف المعياري .

٨ - مقدمة :

تزداد حاجتنا إلى عرض المعلومات بأسلوب البيانات الإحصائية عند دراسة العديد من الظواهر الكونية (أو التجريبية) مثل كميات الأمطار الشهرية أو السنوية التي يُمْن الله بها على عباده في منطقة ما، أو التغيُّر في أسعار الذهب أو البترول أو أية قياسات معملية أخرى غير معلومة النتائج مسبقاً. نستخدم الأسلوب الإحصائي لمعرفة سنن الله في خلقه والتدبر فيها مثل دراسة الظواهر الاجتماعية كالزواج والطلاق أو عند دراسة التغيرات التربوية، أو النفسية في مجتمع ما .

وقد عُرِفَ الإحصاء على أنه العلم الخاص بالدولة ، وذلك لاقتصار استخدامه في الأزمنة القديمة على الحكومات والتي كانت تهدف من جمع الإحصاءات السكانية أو الاقتصادية، في الغالب لمعرفة قدرتها على خوض الحروب أو كمية الضرائب التي يمكن جمعها، مثل إحصائيات قدماء المصريين من الفراعنة، وإحصاء السكان في اليونان في عام ٥٩٠ قبل الميلاد تقريباً.

يقال بأن لفظي : « إحصاء » و« يحصي » مشتقان من كلمة « الحصى » لأن الإنسان القديم استخدم الحصى في العد والحساب البدائي . وقد ورد ذكر الإحصاء في كتاب الله عز وجل في إحدى عشرة آية، تُذَكِّرُ الإنسان بعجزه وقصوره عن التوصل إلى إحصاء أمور كثيرة كقوله تعالى : ﴿ وَالْحَاطِدِ إِيمَانُ لَهُمْ وَأَحْصَى كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا ﴾ (سورة الجن، الآية ٢٨) - وقوله جَلَّ مِنْ قَائِلٍ : ﴿ وَإِنْ تَعَدُّوا نِعْمَةَ اللَّهِ لَا تُحْصَوْهَا ﴾ - سورتي النحل آية ١٨ وإبراهيم آية ٣٤) .

كما تُذَكِّرُ هذه الآيات البيئات الإنسان أن أعماله محصاة عليه ﴿ وَوَضِعَ الْكِتَابَ فَتَرَى الْمُجْرِمِينَ مُسْتَفْضِينَ وَمَا فِيهِمْ وَيَقُولُونَ يَا وَيْلَتَنَا مَا لَ هَذَا الْكِتَابِ لَا يَغَادِرُ صَغِيرَةً وَلَا كَبِيرَةً إِلَّا أَحْصَاهَا ﴾ - (سورة الكهف، الآية ٤٩) - وأن الإنسان إن نسي ما قَدَّمت يده فإن الله تعالى قد أحصاه ﴿ يَوْمَ يَبْعَثُهُمُ اللَّهُ جَمِيعًا فَبُنِيَ لَهُمْ رِيعًا عَمَلُوا أَحْصَاهُ اللَّهُ وَنَسُوا اللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَيْءٍ مُّشْهِدٌ ﴾ (سورة المجادلة ، الآية ٦) - .

فالإحصاء ليس غريباً علينا إذن ، نحن المسلمين، وليس بدءاً بالنسبة لنا الاستفادة من علم الإحصاء في بناء مجتمعنا وتمميته والعمل على سد احتياجاته، وعلى تقدّمه وازدهاره، إذ أنّ إجراء الإحصاءات واتباع الأساليب الإحصائية، وجمع المعلومات ، بهدف اتخاذ القرارات بدأت بوقت مبكر منذ بدء بناء المجتمع الإسلامي وتأسيس دولة الإسلام الحنيف، نورد فيما يلي الحوادث الآتية على سبيل المثال لا الحصر:

عن حذيفة بن اليمان رضي الله تعالى عنه ، قال : « كنا مع رسول الله صلى الله عليه وسلم فقال : أحصوا لي كم يلفظ بالإسلام، قال : فقلنا يا رسول الله أتخاف علينا ونحن بين الستمئة والسبعمئة؟ ، قال : إنكم لا تدرّون لعلكم تُبتلوا، قال : فابتلينا، حتي جعل الرجل لا يصلي إلا سرّاً» .

يلفظ الإسلام أي ينطق به - رواه مسلم / باب ٦٧ .

وفي غزوة بدر الكبرى، عندما وجد المسلمون رجلين يسقيان لقريش سألهما رسول الله صلى الله عليه وسلم : أخبراني عن قريش، قالوا : هم والله وراء هذا الكئيب الذي ترى بالعدوة القصوى فقال لهما رسول الله صلى الله عليه وسلم : كم القوم؟ قالوا : كثير ، قال : ما عدّتهم؟ قالوا : لا ندري، قال : كم ينحرون كل يوم، قالوا : يوماً تسعاً ويوماً عشراً، فقال رسول الله صلى الله عليه وسلم : « القوم بين التسعمئة والألف » .

فاتّبع صلى الله عليه وسلم هذا الأسلوب لإحصاء جُند العدو، ليكون المسلمون على بينة من الأمر . وعندما أراد الفاروق عمر رضي الله تعالى عنه، إبّان خلافته تقدير ما يجب عليه أن يفرض للمسلمين، جمع ستين مسكيناً وأطعمهم الخبز، فأحصوا ما أكلوا فوجدوه يخرج من جريبين ، ففرض لكل إنسان منهم ولعياله جريبين في الشهر ، لأنّ الجريبين تكفي ستين أكلةً ، فكأنه قدر لكل إنسان أكلتين في اليوم . كما أمر رضي الله تعالى عنه، بكتابة أسماء الناس في قوائم حسب أسبقيتهم للإسلام .

وعندما دخلت العراق نطاق الخلافة الإسلامية، قيست مساحات الأراضي الصالحة للزراعة، وجرى تعيينها حسب ملاكها وما تُنتجُه من محاصيل، كما تم ذلك بالنسبة للأراضي الزراعية في بلاد الشام ومصر .

وفي أيام الخليفة الزاهد عمر بن عبد العزيز، جرى إحصاء للفقراء والمعاقين في الدولة الإسلامية المترامية الأطراف، لدفع رواتب منتظمة لهم من بيت مال المسلمين .

هذا وإن للإحصاء أهمية في مجتمعنا المعاصر، وذلك بهدف اتخاذ القرارات السليمة المبنية على نتائج ما تقدّمه الدراسات الإحصائية .

ومع تقدم الحضارة الإنسانية تعددت استخدامات الإحصاء لتشمل مجالات متعدّدة من النشاطات الإنسانية، كالصحة والصناعة والتجارة والتجارة والتنمية . كما استخدمت كثير من المؤسسات، حتى غير الحكومية، الحديثة الإحصائيين لإعداد الدراسات والبحوث لتوضيح مقدار الخدمات التي تقوم بها ومدى أهميتها، وكذلك التخطيط للتوسع في الخدمات التي تقدمها أو لترشيدها .

من أجل ذلك كله قامت حكومة خادم الحرمين الشريفين بالتعداد (أي الإحصاء) العام للسكان والمساكن خلال النصف الأول من شهر ربيع الآخر عام ١٤١٣هـ.

ولتوضيح أهمية الإحصاء، سنورد فيما يلي بعض مجالات النشاطات الإنسانية والتي كان للإحصاء وأساليبه دور في دور في دراسة بعض مظاهرها وبالتالي تطورها :

التعليم :

يساعد الإحصاء في إبراز النهضة التعليمية وفي توضيح الوضع التعليمي ومدى توافر بعض عناصر العملية التعليمية مثل أعداد المدارس في مختلف المراحل، أو العاملين فيها، أو مستوياتهم، أو العوامل المساعدة كالمباني والمعامل والكتب، أو الحاجة إلى دعم بعضها .

السكان :

يُستخدم الإحصاء في تقدير أعداد السكان وكيفية إجراء التعداد وكذلك تصنيف السكان حسب العمر والجنس والحالة الاجتماعية وحساب معدلات المواليد والهجرة والوفيات .

الطب :

يفيد الإحصاء العاملين في العلوم الطبية في دراسته انتشار الأمراض وتصنيفها ومقارنة ذلك بين المدن، أو الدول المختلفة، كما يعتمد بعض الأطباء على الأساليب الإحصائية في دراسة مدى فائدة عقار ما أو مقارنته بعقار آخر .

وهكذا بالنسبة للبحوث الطبية المختلفة، فعندما يضع الطبيب، مثلاً، في فم المريض ميزان الحرارة، يعلم مسبقاً أن درجة الحرارة للإنسان السليم من الأمراض هي حوالي ٣٧°، هكذا خلقه الله تعالى فسوّاه فعَدَلَه، في أي صورةٍ ما شاء رَكَّبَه، إن هذه الدرجة ٣٧° توَصَّلَ إليها العلماء الباحثون نتيجة لعملٍ إحصائي طبقوه على الملايين من البشر .

وما يقال عن درجة حرارة الإنسان السليم، يقال عن ضغط الدم، عن النبض، والسكر في الدم، والدُّسُم (الكوليسترول) في الدم، وغير ذلك.

الزراعة :

أصبح للإحصاء دور هام في تصميم التجارب الزراعية والمقارنة بين الأسمدة، أو العوامل البيئية الأخرى كالترية، ودرجة الحرارة .

مجالات أخرى :

يكثر استخدام الأساليب الإحصائية في دراسة كثير من الظواهر المختلفة في العلوم الأساسية كالفيزياء، والكيمياء، والجيولوجيا، والأحياء، والعلوم الإدارية مثل إدارة الأعمال، والمحاسبة والاقتصاد، والعلوم الإنسانية مثل علم الاجتماع، وعلم النفس، والعلوم العسكرية وغيرها.

من هذه المقدمة نستطيع تعريف الإحصاء بأنه الأسلوب العلمي للبحث الذي يهتم بدراسة ظاهرة كونية أو تجريبية ما وذلك عن طريق جمع البيانات اللازمة عنها، وتصنيفها، وعرضها جدولياً أو بيانياً، وتلخيصها، بغرض تفسير الظاهرة المدروسة واستنتاج أو تقدير العلاقات الرياضية التي تحكم تصرفها لاتخاذ القرار المناسب بشأن أي من هذه الظواهر.

والجدير بالذكر أنه مهما بلغ الإنسان من دقة ودراية، فإن النتائج التي يتوصل إليها غالباً ما تكون مقرّبة، خاصة عندما تكون القضية التي يقوم بدراستها تتعلق بمجموعة كبيرة جداً، مما يضطره للاكتفاء بعينة (أي مجموعة صغيرة نسبياً) تؤخذ عشوائياً، وتعتبر ممثلة للمجموعة الكبيرة، موضوع الدراسة.

خطوات الدراسة الإحصائية :

- يمكن تلخيص خطوات الدراسة الإحصائية بما يلي :
- أولاً : تحديد المشكلة (أو هدف البحث) بدقة .
- ثانياً : جمع البيانات اللازمة لدراسة المشكلة بعناية.
- ثالثاً : عرض البيانات ملخّصة بالطرق الجدولية، أو البيانية المناسبة.
- رابعاً : اختصار البيانات بحساب بعض المتوسطات أو خلافاً .
- خامساً : استنتاج أسباب المشكلة أو مقارنتها مع غيرها أو اقتراح حلول لها .

٨ - ٢ جمع البيانات

ذكرنا أنه لا بد من تحديد الهدف أو المشكلة المراد دراستها أولاً، بعد ذلك ننتقل إلى المرحلة الثانية من خطوات الدراسة الإحصائية وهي جمع البيانات الإحصائية.

تعريف (٨ - ١) :

البيانات الإحصائية عبارة عن معلومات كميّة (رقمية) أو كفيّة (وصفية) صحيحة ودقيقة تُجمع من مصادر محدّدة وبطريقة سليمة.

تعريف (٨ - ٢) :

المجتمع الإحصائي هو مجموعة المفردات التي يجمعها إطار عام واحد أو مجموعة خصائص عامة واحدة.

فالمجتمع الإحصائي، على سبيل المثال، في دراسة أعمار الطلاب في الصف الأول في مدرسة ثانوية، والمكون من ٢٥ طالباً، هو مجموعة الطلاب الذين نبحت عن أعمارهم.

مصادر جمع البيانات :

تنقسم مصادر جمع البيانات اللازمة لأية دراسة إحصائية إلى نوعين : مصادر تاريخية ومصادر ميدانية. وفيما يلي عرض موجز لكل منها.

أولاً : المصادر التاريخية :

يجب أن تسبق عملية جمع البيانات دراسة وافية عن إمكانية توفر بعض أو كل البيانات ، المطلوب جمعها، في الكتب الإحصائية السنوية مثل نشرات مصلحة الإحصاءات العامة بوزارة المالية والاقتصاد الوطني، والكتاب السنوي لإحصاءات التعليم الذي تصدره وزارة التربية والتعليم، والكتاب الإحصائي لوزارة الداخلية، أو إنجازات التنمية التي تصدرها وزارة التخطيط، والتي قد يكون جمع بياناتها لأسباب أخرى، قد تختلف عن أهداف الدراسة الإحصائية المقصودة ، وتسمى بالمصادر التاريخية. ويساعد استخدام هذه المصادر في توفير الوقت والجهد البشري والتكاليف المادية.

ثانياً : المصادر الميدانية :

أما في حالة عدم توافر البيانات الإحصائية في المصادر التاريخية، فلا بد من اتباع أسلوب جمع البيانات من الميدان أو حقل الدراسة وذلك عن طريق إعداد «بطاقة (استمارة) إحصائية » أو استبانة تتضمن مجموعة من الأسئلة والاستفسارات معروضة بطريقة مناسبة.

وتُجمع البيانات من المصادر الميدانية بعدة طرق منها :

أ- المقابلة الشخصية :

تتلخص هذه الطريقة في قيام صاحب الدراسة بمقابلة أفراد المجتمع المراد دراسته، وتوجيه الأسئلة الواردة من البطاقة الإحصائية لكل فرد، وتسجيل إجابته عليها. تُفضّل هذه الطريقة في

المجتمعات (الإحصائية) التي تكثر الأمية بين أفرادها وتتميز بدقة المعلومات الواردة فيها. لكنها ربما تستغرق جهداً وتكاليف مادية كبيرة.

ب - المراسلة (بالبريد) :

يقوم المسؤول عن الدراسة بإرسال البطاقة الخاصة بذلك مع إرفاق تعليمات بكيفية تعبئتها وإعادتها عن طريق البريد. وقد يُرفق مع البطاقة ظرف بريدي عليه طابع. ويجب أن تتوافر لدى الباحث، في هذه الحالة، العناوين البريدية للأفراد المراد دراستهم وكذلك وجود خدمات بريدية جيدة قد يستغرق الحصول على البطاقة وقتاً طويلاً وربما احتاج الأمر إلى تذكير بعض أفراد البحث مرة أخرى، وفي الغالب لا يستطيع الباحث الحصول على جميع البطاقات المرسلة .

ج - الهاتف :

يقوم الباحث، في هذه الحالة، بالاتصال هاتفياً بأفراد المجتمع المطلوب دراسته، وتسجيل الأجوبة في البطاقة الإحصائية المعدة لذلك. تتميز هذه الطريقة بتوفير الوقت والجهد اللازمين للانتقال من مكان لآخر. ولكن ينحصر استخدام هذه الطريقة على بعض فئات المجتمع الذين يُتوقع أن لديهم هواتف ويمكن الحصول عليها بيسرٍ مثل عيادات الأطباء، والصيديات والمهندسين في قطاع حكومي معيّن .

أسلوب جمع البيانات :

يتم جمع البيانات بأحد الأسلوبين التاليين :

أولاً : الحصر الشامل :

ويكون فيه جمع البيانات من جميع أفراد ومجتمع الدراسة. ويُستخدم في حالة كون المجتمع صغيراً مثل طلاب مدرسة ثانوية أو في حالة تباعد الأزمنة التي تجري فيها الدراسة كالتعداد الشامل للسكان والذي يُفضّل إجراؤه كلَّ عشر سنوات. ويمتاز الحصر الشامل في إعطاء الباحث صورة كاملة عن مجتمع الدراسة . ومن عيوبه، تكاليفه الباهظة، وطول الوقت اللازم لإجرائه وخاصة في المجتمعات ذات الكثافة السكانية الكبيرة .

ثانياً: العيّنات :

تعريف (٨ - ٣) :

العيّنة جزء من المجتمع يُختار بطريقة مناسبة ويمثّل جميع خصائص ذلك المجتمع بصدق.

يكتفي الباحث في أسلوب جمع العيّنات بدراسة جزء أو مجموعة من مجتمع الدراسة يمكن عن طريقها تعميم الدراسة وتنتائجها على كل المجتمع. ويُستخدم أسلوب العيّنات في دراسة المجتمعات الكبيرة جداً والتي يشار إليها بأنها غير محدودة، كما يساعد في توفير الجهود والتكاليف وتكون العيّنة أحياناً هي الأسلوب الوحيد لدراسة مجتمع ما. فلو أردنا معرفة عدد كريات الدم الحمراء في المليمتر المكعب لمجموعة من المرضى؛ عندئذٍ يستحيل استخدام أسلوب الحصر الشامل لكل دم المريض، حيث نلجأ في هذه الحالة إلى أخذ عينة أو كمية صغيرة من الدم وفحصها.

ويلاحظ أن اختيار العيّنة بطريقة غير مناسبة، يعني أن العيّنة لا تمثل المجتمع المسحوبة منه تمثيلاً صادقاً؛ مثل التعرف على متوسط دخل الأسرة في مدينة الرياض بدراسة دخل مجموعة أسر من أحد الأحياء الشعبية فيها، فمثل هذه الخطأ يؤدي إلى عدم سلامة النتائج، وبالتالي خطأ القرارات التي نعلم عليها.

أنواع العيّنات :

تتبع عدة طرق لسحب العيّنة من مجتمع الدراسة، وذلك حسب طبيعة المجتمع ونوعيّة الدراسة، ونورد فيما يلي أهم أنواع العيّنات وأكثرها شيوعاً :

أ- العيّنة العشوائية :

وهي الطريقة التي تختار بها العينة بحيث تكون فرص ظهور أي من عناصر (مفردات) المجتمع فيها متساوية. ويُعرف الأسلوب العشوائي عند عامة الناس بالقرعة. حيث تُكتب، مثلاً، أسماء أفراد المجتمع أو أرقامها ومن ثم يُسحب العدد المناسب منها لإجراء الدراسة عليه.

ب- العينة العمدية أو الفرضية :

ويكون فيها اختيار العيّنة بطريقة تناسب أهداف البحث بحيث تتوافر في كل عنصر من عناصر العيّنة شروط محددة يرى الباحث أنها تساعد على الوصول إلى نتائج أفضل في دراسته؛ مثلاً عند رغبتنا في معرفة مدى استيعاب الطلاب لموضوع ما في الرياضيات يجب أن نحلل نتائج الامتحان في ذلك الموضوع لطلاب سبق لهم دراسة المنهج نفسه أو الذين درسوا المنهج الذي سيتم تعميمه على بقية المدارس وهكذا. ولا يُعتبر هذا الاختيار عشوائياً.

ج- العيّنة الطبقيّة :

تعتمد أحياناً الإحصائية على بعض الصفات كالعمر والجنس والسكن فيقسم المجتمع الإحصائي إلى مجموعات تبعاً للصفات المكوّنة له وتسمى كل مجموعة طبقة، ويختار الباحث عيّنة عشوائية من كل طبقة، مثلاً عند دراسة المستوى التعليمي لمجتمع ما مكوّن من ٣٠٠ شخص بحيث كانت نسبة الذكور إلى الإناث ٢ : ٣ وأردنا اختيار عيّنة من ٥٠ شخصاً فلا بد أن نختار ٢٠ شخصاً من (طبقة) الذكور و٣٠ من (طبقة) الإناث بطريقة العيّنة العشوائية.

تمارين (٨ - ١)

- (١) عرّف الإحصاء، واذكر بعض مجالات استخدامه.
- (٢) اذكر بعض الإحصاءات التي قام بها المسلمون.
- (٣) تحدث عن الفائدة من دراسة الإحصاء وما هي خطوات الدراسة الإحصائية .
- (٤) ماذا يُقصد بالمصادر التاريخية والمصادر الميدانية للبيانات ؟
- (٥) اذكر أهم طرق جمع البيانات من المصادر الميدانية مبيّناً مزايا وعيوب كل منها .
- (٦) قارن بين أسلوبَي الحصر الشامل والعَيّنات من حيث الدقة والوقت والمال اللازم لإجراء كلٍّ منهما.
- (٧) اذكر أهم العَيّنات الإحصائية وكيفية الحصول عليها .

٨ - ٣ التوزيعات والجداول التكرارية :

بعد جمع البيانات في نماذج إحصائية، نصل بذلك إلى مرحلة مهمة من خطوات العملية الإحصائية وهي وضع البيانات الإحصائية في جداول لتبسيط دراستها ومن ثم التعرّف علي الخصائص الرئيسية لها. وسنعرض فيما يلي كيفية وضع البيانات الإحصائية في جداول حسب طبيعة البيانات الوصفية أو الكميّة والجداول التكرارية المتجمعة للبيانات الكميّة .

أولاً : البيانات الوصفية (أو النوعية) :

وهي البيانات التي لا يمكن التعبير عن مفرداتها بأرقام عددية مثل الصفات، كالحالة الإجتماعية (لم يتزوج بعد - متزوج - مطّلق - أرمل) والحالة التعليمية (أمي - يقرأ ويكتب فقط - يحمل مؤهلاً ثانوياً - يحمل مؤهلاً جامعياً أو أكثر) ، والتقدير في الامتحان (راسب - مقبول - جيد - جيد جداً - ممتاز) .

نضع هذه البيانات في جداول تكرارية وذلك بحصر الصفات التي تشملها هذه البيانات وإيجاد عدد المفردات المناظرة لكل صفة من هذه الصفات .

مثال (٨-١) :

تُمثّل البيانات التالية تقديرات ٤٠ طالباً من الامتحان النهائي في الصف الأول الثانوي من المدرسة أ .

جدول (٨ - ١)

جيد	جيد	ممتاز	ممتاز	راسب	جيد جداً	جيد
جيد	مقبول	جيد	جيد جداً	راسب	مقبول	جيد جداً
جيد	جيد	جيد جداً	جيد	مقبول	جيد	مقبول
ممتاز	جيد	ممتاز	جيد جداً	راسب	جيد	ممتاز
مقبول	راسب	راسب	جيد	جيد جداً	راسب	جيد جداً
		جيد	جيد	جيد	جيد جداً	جيد

جدول تقديرات الطلاب

وسوف نقوم بتفريغ هذه البيانات في جدول تكراري ، وتتلخص طريقة ذلك فيما يلي :

أولاً : نرسم جدولاً لتفريغ البيانات من ثلاثة أعمدة، يحتوي العمود الأول على الصفات، أو التقديرات في مثالنا الحالي، ويحتوي العمود الثاني على العلامات ، أما العمود الثالث فيحتوي على عدد المفردات التي تحمل تلك الصفة ، أي عدد الطلاب الذين نجحوا بتقدير ممتاز أو جيد جداً ... ، وهي عدد العلامات في الصف المناظر من العمود الثاني كما في الجدول (٨ - ٢).

ثانياً : نقوم بتفريغ الجدول (٨-١) في الجدول (٨-٢) وذلك بأن نقرأ الصفات الموجودة في الجدول (٨-١) ، وليكن ذلك أفقياً مثلاً، فنضع خطأً مائلاً (/) أمام أية صفة كلما ظهرت، وفي حالة الحصول على أربعة خطوط (////) فإننا نضع الخط الخامس في الاتجاه الآخر (/////) عند ظهور تلك الصفة للمرة الخامسة.

جدول (٨ - ٢)

التقدير	العلامات	التكرار (عدد الطلاب)
ممتاز	////	٥
جيد جداً	////	٨
جيد	//// /	١٦
مقبول	////	٥
راسب	//// /	٦
المجموع	————	٤٠

جدول التفرغ

ثالثاً : نضع عدد العلامات أمام كل تقدير في العمود الثالث والتي تسمى بالتكرارات، ويجب ملاحظة أن يكون مجموع تكرارات التقدير مساوياً لعدد مفردات بيانات الجدول (٨ - ١) .

رابعاً : للحصول على التوزيع التكراري أو اختصاراً الجدول التكراري لبيانات الجدول (٨ - ١) ، نأخذ العمودين الأول والأخير من الجدول (٨ - ٢) فنحصل على الجدول (٨ - ٣) .

جدول (٨ - ٣)

التقدير	التكرار (عدد الطلاب)
ممتاز	٥
جيد جداً	٨
جيد	١٦
مقبول	٥
راسب	٦
المجموع	٤٠

الجدول التكراري «أ»

مثال (٢-٨) :

إذا كانت نتيجة الامتحان النهائي لمجموعة مكوّنة من ثلاثين طالباً من الصف الأول الثانوي في المدرسة ب هي كما في الجدول التكراري (٤٨-٤) .

جدول (٤ - ٨)

التقدير	التكرار (عدد الطلاب)
ممتاز	٣
جيد جداً	٦
جيد	١٠
مقبول	٦
راسب	٥
المجموع	٣٠

الجدول التكراري «ب»

فمن الواضح أنه لا يمكن المقارنة بين نتائج المدرستين **أ** ، **ب** عن طريق الجداول التكرارية، لذلك نلجأ إلى إنشاء جدول التوزيع التكراري النسبي أو جدول التكرار النسبي .

تعريف (٤ - ٨) :

التكرار النسبي لأي صفة هو تكرار تلك الصفة مقسوماً على مجموع التكرارات.

نعمل الآن الجدول التكراري النسبي للتقديرات في المدرستين **أ** ، **ب** وذلك بإضافة عمود ثالث للجدول التكراري يكون عنوانه التكرار النسبي. كما يمكن إضافة رابع للتكرار المئوي كما في الجدولين (٥ - ٨) و (٦ - ٨) .

تعريف (٨ - ٥):

التكرار المئوي لأي صفة هو التكرار النسبي لتلك الصفة مضروباً في ١٠٠.

جدول (٨ - ٦)

التكرار النسبي	التكرار المئوي	التقدير
٠,١	١٠	ممتاز
٠,٢	٢٠	جيد جداً
٠,٣٣	٣٣	جيد
٠,٢	٢٠	مقبول
٠,١٧	١٧	راسب
١,٠٠	١٠٠	المجموع

الجدول التكراري والنسبي «ب»

جدول (٨ - ٥)

التكرار النسبي	التكرار المئوي	التقدير
٠,١٢٥	١٢,٥	ممتاز
٠,٢	٢٠	جيد جداً
٠,٤	٤٠	جيد
٠,١٢٥	١٢,٥	مقبول
٠,١٥	١٥	راسب
١,٠٠٠	١٠٠	المجموع

الجدول التكراري والنسبي «أ»

ومن ذلك يمكن المقارنة مثلاً، بين نتائج المدرستين بأن ٢٠٪ من طلاب المدرستين حصلوا على تقدير جيد جداً، بينما كانت نسبة الرسوب في المدرسة ب ١٧٪ أكبر من نسبة الرسوب في المدرسة أ والتي تساوي ١٥٪.

ثانياً: البيانات الكميّة (العددية):

وهي البيانات التي يمكن التعبير عن مفرداتها بقيم عددية مثل درجة الطالب في الامتحان، أو السن، أو الدخل، و عدد أفراد الأسرة أو أعداد الطلاب في كل فصل دراسي، ... إلخ.

وهنا نلاحظ نوعين من البيانات: مستمرة مثل درجات حرارة الجو التي قد

تأخذ أي قيمة صحيحة أو حقيقية. وقد تكون البيانات متقطعة كعدد أفراد أسرة والذي يتكون مثلاً، من ٢ أو ٣ أو ٤، وهكذا.. ولوضع البيانات الكمية في جداول التوزيع التكراري، تقسم البيانات إلى فترات (مجالات) متساوية الطول عادة، تسمى فئات. ونضع العلامة الناتجة من أي مفردة أمام الفئة التي تقع فيها قيمة تلك القراءة. ولتحديد طول الفئة يجب مراعاة ما يلي:

أولاً: تحديد المدى الذي تنتشر فيه البيانات.

ثانياً: اختيار عدد مناسب من الفئات بين ٦ إلى ١٢ فئة.

ثالثاً: يجب ألا يكون طول الفئة صغيراً جداً حيث يفضل أن تحتوي الفئة على

ملا يقل عن خمس مفردات حتى لا تفقد معنى تلخيص البيانات.

رابعاً: يجب ألا يكون طول الفئة كبيراً جداً فنحصل على عدد قليل من الفئات

لا تعبر عن خصائص انتشار البيانات.

مثال (٨-٣):

البيانات التالية تمثل الأجر اليومي لثمانين عاملاً في أحد المصانع بالريال.

جدول (٨ - ٧)

٩١	٦٣	٦٠	٥٠	٨٢	٥١	٦١	٨٩	٧٢	٥٥
٧٧	١٠٠	٨٤	٧٤	١٠٢	٧٥	٨٣	٨٩	٨١	٨٢
٧١	٦٣	٨٦	٧٥	٨٥	٨١	٧١	٥٩	٦١	١٠٥
٨٨	٨٩	٩٠	٨١	٥٨	٨٥	٨٠	٨١	٦٥	٨١
١١٩	٦٩	١١٢	٥١	٧٧	١١٨	٧٥	٩٩	١٠١	٩١
٩٥	٦٦	٨٢	٧٣	٨٥	٨١	٨٣	٥٦	١٠٩	٧٨
٦٧	١٠٢	١١٧	٦٥	٦٦	١١٥	٨٤	٥٦	١١٢	١٠٧
٨٧	٦٥	١٠٦	٧٤	٧٢	٩٦	٨٨	٧٥	٩٥	٩١

جدول أجور العمال اليومية

لإيجاد جدول تفريغ البيانات نَتَّبَع الخطوات التالية :
 أولاً : نُحدِّد المدى المطلق للبيانات وهو الفرق بين أكبر قراءة وأصغر قراءة،
 وفي مثالنا الحالي :

$$\text{المدى المطلق} = 119 - 50 = 69 \text{ ريالاً}$$

ثانياً : نختار طولاً مناسباً بمراعاة الشروط السابقة وفي هذا المثال أنسب طول
 للفئة هو ١٠ ريالات وبالتالي سيكون لدينا سبع فئات متساوية الطول .
 الفئة الأولى : تشمل الأجور من ٥٠ إلى ٥٩ وتكتب ٥٠ - ٥٩ ،
 وتشمل الفئة الثانية : الأجور من ٦٠ إلى ٦٩ وتكتب ٦٠ - ٦٩ أو ٦٠ - ،
 ونستمر على الأسلوب نفسه حتى نصل إلى الفئة الأخيرة التي تشمل الأجور
 من ١١٠ إلى ١١٩ ونكتب ١١٠ - ١١٩ أو ١١٠ - .
 والطريقة الثانية لكتابة حدود الفئات بالصورة :

$$50 - , 60 - , \dots , 110 -$$

تعني أن الفئة الأولى تحتوي على الأجور من ٥٠ إلى أقل من ٦٠ أي أن الأجر
 ٥٩,٧ ريالاً مثلاً يقع في الفئة الأولى .
 أما الطريقة الأولى، فتستخدم لكتابة الفئات إذا كانت الأجور مقربة لأقرب عدد
 صحيح وهي :

$$50 - 59 , 60 - 69 , \dots , 110 - 119$$

وفي مثل هذه الحالة فإن الأجر ٥٩,٧ ريالاً مثلاً يقع في الفئة الثانية. والأجر
 ٥٩,٢ يقع في الفئة الأولى وهذه الطريقة تعني أن الحدود الفعلية للفئات هي
 $49,5 \leq \text{س} < 59,5$ ، $59,5 \leq \text{س} < 69,5$ ، ، $109,5 \leq \text{س} < 119,5$.
 ثالثاً : نكوّن جدول تفريغ بثلاثة أعمدة وهي على التوالي عمود الفئات، حسب
 الطريقة الأولى لكتابة الفئات، عمود العلامات، وأخيراً عمود التكرارات
 أو عدد العمّال في كل فئة.

جدول (٨ - ٨)

التكرار (عدد العمال)	العلامات	فئات أجور العمال بالريال
٨	/// ###	- ٥٠
١٢	// ### ###	- ٦٠
١٤	//// ### ###	- ٧٠
٢٤	//// ### ### ###	- ٨٠
٨	/// ###	- ٩٠
٨	/// ###	- ١٠٠
٦	/ ###	- ١١٠
٨٠	—————	المجموع

جدول تفريغ أجور العمال

ويمكن عمل الجدول التكراري وكذلك الجدول التكراري النسبي والمئوي كما في البيانات الوصفية غير أننا نستبدل الصفات في هذه الحالة بمجموعة من الفئات العددية وبذلك نحصل على الجدولين (٨ - ٩) و (٨ - ١٠).

جدول (٨ - ١٠)

التكرار المئوي	التكرار النسبي	الفئات
١٠	٠,١	- ٥٠
١٥	٠,١٥	- ٦٠
١٧,٥	٠,١٧٥	- ٧٠
٣٠	٠,٣	- ٨٠
١٠	٠,١	- ٩٠
١٠	٠,١	- ١٠٠
٧,٥	٠,٠٧٥	- ١١٠
١٠٠	١,٠٠	المجموع

الجدول التكراري النسبي والمئوي

جدول (٨ - ٩)

التكرار	الفئات
٨	- ٥٠
١٢	- ٦٠
١٤	- ٧٠
٢٤	- ٨٠
٨	- ٩٠
٨	- ١٠٠
٦	- ١١٠
٨٠	المجموع

الجدول التكراري

نلاحظ بعد توزيع مفردات البيانات على الفئات في الجدول التكراري السابق، أنه لا يمكن معرفة القيم الأصلية للمفردات وكل ما يمكن الوصول إليه هو عدد القراءات التي تقع في تلك الفئة، مثلاً أجور ٨ عمال من المصنع تقع في الفئة الأولى وأجور ١٢ عاملاً تقع في الفئة الثانية .. وهكذا .

ثالثاً: الجداول التكرارية المتجمعة :

يوجد نوعان من الجداول التكرارية المتجمعة وهما الجدول المتجمّع الصاعد والجدول المتجمّع النازل.

لو كان المطلوب في الدراسة الإحصائية معرفة عدد العمال الذين يتقاضون أقل من ٧٠ ريالاً من مجموعة العمال محل الدراسة، يكون عددهم $٨ + ١٢ = ٢٠$ عاملاً. كما قد يكون المطلوب معرفة عدد العمال الذين يتقاضون أجراً يومياً أقل من ٨٠ ريالاً، فيكون عددهم $٨ + ١٢ + ١٤ = ٣٤$ عاملاً. يسمى الجدول الذي يحتوي على أعداد العمال الذين يتقاضون أقل من الحدود العليا للفئات بالجدول المتجمّع الصاعد. أما الجدول الذي يحتوي على أعداد العمال الذين يتقاضون أكبر من الحدود الدنيا للفئات فيسمى بالجدول المتجمّع النازل كما هو واضح في الجدولين (٨ - ١١)، (٨ - ١٢) .

جدول (٨ - ١٢)

التكرار	حدود الفئات الدنيا
٨٠	٥٠ فأكثر
٧٢	٦٠ فأكثر
٦٠	٧٠ فأكثر
٤٦	٨٠ فأكثر
٢٢	٩٠ فأكثر
١٤	١٠٠ فأكثر
٦	١١٠ فأكثر

الجدول المتجمّع النازل

جدول (٨ - ١١)

التكرار	حدود الفئات العليا
٨	أقل من ٦٠
٢٠	أقل من ٧٠
٣٤	أقل من ٨٠
٥٨	أقل من ٩٠
٦٦	أقل من ١٠٠
٧٤	أقل من ١١٠
٨٠	أقل من ١٢٠

الجدول المتجمّع الصاعد

٨ - ٤ التمثيل البياني للجداول التكرارية :

تعلمنا فيما سبق كيفية تنظيم وتلخيص البيانات الإحصائية بواسطة جداول تكرارية مختلفة. وسندرس الآن كيفية تمثيل الجداول السابقة بيانياً. وهدف التمثيل البياني تبسيط عرض البيانات وكيفية توزيعها بسرعة أكثر .
ومن أهم طرق عرض البيانات التي ستعرض لها هي :
١ - الأعمدة البيانية .
٢ - المدرج التكراري .
٣ - المضلع التكراري .
٤ - المنحني التكراري .
٥ - المنحنيات المتجمعة .
٦ - القطاعات الدائرية .

أولاً : الأعمدة البيانية :

نستخدم الأعمدة البيانية غالباً، في تمثيل البيانات الوصفية، كما يمكن استخدامها للمقارنة بين ظاهرة ما في مجتمعين مختلفين وتسمى الحالة الأخيرة بالأعمدة المزدوجة.

مثال (٨-٤) :

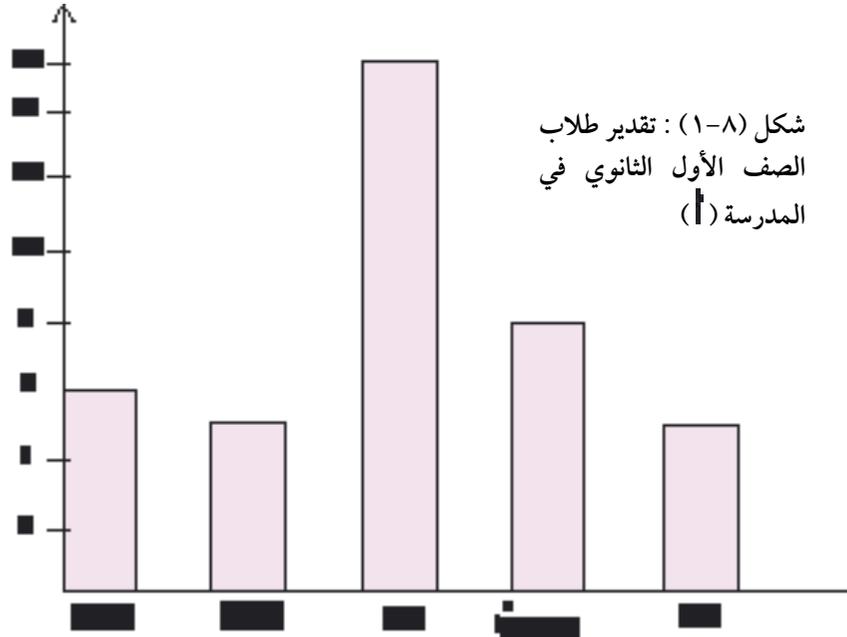
استخدم بيانات الجدول (٨ - ٣) لرسم الأعمدة البيانية :

الحل :

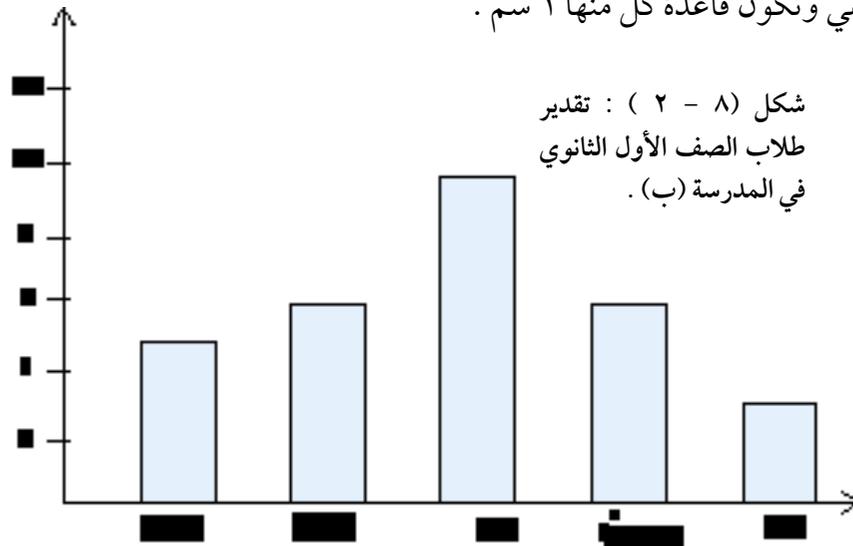
ولعمل ذلك نتبع الخطوات التالية :

- ١ - نرسم محورين متعامدين أحدهما أفقي (أو المحور السيني) والآخر رأسي (أو المحور الصادي) .
- ٢ - نحدد مثلاً ، ٢ سم لكل تقدير : راسب، مقبول ، جيد ، جيد جداً، ممتاز على المحور الأفقي .
- ٣ - نرسم مستطيلات على المحور الأفقي طول قاعدة كل منها ١ سم ونبدأ من بداية مجال كل تقدير ويكون ارتفاع كل منها يساوي التكرار المناظر لتلك الفئة أو المتناسب معه، ثم نظل هذه المستطيلات .

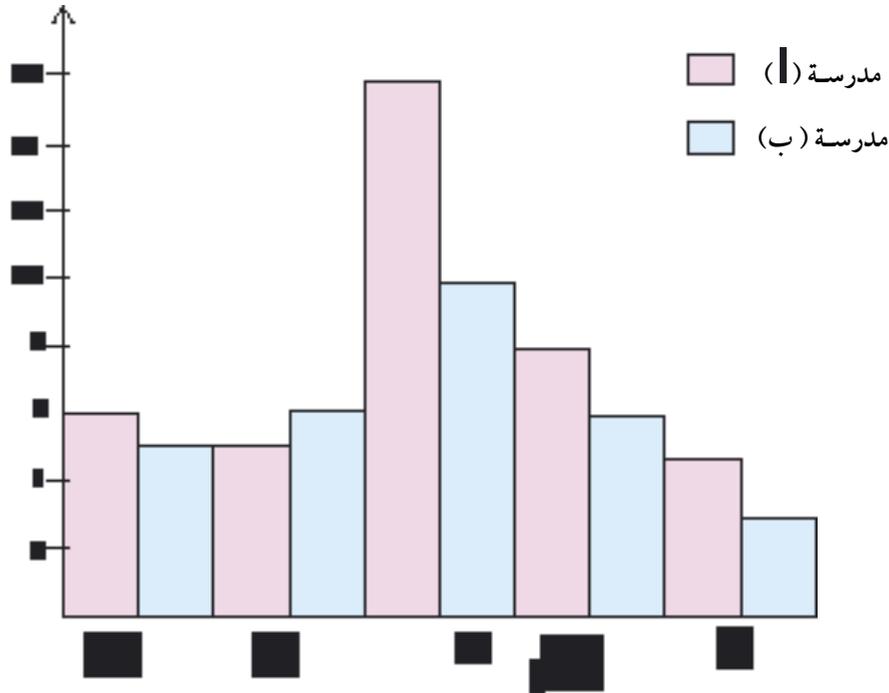
٤ - نضع تعريفاً تحت الشكل يبين البيانات التي يمثلها كما في الشكل (٨ - ١).



ونستخدم الطريقة نفسها لرسم الأعمدة البيانية لبيانات الجدول (٨ - ٤) ماعدا كون قاعدة المستطيلات تبدأ بعد ١ سم من بداية فترة التقدير على المحور الأفقي وتكون قاعدة كل منها ١ سم .



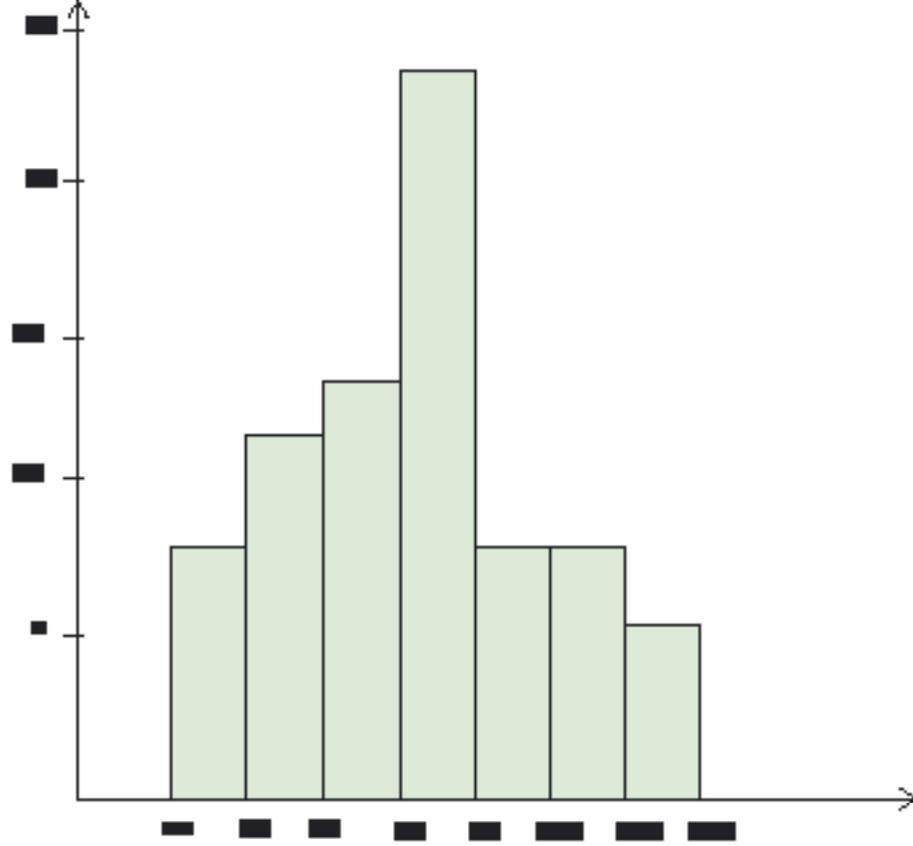
بوضع الشكلين (١-٨) و (٢-٨) في شكل واحد نحصل على الأعمدة البيانية
المزدوجة كما في الشكل (٣-٨).



شكل (٣-٨) : تقديرات طلاب الصف الأول الثانوي في مدرستي (أ) و (ب) .

ثانياً : المدرج التكراري :

يُرسَم المدرج التكراري، كما في حالة الأعمدة البيانية، وهو عبارة عن
مستطيلات رأسية متلاصقة قاعدة كل منها عبارة عن طول الفئة المناظرة لذلك
المستطيل وارتفاع كل منها يساوي (أو يتناسب مع) تكرار تلك الفئة . ويراعى أن
يكون تمثيل الفئات على المحور الأفقي حسب حدودها ولتوضيح ذلك نستخدم
بيانات الجدول (٨ - ٩) لأجور العمال فنحصل على الشكل (٨ - ٤) .



ثالثاً: المضلع التكراري :

يُرسَم المضلع التكراري كما في الحالتين السابقتين من التمثيل البياني، على أن نُحدِّد على المحور الأفقي مراكز الفئات ، حيث إن :

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة} + \text{الحد الأعلى للفئة}}{2}$$

تُمثِّل كل فئة من فئات الأجر بنقطة إحداثيها السيني (الأفقي) مركز الفئة وإحداثيها الصادي (الرأسي) التكرار المناظر لتلك الفئة. ثم نوصل هذه النقاط بقطع مستقيمة فنحصل على المضلع التكراري.

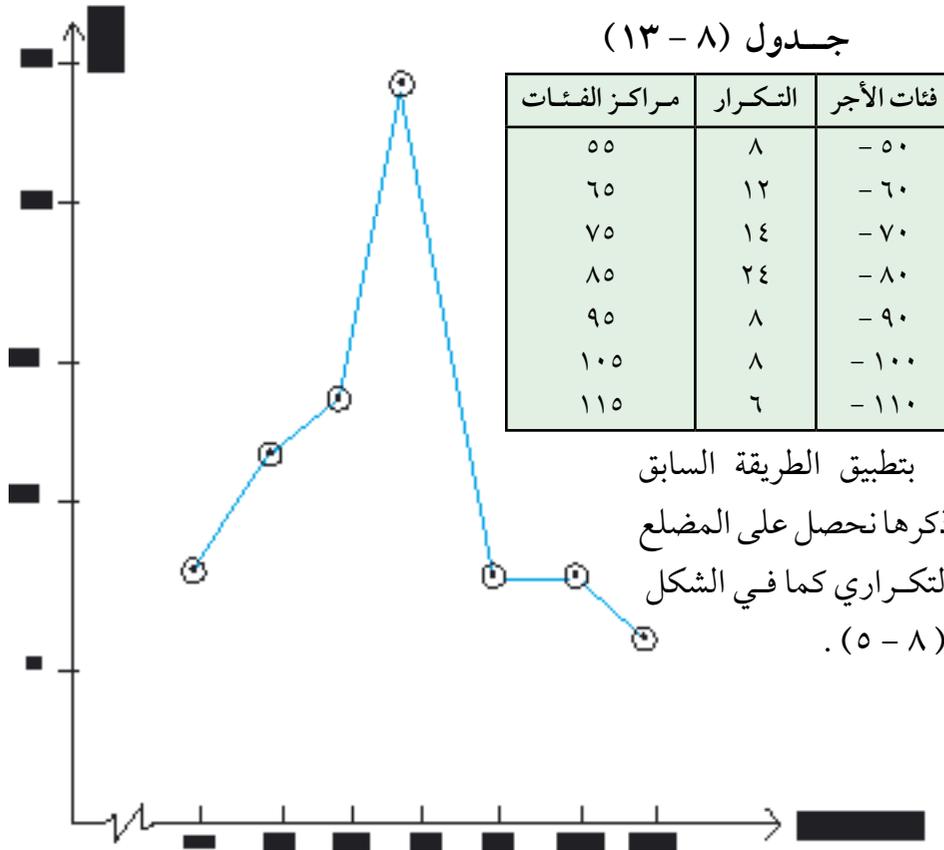
مثال (٥-٨) :

استخدم بيانات الجدول (٨ - ٩) لرسم المضلع التكراري .

$$٥٥ = \frac{٦٠ + ٥٠}{٢} = \text{مركز الفئة الأولى}$$

$$٦٥ = \frac{٧٠ + ٦٠}{٢} = \text{ومركز الفئة الثانية}$$

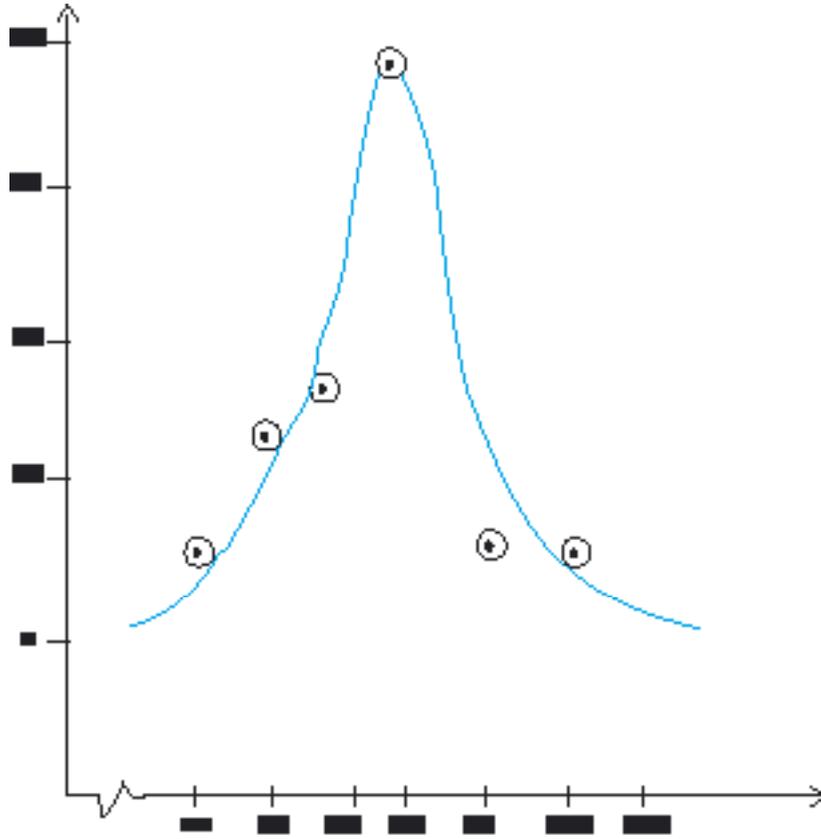
وبالطريقة نفسها نجد مراكز بقية الفئات كما في الجدول (٨ - ١٣).



شكل (٥ - ٨) : المضلع التكراري لأجور العمّال

رابعاً : المنحنى التكراري :

نتبع في رسم المنحنى التكراري خطوات رسم المصلح التكراري نفسها ولكن بدلاً من توصيل كل نقطتين متجاورتين بقطعة مستقيمة بالمسطرة، فإننا نصل كل نقطتين بمنحن ممهّد باليد أو بشريط مرن ويجب أن يكون المنحنى إنسيابياً وحتى لو اضطررنا إلى عدم مروره بعدد قليل من النقاط، بحيث يمر بقربها . والشكل (٦-٨) يمثل المنحنى التكراري لبيانات الجدول (٨ - ١٣).



خامساً : المنحنيات المتجمّعة :

سبق أن تعلّمنا كيف نجد الجدول المتجمّع الصاعد والنازل من الجدول

التكراري . وبتمثيل هذين الجدولين بيانياً نحصل على المنحني المتجمع الصاعد والمنحني المتجمع النازل.

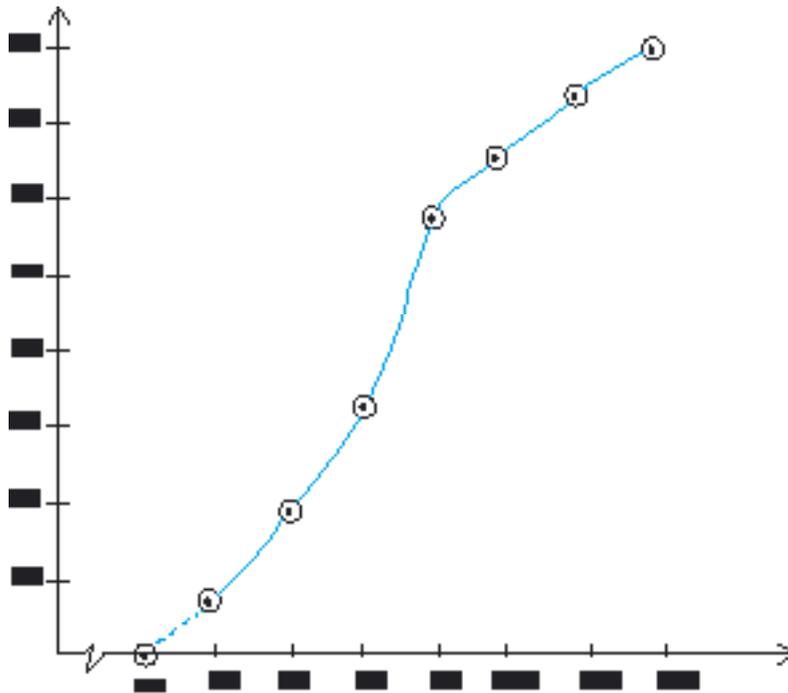
المنحني المتجمع الصاعد :

نرسم محورين متعامدين ونخصّص المحور الأفقي للحدود العليا للفئات، والمحور الرأسي للتكرارات المتجمّعة. ثم نحدّد النقاط على الشكل بحيث تكون الإحداثيات السينية للنقط هي الحدود العليا للفئات والإحداثيات الصادية لها هي التكرارات المتجمّعة الصاعدة المناظرة لتلك الفئات.

مثال (1-8) :

ارسم المنحني المتجمع الصاعد باستخدام بيانات الجدول (8 - 11) .

الحل : بعد رسم المحورين المتعامدين، نقسم المحور الأفقي



حسب الحدود
للفئات، ونقسّم
الرأسي إلى أق
لتشمل التكر
المناظرة. نُحدّد
المتجمّع الصا
الحد الأعلى ل
(8 ، 60)
ثم نصل هذه
التكراري المتج

سحل (8 - 7) . المنحني المتجمع الصاعد

المنحني المتجمّع النازل :

نرسم محورين متعامدين ، كما في المنحني المتجمّع الصاعد، على أن نخصّص المحور الأفقي للحدود الدنيا للفئات والمحور الرأسي للتكرارات المتجمّعة النازلة المناظرة لها .

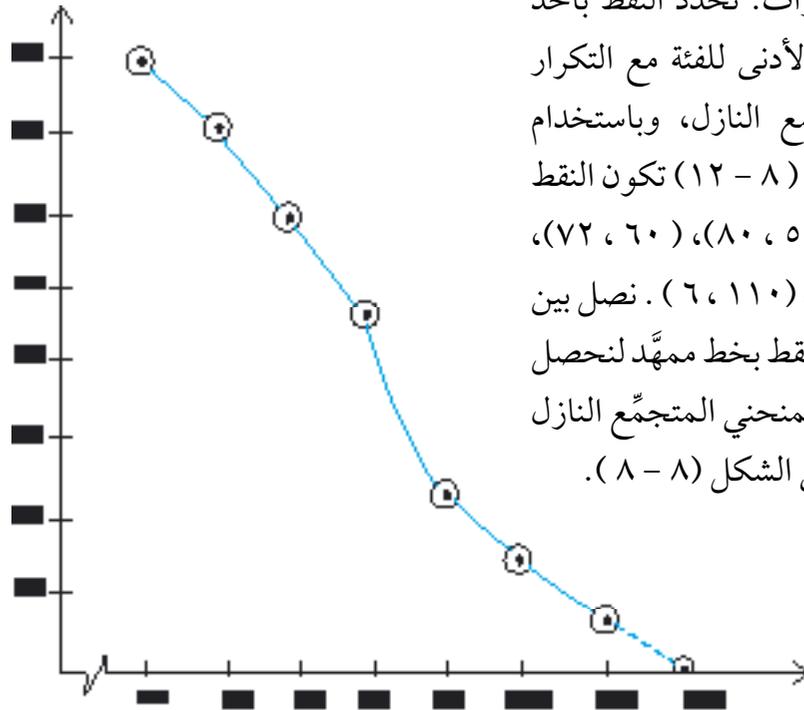
مثال (٧-٨) :

استخدم بيانات الجدول المتجمّع النازل (٨-١٢) لرسم المنحني المتجمّع النازل.

الحل :

بعد رسم المحورين المتعامدين، نقسم المحور الأفقي حسب الحدود الدنيا للفئات، ونقسم المحور الرأسي إلى أقسام متساوية بحيث يشمل مجموع

التكرارات. نُحدّد النقط بأخذ الحد الأدنى للفئة مع التكرار المتجمّع النازل، وباستخدام جدول (٨ - ١٢) تكون النقط هي (٧٢، ٦٠)، (٨٠، ٥٠)،، (٦، ١١٠). نصل بين هذه النقط بخط ممهّد لنحصل على المنحني المتجمّع النازل كما في الشكل (٨ - ٨).



شكل (٨ - ٨) : المنحني المتجمّع النازل

سادساً : القطاعات الدائرية :

إذا كانت البيانات المتوافرة لدينا عبارة عن مجموع مقسّم إلى عدة أجزاء فيمكن تمثيل هذه البيانات بمساحة دائرة، يُمثّل كل جزء من هذه البيانات قطاعاً من الدائرة تناسب مساحته مع ذلك الجزء من البيانات. ويتم، عادة، تمييز كل قطاع بلون (أو تظليل) مختلف من غيره ولرسم الدوائر الممثلة للبيانات تتبع الخطوات التالية :

١ - نرسم دائرة ذات مساحة مناسبة .

٢ - نحدّد زاوية كل قطاع باستخدام العلاقة التالية :

$$\text{زاوية القطاع} = \frac{\text{قيمة (تكرار) الجزء الممثّل بالقطاع}}{\text{مجموع القيم (التكرارات)}} \times 360^\circ$$

٣ - بعد تحديد الزاوية المناظرة لكل قطاع نستخدم المنقلة لتحديد الزوايا على الدائرة مع ملاحظة أن مجموع زوايا القطاعات يجب أن يُساوي ٣٦٠°

مثال (٨-٨) :

البيانات التالية تمثّل عدد السيارات المنطلقة من إحدى المدن الصغيرة إلى مكة المكرمة خلال الخمسة أيام الأولى من شهر ذي الحجة، حيث أ ترمز للسيارات التي سعة كل منها ٩ ركاب ، ب للسيارات التي سعة كل منها ٢٠ راكباً ، ج ٢٥ راكباً ، د ٣٠ راكباً ، هـ ٤٠ راكباً؛ وفق الجدول التالي :

مثّل هذه البيانات بواسطة القطاعات الدائرية.

المجموعة	أ	ب	ج	د	هـ	المجموع
عدد السيارات (التكرار)	١٢	٨	٤	٧	٥	٣٦

الحل:

١ - نرسم، أولاً، دائرة ذات نصف قطر مناسب، وليكن في هذه الحالة ٣ سم.

٢ - نحسب زاوية القطاع لكل مجموعة من السيارات كما يلي :

$$\text{زاوية قطاع أ} = 360^\circ \times \frac{12}{36} = 120^\circ$$

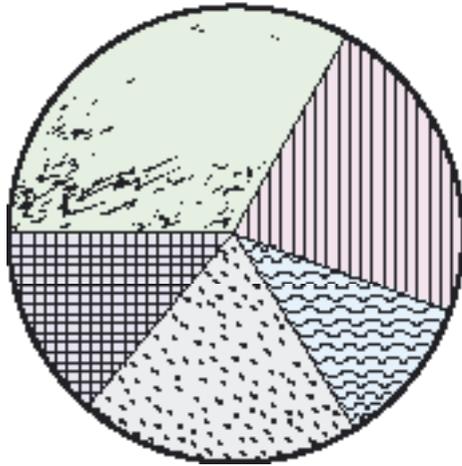
$$\text{زاوية قطاع ب} = 360^\circ \times \frac{8}{36} = 80^\circ$$

$$\text{زاوية قطاع ج} = 360^\circ \times \frac{4}{36} = 40^\circ$$

$$\text{زاوية قطاع د} = 360^\circ \times \frac{7}{36} = 70^\circ$$

$$\text{زاوية قطاع هـ} = 360^\circ \times \frac{5}{36} = 50^\circ$$

٣ - نرسم القطاعات السابقة على الدائرة باستخدام المنقلة ونظّل كلاً منها بتظليل يُميّزها عن بقية القطاعات كما في الشكل (٨ - ٩).



- مجموعة أ
- مجموعة ب
- مجموعة ج
- مجموعة د
- مجموعة هـ

شكل (٨ - ٩) : القه
السيارات حسب أعداد الركاب.

تمارين (٨ - ٢)

تمارين (٨ - ٢)

(١) إذا كانت الحالة الاجتماعية لعينة مكونة من ثلاثين شخصاً من إحدى القرى كما يلي :

متزوج	أرمل	مطلق	متزوج	أرمل
لم يتزوج	مطلق	متزوج	أرمل	متزوج
متزوج	أرمل	متزوج	لم يتزوج	متزوج
أرمل	أرمل	متزوج	لم يتزوج	أرمل
لم يتزوج	مطلق	لم يتزوج	مطلق	لم يتزوج
متزوج	لم يتزوج	مطلق	لم يتزوج	متزوج

فأجب عما يلي :

(أ) أوجد الجدول التكراري لهذه البيانات.

(ب) أوجد الجدول التكراري النسبي والمئوي.

(ج) ارسم الأعمدة البيانية للبيانات السابقة.

(د) استخدم القطاعات الدائرية لتمثيل هذه البيانات.

(٢) إذا كانت البيانات الناتجة من دراسة الدخل الشهري بالريال لعينة مكونة من ٣٠ أسرة من أحد المجتمعات كما يلي :

٦٧٠٠	٥٥١٠	٢٤٠٠	٢٩١٠	٣٥٠٠	٢١٠٠
٢٨١٤	٣٩٥٠	٢٠١٠	٦٩٠٠	٤٦٠٠	٤٢٠٠
٢٨٠٠	٤٦١٠	٥٢٢٠	٦٧٢٠	٥٦٠٠	٣٦٢٠
٢٣٩٠	٦٩٩٠	٣٣٣٢	٣٧٨٠	٤٥٢٠	٦٢٠٠
٤٦٥٩	٦٧٣٠	٢٤٥٠	٥٤٨٣	٥٧٠٠	٣٩٠٠

فأجب على الأسئلة التالية :

(أ) أوجد الجدول التكراري .

(ب) أوجد الجدول التكراري النسبي والمئوي .

(ج) ارسم المصّلع التكراري .

(د) ارسم المنحني المتجمع الصاعد .

(٣) إذا كانت أعداد الطلاب في الصف الأول الثانوي وفي ٥٠ فصلاً من عدة مدارس ثانوية كما في الجدول التالي :

١٣	٢٨	١٧	٢٦	١٥	٣٢	٤٠	١١	٢٠	٣١
٣٩	١٨	٢٧	١٧	١٨	١٢	٢١	١٦	١٢	٣٥
٣٢	٢٩	٢٨	٢٦	٣٨	٣٧	٢٣	٢٤	٢١	٢٤
١٩	٢٢	٣٦	١٨	٣٤	١١	٢٩	١٧	٢١	٣٦
٢٥	٢٤	١٧	١٩	٣٤	١٤	٢٩	١٩	٢٢	١٩

فأجب عما يلي :

(أ) أوجد الجدول التكراري .

(ب) أوجد الجدول التكراري النسبي والمئوي .

(ج) ارسم الأعمدة التكرارية .

(٤) أطوال عيّنة من طلاب مدارس المرحلة الابتدائية بالسنتيمتر هي كما يلي :

١٠١	١١٧	١٢٥	٩١	٩٢	١٢٥	١١٠	٩٨
١١٨	١٢٥	١١١	١٠٩	١٢٩	١٢٢	١٢١	١٠٤
٩٩	١٢٦	١٢٢	٩١	١٠٣	١٠٢	١٢٩	١٢١
٩٣	٩٨	٩٩	٩٧	١٢٧	٩٥	١٢٥	٩٣
١٠٩	١١٣	١٠٧	١١٤	١١٨	١٠٢	١٠٨	١٠٤
١١٧	٩٧	١٠٥	٩٤	١١٤	١٠٧	١٠٧	١١٥

والمطلوب :

(أ) أوجد الجدول التكراري لهذه البيانات .

(ب) ارسم المدرج التكراري .

(ج) ارسم المضلع التكراري والمنحني التكراري .

(د) ارسم المنحني المتجمّع الصاعد .

(هـ) ارسم المنحني المتجمّع النازل .

(٥) إذا كانت أعداد الفصول الدراسية في المرحلة الثانوية وفي ثلاث مناطق تعليمية أ، ب، ج كما يلي :

المنطقة	الفصل	أول ثانوي	ثاني ثانوي	ثالث ثانوي
منطقة تعليمية أ	٢٤	١٨	١٨	١٨
منطقة تعليمية ب	١٥	١٢	٩	٩
منطقة تعليمية ج	١٠	٨	٨	٨

فأجب عما يلي :

(أ) أوجد الجدول التكراري النسبي والمئوي لكل منطقة .

(ب) أوجد الجدول التكراري والنسبي للمناطق التعليمية الثلاث مجتمعة .

(ج) علق على نتائج الجداول التكرارية النسبية للمناطق الثلاث .

(د) استخدم القطاعات الدائرية لتمثيل أعداد الطلاب في الفصول الثلاثة .

(٦) يمثل الجدول التالي أوزان عينة مكونة من ٥٠ جندياً في إحدى القطاعات العسكرية بمنطقة ما بالكيلوغرام .

الفئة (الوزن)	٥٠ -	٦٠ -	٧٠ -	٨٠ -	٩٠ -
عدد الجنود	٦	٢٠	١٠	٨	٦

والمطلوب :

- (أ) نسبة الجنود الذين أوزانهم ٨٠ كلغ فأكثر .
(ب) نسبة الجنود الذين تقل أوزانهم عن ٦٠ كلغ .
(ج) ارسم المدرج التكراري للأوزان .
(د) ارسم المنحني التكراري والمنحني التكراري المتجمّع الصاعد للأوزان .
(٧) إذا كان الجدول التكراري التالي يمثل أعداد السيارات حسب الحمولة بالراكب التي عبرت إحدى المنافذ الحدودية والقاصدة مكة المكرمة في موسم الحج في المدّة بين ٢٠ و ٣٠ ذي القعدة في أحد الأعوام .

الفئة (عدد الركاب)	١٧-٩	٢٦-١٨	٣٥-٢٧	٤٤-٣٦	٥٤-٤٥
عدد السيارات	١٢	٣٦	٤٠	٢٠	١٢

فأوجد ما يلي :

- (أ) أوجد الجدول التكراري المتجمّع الصاعد .
(ب) أوجد الجدول التكراري المتجمّع النازل .
(ج) ارسم المدرج التكراري لهذه البيانات .
(د) أوجد الجدول التكراري النسبي والمئوي .
(هـ) أوجد عدد السيارات التي تحمل أكثر من ٢٦ راكباً ونسبتها المئوية .
(٨) الجدول التالي يبيّن مساحة محيطات العالم بملايين الكيلومترات المربعة .

المحيط	الهادي	الأطنطي	الهندي	القطبي الجنوبي	القطبي الشمالي
المساحة مليون كلم ^٢	١٨٣,٤	١٠٦,٧	٧٣,٨	١٩,٧	١٢,٤

مثّل هذه المعلومات بيانياً مستخدماً ما يلي :

(أ) الأعمدة البيانية .

(ب) القطاعات الدائرية .

٨ - ٥ المتوسطات :

درسنا فيما سبق جمع البيانات وعرضها جدولياً وبيانياً. والآن ننتقل إلى المرحلة الرابعة من خطوات الدراسة الإحصائية، وهي التعبير عن الظاهرة محل الدراسة بمقياس معبّر عن جميع قيم الظاهرة، مثل متوسط دخل الفرد في مجتمع ما، أو متوسط أعداد الطلاب في المدارس الثانوية، أو متوسط كميات الأمطار (بالمليمتر) التي يمسّ الله بها على عباده في إحدى مدن أو مناطق المملكة، أطوال أو أوزان أشخاص في منطقة ما... إلخ.

ومن الملاحظ على هذه الظواهر، أنها بتقدير من الله عزّ وجل : ﴿ **كُلُّ شَيْءٍ**

عِنْدَ رَبِّمَقْدَرٍ ﴾ (الآية ٨ - سورة الرعد)، تميل إلى الالتفاف حول قيمة معينة ووسطى أي تتوسط القيم بصورة ما، خذ، على سبيل المثال، عينة من الطلبة في صف معين وادرس ظاهرة الطول لديهم، ستجد أن قلة منهم قصار جداً وقلة أخرى أطوال جداً وأن غالبيتهم يميلون في أطوالهم إلى طول أوسط . ينطبق الأمر نفسه على ظاهرة الوزن والذكاء وحدة البصر .. تلك سنة الله في خلقه ولن تجد لسنته تبديلاً، قال تعالى : ﴿ **فَقَدَرْنَا فَنِعْمَ الْقَادِرُونَ** ﴾ (الآية ٢٣ - سورة المرسلات) .

وسندرس كيفية إيجاد مقياس لهذه الخاصية التي فطر الله عليها الظواهر الكونية

عن طريق عدة مقاييس ابتكرها الإحصائيون أهمّها :
 الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .
 ولكلٍّ من هذه المقاييس طريقة خاصة لحسابه أو استنتاجه كما أن لكل منها
 مزاياه وعيوبه والحالات التي يفضل استخدامه فيها .

أولاً : الوسط الحسابي :

يُعتبر الوسط الحسابي من أكثر المتوسطات شيوعاً .

تعريف (٨ - ٦) :

يُعرّف الوسط الحسابي لمجموعة من القيم بأنه القيمة التي لو حلّت
 محل قيمة كل مفردة في المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة مساوياً
 لمجموع القيم الأصلية .

من ذلك نرى أنّ الوسط الحسابي يساوي مجموع القيم مقسوماً على عددها .
 ولحساب الوسط الحسابي نميّز بين حالتين هما حالة البيانات غير المبوّبة (أي التي
 لم يتم وصفها في جداول تكرارية) وحالة البيانات المبوّبة (أي التي تمّ وصفها في
 جداول تكرارية) .

(أ) البيانات غير المبوّبة :

إذا كان لدينا قيمة عبارة عن أطوال أو أوزان أو أعمار مجموعة من الطلاب
 ولتكن هذه القيم هي :

س_١ ، س_٢ ، ... ، س_٦

عندئذٍ فإن تعريف الوسط الحسابي ينصُّ على أن :

$$\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \text{الوسط الحسابي}$$

فإذا رمزنا للوسط الحسابي بالرمز \bar{s} (وتقرأ \bar{s} فتحة) فإن قيمته حسب التعريف هي :

$$\bar{s} = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}$$

للاختصار في التعبير عن \bar{s} فإننا نستخدم الرمز $\sum s$ (وتقرأ سيجمما) ، وتكون الصيغة المبسطة للوسط الحسابي هي :

$$\bar{s} = \frac{\sum s}{n}$$

مثال (٨-٩) :

أوجد الوسط الحسابي لدرجات عشرة طلاب في مادة الرياضيات من البيانات التالية : ٨٢ ، ٦٩ ، ٧٧ ، ٥٨ ، ٧٥ ، ٩٠ ، ٦١ ، ٩٣ ، ٨٥ ، ٦٠

الحل :

عدد الطلاب في هذه البيانات $n = 10$

والقيم هي : $s_1 = 82$ ، $s_2 = 69$ ، $s_3 = 77$ ،
 $s_4 = 58$ ، $s_5 = 75$ ، $s_6 = 90$ ، $s_7 = 61$ ،
 $s_8 = 93$ ، $s_9 = 85$ ، $s_{10} = 60$
 وبالتالي فإن الوسط الحسابي هو :

$$\bar{s} = \frac{\sum s}{n}$$

$$= \frac{60 + 85 + 93 + 61 + 90 + 75 + 58 + 69 + 82}{10}$$

$$= \frac{750}{10}$$

$$= 75 \text{ درجة}$$

(ب) البيانات المبوّبة :

نلاحظ في المثال (٨ - ٩) السابق أنّ طالباً واحداً حصل على ٨٢ درجة وطالباً آخر حصل على ٦٩ درجة. أما إذا كان عدد الطلاب كبيراً فمن الممكن أن يحصل أكثر من طالب على الدرجة نفسها. لتوضيح هذه الحالة نأخذ المثال التالي :

مثال (٨-١٠) :

إذا كانت درجات ٣٠ طالباً في امتحان الفيزياء للشهر الأول من الدراسة في إحدى المدارس الثانوية حيث الدرجة العظمى ١٠ درجات كما في الجدول التالي :

الدرجة	عدد الطلاب
٣	٥
٥	٧
٨	١٠
٩	٦
١٠	٢

فاحسب الوسط الحسابي

الحل :

نلاحظ أنّ ٥ طلاب حصل كل منهم على ٣ درجات أي أنّ مجموع درجاتهم $3 \times 5 = 15$ ، و ٧ طلاب حصل كل منهم على ٥ أي مجموع درجاتهم $5 \times 7 = 35$ ،... وهكذا. ويكون الوسط الحسابي هو مجموع الدرجات التي نحصل عليها بهذه الطريقة مقسوماً على عدد الطلاب والذي يساوي $5 + 7 + 10 + 6 + 2 = 30$. ويمكن القول بأن الدرجة ٣ تكررت ٥ مرات والدرجة ٥ تكررت ٧ مرات ... وهكذا. فإذا رمزنا للدرجة بالرمز s ولعدد الطلاب الذين حصلوا عليها بالرمز n_s ، يمكننا الحصول على الجدول التالي :

الدرجة (س)	التكرار (س)	الدرجة x التكرار (س)
٣	٥	١٥ = ٣ x ٥
٥	٧	٣٥ = ٥ x ٧
٨	١٠	٨٠ = ٨ x ١٠
٩	٦	٥٤ = ٩ x ٦
١٠	٢	٢٠ = ١٠ x ٢
المجموع	٣٠ = ∑	٢٠٤ = ∑ س

من الجدول السابق نرى أن:

$$٣٠ = \sum$$

$$٢٠٤ = \sum س$$

وبالتالي فإن الوسط الحسابي هو:

$$\bar{س} = \frac{٢٠٤}{٣٠}$$

$$= ٦,٨ \text{ درجة}$$

وتكون صيغة الوسط الحسابي هي:

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{\sum}$$

مثال (٨-١١):

أوجد الوسط الحسابي لأجور العمال في المثال (٨ - ٣) مستخدماً الجدول (٨ - ١٣).

الحل:

لإيجاد الوسط الحسابي نتبع ما يلي:

(١) نجد جدولاً تكرارياً يحتوي العمود الأول منه على مراكز الفئات س والعمود الثاني على التكرارات المناظرة لها .

(٢) نضرب مراكز الفئات س في التكرارات المناظرة فنحصل على قيم س ونضعها في العمود الثالث .

٣- نجد قيمة $\sum X$ وقيمة $\sum X^2$ س

٤- يكون الوسط الحسابي هو :

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{\sum f}$$

س	التكرار (f)	مراكز الفئات س
٤٤٠	٨	٥٥
٧٨٠	١٢	٦٥
١٠٥٠	١٤	٧٥
٢٠٤٠	٢٤	٨٥
٧٦٠	٨	٩٥
٨٤٠	٨	١٠٥
٦٩٠	٦	١١٥
٦٦٠٠	٨٠	المجموع

من الجدول السابق نجد أن :

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{\sum f}$$

$$= \frac{٦٦٠٠}{٨٠}$$

$$= ٨٢,٥ \text{ ريالاً.}$$

مزايا الوسط الحسابي :

(أ) يأخذ جميع القيم في الاعتبار .

(ب) شائع الاستعمال وكذا يمكن الاستدلال به في كثير من الدراسات الإحصائية.

(جـ) لا يحتاج في حسابه إلى ترتيب البيانات بصورة معينة.

عيوب الوسط الحسابي :

(أ) يتأثر بالقيم المتطرفة (الشاذة) من حيث الكبر والصغر.

(ب) لا يمكن حسابه في حالة البيانات الوصفية.

(جـ) قد لا يساوي أيًا من القيم الداخلة في حسابه فقد يحتوي على جزء

كسري لبيانات مكوّنة من أعداد صحيحة.

ثانياً: الوسيط :

تعريف (٨ — ٧) :

الوسيط هو القيمة العددية التي تقسم البيانات إلى مجموعتين متساويتين بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً.

من هذا التعريف، نلاحظ أنّ عدد القيم الأصغر من الوسيط يساوي عدد القيم الأكبر منه.

سندرس فيما يلي طريقة حساب الوسيط للبيانات غير المبوّبة ومن ثم للبيانات المبوّبة.

(أ) البيانات غير المبوّبة :

حسب تعريف الوسيط ، نرتب القراءات المعطاة إما تصاعدياً أو تنازلياً. وتكون القيمة التي تقع في المنتصف هي الوسيط. ففي حالة كون عدد القراءات فردياً فإن

الوسيط هي القراءة التي ترتيبها $\frac{n+1}{2}$. أما إذا كان عدد القراءات زوجياً فإن

الوسيط هو الوسط الحسابي للقراءتين اللتين ترتيبهما $\frac{11}{2}$ ، $\frac{11}{2} + 1$.

مثال (٨-١٢):

أوجد الوسيط لأوزان لاعبي كرة القدم الأساسيين لمنتخب إحدى الدول إذا كانت أوزانهم هي : ٦٢ ، ٥٠ ، ٦٣ ، ٥٥ ، ٤٨ ، ٥٣ ، ٥١ ، ٥٧ ، ٦٧ ، ٥٨ ، ٦٤ .

الحل:

نرتب أولاً الأوزان تصاعدياً مثلاً كالتالي :

٤٨ ، ٥٠ ، ٥١ ، ٥٣ ، ٥٥ ، ٥٧ ، ٥٨ ، ٦٢ ، ٦٣ ، ٦٤ ، ٦٧

نلاحظ أن الرقم الذي ترتيبه $\frac{11 + 1}{2} = 6$ هو ٥٧ ، وبذلك يكون :

$$\text{الوسيط} = ٥٧$$

مثال (٨-١٣):

أوجد الوسيط لدرجات الطلاب في مادة الرياضيات والمعطاة في المثال (٨-٩): وهي : ٨٢ ، ٦٩ ، ٧٧ ، ٥٨ ، ٧٥ ، ٩٠ ، ٦١ ، ٩٣ ، ٨٥ ، ٦٠ .

الحل:

نرتب الدرجات تصاعدياً كما يلي :

٥٨ ، ٦٠ ، ٦١ ، ٦٩ ، ٧٥ ، ٧٧ ، ٨٢ ، ٨٥ ، ٩٠ ، ٩٣ .

عدد الطلاب $n = 10$ وهو عدد زوجي .

وبالتالي فإننا نبحث في القيم المرتبة عن العددين اللذين ترتيبهما $\frac{10}{2}$ أي ٥ و

$\frac{10}{2} + 1$ أي ٦ . وبذلك يكون الوسيط هو متوسط العددين ٧٧ ، ٧٥ أي أن :

$$\text{الوسيط} = \frac{٧٧ + ٧٥}{2}$$

$$= ٧٦ \text{ درجة}$$

(ب) البيانات المبوّبة :

نستطيع حساب الوسيط للبيانات المبوّبة بطريقتين إما حسابياً أو بيانياً (أي بطريقة الرسم) .

الطريقة الحسابية :

تتلخص طريقة حساب الوسيط في الخطوات التالية :

(١) نجد الجدول المتجمّع الصاعد للبيانات من الجدول التكراري وبذلك أوجدنا ما يكافئ ترتيب القراءات تصاعدياً .

(٢) ترتيب الوسيط عبارة عن منتصف مجموع التكرارات أي أنّ :

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\Sigma f}{2}$$

(٣) تسمّى الفئة التي تحتوي على الوسيط بالفئة الوسيطة. وبذلك يمكن حساب الوسيط من العلاقة التالية :

$$\text{الوسيط} = l + \frac{\frac{\Sigma f}{2} - c}{f - c} \times h$$

حيث أن l هو الحد الأدنى للفئة الوسيطة .

c هو التكرار المتجمّع المناظر للحد الأدنى للفئة الوسيطة.

f هو التكرار المتجمّع المناظر للحد الأعلى للفئة الوسيطة.

h هو طول الفئة الوسيطة.

أي أنّ قيمة الوسيط تبعد عن بداية الفئة الوسيطة بمقدار يتناسب مع نسبة التكرارات المتبقية لإكمال ترتيب الوسيط وتكرار الفئة الوسيطة.

ولتوضيح الطريقة نورد المثال التالي :

مثال (٨-١٤):

أوجد قيمة الوسيط لبيانات أجور العمال المعطاة في الجدول المتجمّع الصاعد (٨-١١).

الحل:

$$\frac{\sum f \cdot X}{\sum f} = \text{لاحظ أن ترتيب الوسيط}$$
$$\frac{80}{2} =$$
$$40 =$$

الجدول (٨-١١) المتجمّع الصاعد هو:

التكرارات	الحدود العليا للفئات
٨	أقل من ٦٠
٢٠	أقل من ٧٠
٣٤ → الوسيط	أقل من ٨٠
٥٨ →	أقل من ٩٠
٦٦	أقل من ١٠٠
٧٤	أقل من ١١٠
٨٠	أقل من ١٢٠

يقع ترتيب الوسيط، أي ٤٠، بين التكرارين المتجمّعين ٣٤ و ٥٨ أي أنّ

$$34 = f_1, 58 = f_2.$$

نلاحظ كذلك بأنّ:

$$80 = L, 80 = 80 - 90 = l$$

ومن ذلك يمكن حساب الوسيط مباشرة كما يلي .

$$\text{الوسيط} = I + J \times \frac{\frac{\sum f}{2} - F_{\text{س}}}{f_{\text{س}}}$$

$$= 80 + 10 \times \frac{34 - 40}{34 - 58}$$

$$= 80 + 10 \times \frac{6}{24}$$

$$= 80 + 2,5$$

$$= 82,5$$

الطريقة البيانية :

وتتلخّص طريقة حساب قيمة الوسيط بالطريقة البيانية :

(أو الرسم) فيما يلي :

(١) نكوّن الجدول المتجمّع الصاعد كما سبق أن أوضحنا في البند (٨ - ٣).

(٢) نرسم المنحني المتجمّع الصاعد كما سبق أن أوضحنا في البند (٨ - ٤).

(٣) نوجد ترتيب الوسيط، كما في البيانات المبوّبة، وهي $\frac{\sum f}{2}$. ومن هذه النقطة نرسم مستقيماً موازياً للمحور الأفقي حتى يلتقي مع المنحني المتجمّع الصاعد. ننزل من نقطة التلاقي عموداً على محور الحدود العليا للفئات فتكون قيمة الوسيط هي نقطة تقاطع ذلك العمود مع المحور الأفقي.

مثال (٨-١٥) :

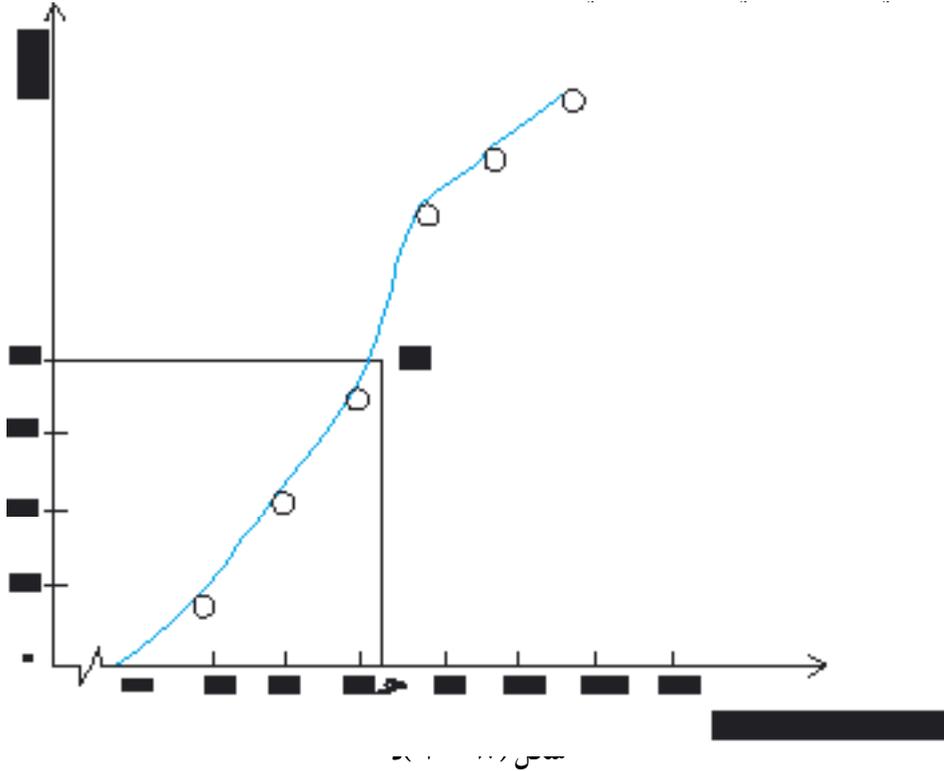
أوجد قيمة الوسيط بالطريقة البيانية مستخدماً بيانات الجدول التكراري المتجمّع الصاعد (٨-١١).

الحل:

نلاحظ أن:

$$\begin{aligned} \frac{\sum x}{2} &= \text{ترتيب الوسيط} \\ \frac{80}{2} &= \\ 40 &= \end{aligned}$$

نرسم المنحني المتجمّع الصاعد، بالطريقة التي سبق شرحها، كما في الشكل التالي. نرسم مستقيماً من النقطة ٤٠ على محور الصادات ليلتقي مع المنحني المتجمّع الصاعد في نقطة ب. ننزل عموداً من نقطة ب على محور الفئات (المحور الأفقي) فتقطعه في نقطة هـ التي تعبّر عن قيمة الوسيط.



لاحظ أن قيمة الوسيط أو الإحداثي الأفقي لنقطة \square تساوي ٨٢,٥ تقريباً .
وقد تختلف قيمة الوسيط عند حسابه بالطريقة البيانية عن حسابه بالعلاقة الرياضية
ويرجع مثل هذا الاختلاف ، إن وجد ، إلى مقدار التقريب في الرسم .

مزايا الوسيط :

- (١) لا يتأثر بالقيم الشاذة (الكبيرة جداً أو الصغيرة جداً) لأنه من المتوسطات
الموضعية .
- (٢) يمكن حسابه للبيانات الوصفية التي لها صفة الترتيب .

عيوب الوسيط :

- (١) لا يأخذ جميع القراءات في الاعتبار عند حسابه .
- (٢) يصعب الاستدلال به منفرداً في الدراسات الإحصائية .

ثالثاً: المنوال :

تعريف (٨ - ٨) :

المنوال لمجموعة قراءات هو القراءة الأكثر تكراراً أو شيوماً .

سنعرض كيفية إيجاده في حالتنا البيانات غير المبوبة والبيانات المبوبة.

(١) البيانات غير المبوبة :

تعتبر البيانات المبوبة وحيدة المنوال إذا تكررت إحدى قراءاتها أكثر من أي
قراءة أخرى . كما تعتبر البيانات ثنائية المنوال إذا وجدنا في البيانات قراءتين لهما
نفس التكرار، وتكرارهما أكبر من تكرار أي قراءة أخرى، وتعتبر البيانات متعددة
المناول إذا زادت القراءات التي لها التكرار نفسه عن قراءتين وكان ذلك التكرار
أكبر من تكرار بقية القراءات. أما إذا لم توجد أية قراءة تتكرر أكثر من غيرها فنقول
بأن هذه البيانات عديمة المنوال أو لا منوال لها .

أما القراءات الأخرى ٦ ، ٩ فلم يصل تكرارها إلى ٨ وبالتالي فإن البيانات ثنائية المنوال، ومنوالها هما ٧ ، ٨ .

(ب) البيانات المبوّبة :

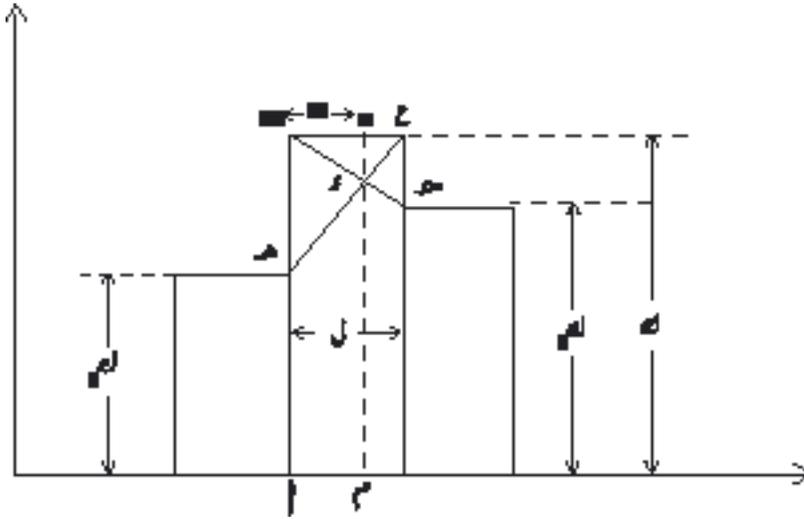
يمكن إيجاد المنوال ، في حالة البيانات المبوّبة، بطريقتين حسابية وبيانيّة.

الطريقة الحسابية :

يمكن استنتاج حساب المنوال كما يلي :

(١) نرسم من المدرج التكراري الخاص بالفئة المنوالية، (الفئة المناظرة لأكبر تكرار) وللفئتين السابقتين واللاحقة لها كما في الشكل (٨ - ١١) .

شكل (٨ - ١١) : رسم الفئة المنوالية



(٢) من تشابه المثلثين ب \triangle هـ ، \triangle و نجد أن :

$$\frac{| \triangle و |}{| \triangle هـ |} = \frac{| \triangle و |}{| \triangle هـ |}$$

ومن تشابه المثلثين ب $\triangle ABC$ ، ب $\triangle DEF$ نجد أن :

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

بقسمة العلاقة الثانية على العلاقة الأولى نجد أن :

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

$$\text{أي أن : } \frac{1 - 2}{2 - 1} = \frac{f}{l - f}$$

وإضافة بسط كل نسبة إلى مقامها نحصل على :

$$\frac{1 - 2}{2 - 1} = \frac{f}{l}$$

$$\text{أي أن : } f = l \times \frac{1 - 2}{2 - 1}$$

حيث f هو الفرق بين المنوال وبداية الحد الأدنى للفئة المنوالية.

ومن ذلك نجد أن :

$$\text{المنوال} = f + 1$$

أو

$$\text{المنوال} = 1 + l \times \frac{1 - 2}{2 - 1}$$

حيث إن : 1 بداية (الحد الأدنى) للفئة المنوالية.

2 تكرار الفئة المنوالية .

1 تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالية .

2 تكرار الفئة اللاحقة للفئة المنوالية.

l طول الفئة المنوالية.

مثال (٨-١٩):

أوجد قيمة المنوال للجدول التكراري التالي والذي يبيّن كميات الأمطار النازلة على منطقة ما بالمليمترو في ٦٠ شهراً .

٥٠ -	٤٠ -	٣٠ -	٢٠ -	١٠ -	٠ -	كمية الأمطار
٢	٦	٩	٢١	١٣	٩	عدد الأشهر

الحل:

نلاحظ أن الفئة المنوالية هي الفئة التي حدّها الأدنى = ٢٠ وذلك لأن لها أكبر تكرار ٠.٢١

ومن الجدول نجد أن $١٣ = ١$ ، $٩ = ٢$ ، $١٠ = ٤$ وبالتعويض في العلاقة:

$$\text{المنوال} = ٢ + \frac{١ - ٢}{٢ - ١ - ٤} \times ١٠$$

نجد أنّ:

$$\text{المنوال} = ٢٠ + \frac{١٣ - ٢١}{٢ - ١٣ - ٩} \times ١٠$$

$$= ٢٠ + ٤$$

$$= ٢٤ \text{ مليمتراً}$$

طريقة الرسم:

نستخدم الشكل (٨-١١) السابق لتوضيح طريقة الرسم والذي اتبعنا في إيجاد ما يلي:

(١) رسمنا المستطيلات من المدرج التكراري المناظرة للفئة المنوالية والفئتين المجاورتين لها .

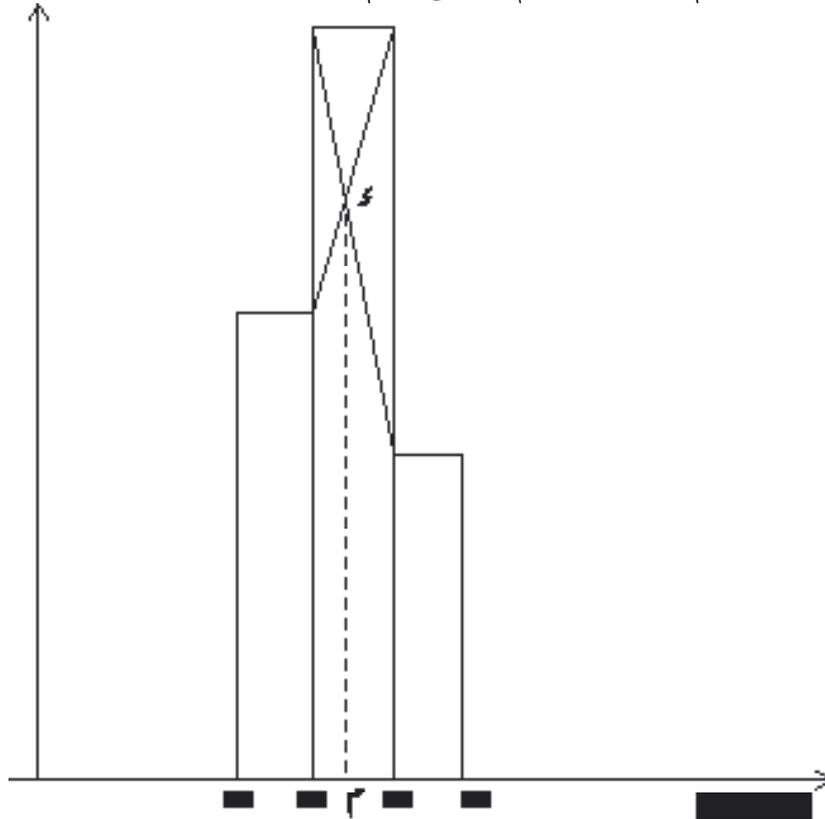
- (٢) وصلنا []، []، [] وكانت نقطة تقاطعهما .
 (٣) أنزلنا عموداً من نقطة [] على محور الفئات (الأفقي) فالتقى معه في النقطة [] وهي المنوال .

مثال (٢٠-٨) :

أوجد المنوال بطريقة الرسم لبيانات كميات الأمطار في المثال (٨ - ١٩) .

الحل :

نرسم ثلاثة مستطيلات للفئة المنوالية التي تكرر لها $21 = 3 \times 7$ وللفئتين المجاورتين لها حيث إن تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالية $13 = 3 \times 4$ وتكرار الفئة اللاحقة لها $9 = 3 \times 3$ باستخدام مقياس رسم مناسب .



نصل الركن الأعلى الأيمن من المستطيل للفئة السابقة مع الركن الأعلى الأيمن لمستطيل الفئة المنوالية. كذلك نصل الركن الأعلى الأيسر من مستطيل الفئة اللاحقة مع الركن الأعلى الأيسر من مستطيل الفئة المنوالية. من تقاطع المستقيمين الواصلين بين الأركان # نزل عموداً على محور الفئات فيقابلة في المنوال # حيث وجدنا أن :
المنوال = ٢٤ مليمتراً

(و معلوم أن الفرق بين قيمتي المنوال - إن وجد - في الطريقتين يكون ناتجاً من عدم دقة الرسم) .

مزايا المنوال :

- (١) لا يتأثر بالقيم المتطرفة (الشاذة) نحو الكبير أو نحو الصغر .
- (٢) يمكن حسابه للبيانات الوصفية .
- (٣) يمكن حسابه للبيانات المفتوحة أي التي لم يعرف الحد الأدنى للفئة الأولى أو الحد الأعلى للفئة الأخيرة .

عيوب المنوال :

- (١) لا يأخذ في حسابه جميع القيم .
- (٢) قد يكون للبيانات أكثر من منوال وبالتالي لا معنى لإيراده في بعض الدراسات الإحصائية .

تمارين (٨ - ٣)

- (١) عرّف كلاً من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .
ولماذا تسمّى هذه المقاييس بالمتوسطات .
- (٢) اذكر مزايا وعيوب كل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .
- (٣) (أ) إذا كان استهلاك عشرة منازل من الكهرباء بمئات كيلو وات هي :
١٧، ٥، ٦، ٦، ٤، ١٢، ١٣، ٢، ٧، ٤، ٨، ٤، ١٢، ٤، ٨، ٤، ٩، ٢

فأوجد الوسط الحسابي للاستهلاك.

(ب) اطرح من القراءات السابقة الرقم ٤, ٤ تحصل على :

١٢, ٦, ١, ٢, ٢, ٧, ٦, ٨, ٨, ٣, ٤, ٨, ٤, ٤, ٨

ثم أوجد الوسط الحسابي. ماذا تلاحظ؟

(ج) اقسّم القراءات المعطاة في الفقرة (أ) على العدد ٤ تحصل على :

٤, ٢٥, ١, ٤, ١, ٦, ٣, ٣, ٣, ١, ٨٥, ٢, ١, ٣, ١, ٢, ١, ٢, ٣

ثم أوجد الوسط الحسابي لهذه البيانات. ماذا تلاحظ؟

(د) هل الوسط الحسابي في الحالات الثلاث ينطبق في قيمته مع إحدى القراءات؟

(٤) أخذت عيّنة مكوّنة من ٢٠٠ طالب من مدارس تحفيظ القرآن الكريم وصنّفت

نتيجة الأجزاء العشرة الأخيرة التي يحفظها الطلبة من القرآن الكريم كما في

الجدول التالي :

١٠	٩	٨	٧	٦	٤	٣	٢	١	عدد الأجزاء
١١	١٣	١٢	١٦	٣٢	٥٠	٣٥	١٩	١٢	عدد الطلاب

أوجد ما يلي :

(أ) الوسط الحسابي لعدد الأجزاء التي يحفظها الطلاب .

(ب) الوسيط لعدد الأجزاء .

(ج) المنوال لعدد الأجزاء .

(٥) إذا كانت أبعاد الطرق بالكيلومتر بين مكة المكرمة وعدد من المدن الأخرى

في المملكة العربية السعودية هي كما يلي :

طريف	جدة	تبوك	بريدة	الدمام	المدينة المنورة	الطائف	الرياض	المدينة
٢٧٢٢	٧٢	١١٣٣	٩١٥	١٤٥٦	٤٤٢	٨٨	٩٨٩	المسافة
عرعر	عنيزة	العلا	الخرج	حائل	الخبر	أبها	نجران	المدينة
٢٤٨٤	٩٦٨	٨٢٢	١٠٦٩	٨٩٤	١٤٥٢	٦٠٦	٨٩٨	المسافة

فأوجد ما يلي :

(أ) الوسط الحسابي لمسافة الطرق بين هذه المدن ومكة المكرمة.

(ب) الوسيط لمسافة الطرق بين هذه المدن ومكة المكرمة.

(ج) هل يوجد منوال لمسافات الطرق بين هذه المدن ومكة المكرمة؟

(٦) إذا كانت بيانات مبيعات مطعم المدرسة في ٢٥ يوماً كما يلي :

٥٥٠	٥٤٠	٤٦٠	٤٢٠	٢٣٠	علب العصير
٥	٥	٨	٤	٣	الأيام

١٥٠٠	١٤٢٠	١٤٠٠	٨٥٠	الدخل بالريال
٣	٩	٨	٥	الأيام

فاكتب تقريراً مختصراً للمعلم المشرف على المطعم مستخدماً المتوسطات التي درستها .

(٧) إذا علمت أن مجموع رواتب موظفي أحد الأقسام في إحدى المصالح الحكومية ٥٧١٢٠٠ ريالاً وكان متوسط راتب الموظف في هذا القسم هو ٥٦٠٠ ريال . فأوجد عدد الأفراد العاملين بهذا القسم .

(٨) أجرت إحدى شركات صناعة الملابس دراسة لأطوال عينة مكونة من ١٠٠ شخص اختيرت بطريقة مناسبة من إحدى القرى فكانت النتائج كما يلي :

- ١٦٠	- ١٥٠	- ١٤٠	- ١٣٠	الطول بالسنتيمتر
٢٠	٢٤	٣٦	٢٠	عدد الأشخاص

أوجد ما يلي :

(أ) الوسط الحسابي لأطوال الأشخاص .

(ب) الوسيط مستخدماً الطريقتين الحسابية والبيانية وقارن بينهما.

(ج) المنوال بالطريقتين الحسابية والبيانية وقارن بينهما.

(٩) في إحدى الدراسات الإحصائية عن الواردات اليومية لإحدى الدول

بملايين الريالات السعودية كانت النتائج التالية :

الوسيط = ٨٠ ، مجموع التكرارات للأيام التي استورد فيها = ٣٦٠

التكرار المتجمّع المناظر للحد الأدنى للفئة الوسيطة = ١٢٥ ،

التكرار المتجمّع المناظر للحد الأعلى للفئة الوسيطة = ١٩٥ ،

بداية الفئة الوسيطة = ٧٦ .

أوجد طول الفئة الوسيطة .

٨ - ٦ الانحراف المعياري :

درسنا في البند السابق المتوسطات أو مقياس النزعة المركزية. ومما يمكن ملاحظته على هذه المقاييس أنها لا تعطي فكرة كاملة عن خصائص التوزيعات التكرارية، وبالأخص لا توضح لنا مدى تجانس القراءات أي تباعدها، أو تقاربها عن أحد مقياس النزعة المركزية. لتوضيح ذلك ليكن لدينا مجموعتان من البيانات.

المجموعة الأولى : ١٤ ، ١٦ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢٠ ،

المجموعة الثانية : ٧ ، ٢٠ ، ١٠ ، ٤٢ ، ١ ،

نلاحظ أن الوسط الحسابي للمجموعة الأولى ١٦ وكذلك الوسط الحسابي للمجموعة الثانية ١٦ ولكن قراءات المجموعة الأولى متقاربة أو متجانسة، تقع بين ١٢ ، ٢٠ بينما قراءات المجموعة الثانية متباعدة أي غير متجانسة وتقع قيم قراءاتها بين ١ ، ٤٢ .

وبالمثل يمكن ملاحظة أن للمجموعتين المرتبتين تصاعدياً التاليتين :

المجموعة أ : ١٠، ١٣، ١٧، ١٩، ٢٠

المجموعة ب : ١، ٣، ١٧، ٣٥، ٩٠

الوسيط نفسه ١٧ بينما تتجانس قراءات المجموعة أ وتتباعد قراءات المجموعة ب. من ذلك نلاحظ أنه لا يمكن إجراء مقارنة متكاملة بين ظاهرتين من معرفة وسطيهما الحسابيين أو وسيطيهما، فقد تكون مفردات إحدى الظاهرتين متقاربة ومتجانسة بينما تكون مفردات الظاهرة الأخرى متباعدة عن بعضها البعض أي أكثر تشتتاً، لذلك سندرس في هذا البند أحد أهم المقاييس التي تحدّد مدى تباعد أو تقارب قراءات الظاهرة عن وسطها الحسابي، أي مدى تشتت هذه القراءات وهو (الانحراف المعياري) وهو من أكثر مقاييس التشتت استخداماً.

ونقدّم لك فيما يلي مفهوم الانحراف المعياري وطريقة حسابه في حالتنا
البيانات غير المبوّبة والبيانات المبوّبة .

البيانات غير المبوّبة :

إذا كانت لدينا n من القراءات وهي s_1, s_2, \dots, s_n ، ووسطها الحسابي \bar{s} ، تكون هذه القراءات متقاربة من بعضها إذا كانت قريبة من وسطها الحسابي \bar{s} ، أي إذا كانت انحرافات عن \bar{s} صغيرة. وبالتالي فإنه يمكن استخدام انحرافات القراءات عن وسطها الحسابي كمقياس للتشتت . ويمكننا أخذ متوسط هذه الانحرافات. وبما أن مجموع انحرافات القراءات لأي بيانات يساوي صفرًا، لأن بعض الانحرافات موجب والبعض الآخر سالب وتتلاشى قيم هذه الانحرافات مع بعضها، فلتجاوز هذه المشكلة نأخذ الوسط الحسابي لمربعات هذه الانحرافات بدلاً من الانحرافات نفسها ونحصل بذلك على التباين .

أي أن التباين ، ويُرمز له بالرمز σ^2 يحسب من العلاقة :

$$\sigma^2 = \frac{\sum (s_i - \bar{s})^2}{n}$$

ومن الواضح أنّ وحدات التباين هي مربع الوحدات الأصلية للقراءات ونظراً لأفضلية أن يكون لمقياس التشتت وحدات المفردات نفسها، نأخذ الجذر التربيعي للتباين كمقياس ويُسمى الانحراف المعياري أي أنّ:

تعريف (٨ - ٩):

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للوسط الحسابي لمربعات انحرافات القراءات عن وسطها الحسابي .

أي أنّ الانحراف المعياري ويُرمز له بالرمز σ هو:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (s - \bar{s})^2}{n}}$$

مثال (٨-٢١):

أوجد الانحراف المعياري للقراءات التالية: ١٥، ١٢، ١٠، ٩، ١٤

الحل:

نحسب أولاً قيمة الوسط الحسابي:

$$\bar{s} = \frac{\sum s}{n}$$

$$= \frac{١٥ + ١٢ + ١٠ + ٩ + ١٤}{٥}$$

$$= \frac{٦٠}{٥}$$

$$= ١٢$$

نكوّن جدولاً للحسابات يكون فيه العمود الأول للقراءات والعمود الثاني للفروق بين القراءات والوسط الحسابي والعمود الثالث لمربع الفرق. أما الصف

الأخير من العمود فيحتوي على مجموع كل من القراءات ومرَبَّعات فروفها عن الوسط الحسابي :

س	س - س	(س - س)²	
١٥	٣	٩	
١٢	٠	٠	
١٠	٢ -	٤	
٩	٣ -	٩	
١٤	٢	٤	
المجموع	—	٢٦	٦٠

ومن الجدول نجد أنَّ التباين هو :

$$\sum \frac{1}{n} (س - \bar{س})^2 = ٢٤$$

$$٢٦ \times \frac{1}{n} =$$

$$٥,٢ =$$

والانحراف المعياري هو :

$$\sqrt{\sum \frac{1}{n} (س - \bar{س})^2} = ٤$$

$$\sqrt{٥,٢} =$$

$$٢,٢٨ =$$

ملحوظة (٨ - ١) :

نقصد بالإشارة \sum التجميع من القراءة رقم ١ إلى القراءة رقم ن أي أن :

$$\sum s = s_1 + s_2 + \dots + s_n$$

ومن ذلك نجد خواص إشارة التجميع \sum وهي :

$$(1) \sum (s + v) = \sum s + \sum v$$

البرهان:

$$\begin{aligned} \sum (s + v) &= (s_1 + v_1) + (s_2 + v_2) + \dots + (s_n + v_n) \\ &= s_1 + v_1 + s_2 + v_2 + \dots + s_n + v_n \\ &= (s_1 + s_2 + \dots + s_n) + (v_1 + v_2 + \dots + v_n) \\ &= \sum s + \sum v \end{aligned}$$

$$(2) \sum (s + a) = \sum s + n \cdot a \text{ ، حيث } a \text{ مقدار ثابت .}$$

البرهان:

$$\begin{aligned} \sum (s + a) &= (s_1 + a) + (s_2 + a) + \dots + (s_n + a) \\ &= s_1 + a + s_2 + a + \dots + s_n + a \\ &= \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ مرة}} + s_1 + s_2 + \dots + s_n \\ &= n \cdot a + \sum s \end{aligned}$$

$$(3) \sum a \cdot s = a \sum s$$

البرهان:

$$\begin{aligned} \sum a \cdot s &= a_1 s_1 + a_2 s_2 + \dots + a_n s_n \\ &= a (s_1 + s_2 + \dots + s_n) \\ &= a \sum s \end{aligned}$$

(٤) يلاحظ من برهان العلاقة (٢) بأن $\Sigma = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1}{n} \Sigma (s - \bar{s})^2}$ صيغة مختصرة للانحراف المعياري :

الانحراف المعياري $\Sigma = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1}{n} \Sigma (s - \bar{s})^2}$ ويمكن كتابة صيغته المختصرة على الصورة :

$$\Sigma = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1}{n} \Sigma s^2 - \bar{s}^2}$$

ولبرهان صحة الصيغة المختصرة (للاطلاع فقط) نستخدم خواص إشارة التجميع Σ .
صيغة الانحراف المعياري السابقة هي :

$$\Sigma = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1}{n} \Sigma (s - \bar{s})^2}$$

$$= \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1}{n} \Sigma (s^2 - 2s\bar{s} + \bar{s}^2)}$$

$$= \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1}{n} \Sigma s^2 - 2\bar{s} \Sigma s + \bar{s}^2 \Sigma 1}$$

ولأن \bar{s} مقدار ثابت فإننا باستخدام الخاصية (٣) بالنسبة للحد الثاني داخل القوس والخاصية (٤) بالنسبة للحد الثالث ، نجد أن :

$$\Sigma = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1}{n} \Sigma s^2 - 2\bar{s} \Sigma s + \bar{s}^2 \Sigma 1}$$

$$= \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1}{n} \Sigma s^2 - 2\bar{s} \Sigma s + \bar{s}^2 \Sigma 1}$$

$$= \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1}{n} \Sigma s^2 - 2\bar{s} \Sigma s + \bar{s}^2 \Sigma 1}$$

$$= \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1}{n} \Sigma s^2 - 2\bar{s} \Sigma s + \bar{s}^2 \Sigma 1}$$

ومن الواضح أنَّ صيغة التباين المختصرة هي :

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum s^2 - \bar{s}^2$$

أي أنَّ التباين في صيغته المختصرة هو الفرق بين الوسط الحسابي لمربعات القراءات ومربع الوسط الحسابي للقراءات .

مثال (٨-٢٢) :

أوجد الانحراف المعياري لبيانات المثال (٨ - ٢١) السابق .

الحل :

نكوّن جدولاً من عمودين الأول للقراءات والثاني لمربعات القراءات ، ويكون الصف الأخير لمجموع القراءات ومجموع مربعاتها كما يلي :

س	س ^٢	
١٥	٢٢٥	
١٢	١٤٤	
١٠	١٠٠	
٩	٨١	
١٤	١٩٦	
$\sum s = 60$	$\sum s^2 = 746$	المجموع

ومن ذلك نجد أن :

$$\sum s = 60, \sum s^2 = 746$$

ويكون التباين :

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum s^2 - \bar{s}^2$$

$$\begin{aligned} &^2\left(\frac{60}{5}\right) - 746 \times \frac{1}{5} = \\ &^2(12) - 149,2 = \\ &144 - 149,2 = \\ &5,2 = \end{aligned}$$

ومن ذلك يكون الانحراف المعياري :

$$\begin{aligned} \sqrt{s^2} &= \sqrt{5,2} = 2,28 \\ \sqrt{5,2} &= 2,28 \end{aligned}$$

البيانات المبوبة :

من تعريف الانحراف المعياري في حالة البيانات غير المبوبة فإنه يمكن استنتاج صيغة الانحراف المعياري للبيانات المبوبة في جدول تكراري كما يلي :

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum k (s - \bar{s})^2} = s$$

حيث إنَّ : s ترمز لمراكز الفئات.

k التكرار المناظر لمركز الفئة.

n مجموع التكرارات = $\sum k$.

\bar{s} الوسط الحسابي = $\frac{\sum s k}{n}$

ولو استخدمت خواص إشارة التجميع \sum لوجدت أنَّ الصيغة المختصرة للانحراف المعياري في حالة البيانات المبوبة هي :

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum s^2 k - \bar{s}^2} = s$$

مثال (٨-٢٣):

أوجد الانحراف المعياري لبيانات أجور العمال في المثال (٨-٣) كما في الجدول (٨-١٣).

الحل:

في الجدول (٨ - ١٣)، لدينا مراكز الفئات والتكرارات، ولإيجاد الانحراف المعياري نكوّن جدولاً يكون العمود الأول فيه لمراكز الفئات s والعمود الثاني للتكرارات k والعمود الثالث لحاصل ضرب التكرارات في مراكز الفئات $s \cdot k$ والعمود الرابع لحاصل ضرب مربعات مراكز الفئات في التكرارات $s^2 \cdot k$ كما يلي:

مراكز الفئات s	التكرارات k	$s \cdot k$	$s^2 \cdot k$
٥٥	٨	٤٤٠	٢٤٢٠٠
٦٥	١٢	٧٨٠	٥٠٧٠٠
٧٥	١٤	١٠٥٠	٧٨٧٥٠
٨٥	٢٤	٢٠٤٠	١٧٣٤٠٠
٩٥	٨	٧٦٠	٧٢٢٠٠
١٠٥	٨	٨٤٠	٨٨٢٠٠
١١٥	٦	٦٩٠	٧٩٣٥٠
المجموع	٨٠	٦٦٠٠	٥٦٦٨٠٠

ومن ذلك نجد أنّ:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum s^2 \cdot k - \left(\frac{\sum s \cdot k}{n} \right)^2 \\ &= \frac{1}{80} \times 566800 - \left(\frac{6600}{80} \right)^2 \\ &= (82,5) - 70,85 = \\ &= 6806,25 - 70,85 = \\ &= 278,75 = \end{aligned}$$

ومن ذلك يكون الانحراف المعياري :

$$\sqrt{\frac{\sum \frac{1}{n} s^2 k - \bar{s}^2}{n}} = 5$$

$$\sqrt{\frac{278,75}{n}} =$$

$$16,696 =$$

تمارين (٨ - ٤)

(١) إذا كانت درجات طالب في الامتحان الشهري لخمس مواد دراسية هي كما يلي :
٧ ، ٤ ، ٦ ، ٩ ، ٨ فأوجد التباين والانحراف المعياري للدرجات .
(٢) (أ) كَوّن مجموعة من القراءات لها الوسط الحسابي نفسه وتختلف في انحرافها المعياري.

(ب) كَوّن مجموعة من القراءات لها الوسيط نفسه وتختلف في انحرافها المعياري.
(٣) في التمرين (٤) من مجموعة التمارين (٨-٣) كانت بيانات حفظ الأجزاء العشرة الأخيرة من القرآن الكريم لمائتي طالب كما يلي :

١٠	٩	٨	٧	٦	٤	٣	٢	١	عدد الأجزاء
١١	١٣	١٢	١٦	٣٢	٥٠	٣٥	١٩	١٢	عدد الطلاب

أوجد التباين والانحراف المعياري لعدد الأجزاء التي يحفظها الطلاب .
(٤) استخدم الانحراف المعياري في تقريرك عن مبيعات المطعم المعطاة في التمرين (٦) من التمارين (٨-٣) وذلك بالنسبة للانحراف المعياري لأعداد علب العصير المباعة.
(٥) إذا كان مجموع مربعات درجات طالب في المقررات الدراسية ٧٢٤١٠

والوسط الحسابي لدرجاته (مُعدَّله) ٨٥ فأوجد عدد المقررات الدراسية له
 إذا علمت أن الانحراف المعياري لدرجاته في هذه المقررات $\sigma = ٤$.
 (٦) في دراسة لكمية البنزين التي تستهلكها مجموعة من السيارات كانت النتائج كما يلي :

عدد الكيلومترات لكل جالون	٢٥ -	٢٧ -	٢٩ -	٣١ -	٣٣ -
عدد السيارات	٥	٧	٩	٥	٤

أوجد التباين والانحراف المعياري لعدد الكيلومترات لكل جالون .
 (٧) إذا كانت بيانات عدد الأفراد في ٥٠ أسرة كما يلي :

عدد الأفراد	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
عدد الأسر	٥	٧	٨	١٢	٩	٥	٤

فأوجد التباين والانحراف المعياري لعدد أفراد الأسرة .
 (٨) إذا كانت المصاريف اليومية بعشرات الريالات لعيتين من الأسر في
 مدينتين متجاورتين كما يلي :

العينة الأولى : ٢٤، ٢٠، ٢٦، ٢٥، ٣٠، ١٨، ٣٢ .

العينة الثانية : ٢٧، ٢٥، ٢٥، ٢٣، ٢٤، ٢٦ .

أي من العيتين السابقتين أكثر تشتتاً؟

(٩) إذا علمت أن الانحراف المعياري لعينة عددها ٩ هو ٢ ووسطها الحسابي ٨
 فأوجد σ^2 لهذه العينة .

تمارين عامة على الباب الثامن

(١) استخدم الأعمدة البيانية، والقطاعات الدائرية لتمثيل الجدول الآتي والذي يحتوي على ارتفاعات أعلى سبعة مباني ومنشآت في العالم .

المكان	الارتفاع بالأمتار	المبنى أو المنشأة
نيويورك	٣٨١	مبنى «الإمبير ستيت»
نيويورك	٣١٩	مبنى «كرايزلر»
باريس	٣٠٠	برج «إيفل»
نيويورك	٢٩٠	مبنى «وول ستريت»
نيويورك	٢٨٣	بنك مانهاتن
نيويورك	٢٥٩	مبنى «آرسي أيد مركز روكفلر»
نيويورك	٢٤١	مبنى «وولورث»

(٢) أوجد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لبيانات الجدول التالي الذي يوضح السرعة المدارية لكواكب المجموعة الشمسية .

الكوكب	عطارد	الزهرة	الأرض	المريخ	المشتري	زُحل	أورانوس	نبتون	بلوتو
السرعة كم/ث	٤٧,٨	٣٥,١	٢٩,٨	٢٤,١	١٣	٩,٧	٦,٨	٥,٥	٤,٨

(٣) أوجد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لمجموعة الأرقام التالية .

(أ) ٦٨, ٢, ٩, ٥, ٦, ٢, ٥, ٣

(ب) ٤٨, ٩, ٤٩, ٥, ٥١, ٦, ٤٨, ٧, ٥٠, ٣

(٤) إذا كانت درجات ٨٠ طالباً في مقرر الرياضيات في أحد الفصول الدراسية بجامعة الملك سعود هي كما يلي :

٧٣ ، ٥٥ ، ٥٩ ، ٦٢ ، ٦٨ ، ٧٣ ، ٧٥ ، ٨٤ ، ٨٨ ، ٩٠ ، ٩٥ ، ٥٧ ،
 ٦٠ ، ٦٨ ، ٧٦ ، ٨٢ ، ٨٨ ، ٩٣ ، ٩٦ ، ٦١ ، ٦٥ ، ٧١ ، ٧٩ ، ٨٢ ،
 ٨٥ ، ٩٣ ، ٩٥ ، ٩٩ ، ٦٦ ، ٧٤ ، ٧٥ ، ٨٣ ، ٨٧ ، ٩٤ ، ٦٠ ، ٩٧ ،
 ٥٦ ، ٦٩ ، ٧٢ ، ٧٥ ، ٨٠ ، ٨٩ ، ٥٨ ، ٧٤ ، ٧٨ ، ٨١ ، ٨٥ ، ٦٠ ،

٦٥ ، ٧١ ، ٧٨ ، ٨١ ، ٨٥ ، ٦٢ ، ٦٥ ، ٧٧ ، ٦٣ ، ٦٧ ، ٧٨ ، ٧٤ ،
 ٧٥ ، ٧٧ ، ٥٨ ، ٧٩ ، ٧٩ ، ٨٨ ، ٩٠ ، ٧٥ ، ٧٨ ، ٧٧ ، ٦٧ ، ٧٨ ،
 ٦٥ ، ٧٩ ، ٨٠ ، ٥٦ ، ٩٤ ، ٧٨ ، ٧١ ، ٧٣ .

فالمطلوب :

- (أ) حدّد قيمة أصغر درجة وأكبر درجة .
 (ب) استخدم الجدول التكراري لتمثيل هذه البيانات (يفضل أن يكون من ٩ فئات).
 (ج) أوجد الجدول التكراري النسبي والمئوي .
 (د) مثل هذه البيانات مستخدماً المصّلع التكراري، والمنحني التكراري .
 (هـ) أوجد الجدول المتجمّع الصاعد ومثله بيانياً .
 (و) أوجد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال مستخدماً البيانات المبوّبة (أي
 الجدول التكراري) .
 (ز) أوجد الانحراف المعياري لهذه البيانات مستخدماً الجدول التكراري .
 (٥) إذا كانت أوزان عيّنة تتألف من مئة طالب من جامعة الملك سعود بالرياض
 هي كما في الجدول الآتي :

التكرار	مركز الفئة
٥	٦١
١٨	٦٤
٤٢	٦٧
٢٧	٧٠
٨	٧٣

فأوجد ما يلي :

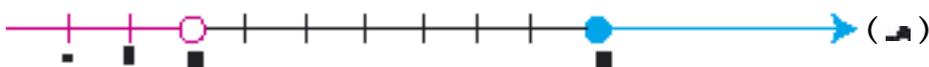
- (أ) الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .
 (ب) الانحراف المعياري .

إجابة تمارين الجزء الثاني

الباب الخامس:

التمارين (١ - ٥):

$$٠ = \sqrt{2}\sqrt{2-8}\sqrt{4-17}\sqrt{2-5}\sqrt{3} \quad (١)$$



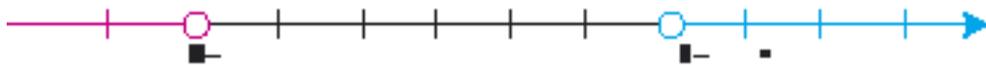
(٤) مجموعة الحل هي الفترة $(٧, -٣)$



(٥) مجموعة الحل هي: $[\frac{٤٤}{٣}, \frac{٤٨}{٣} -]$



(٦) مجموعة الحل هي: $(-\infty, -١) \cup (-٧, \infty -)$



(٧) مجموعة الحل هي المجموعة الخالية .

(٨) مجموعة الحل هي: $\{٣\} - [\frac{١}{٨}, \frac{٧}{٨}]$



(٩) مجموعة الحل هي : $[\frac{1}{2}, \infty -)$



(١٠) مجموعة الحل هي : $[-2, 1 -)$



(١١) مجموعة حل النظام هي : $[-9, 1]$.



(١٢) مجموعة حل النظام هي : $(-\infty, 11] \cup (-9, \infty -)$



(١٣) مجموعة الحل هي : $(-\infty, 5] \cup (4, 2)$



(١٤) طول الضلع الثالث يقع في الفترة $(9, 13)$.

(١٥) طول الضلع الرابع يقع في الفترة $(3, 23)$.

(١٦) السرعة المطلوبة تقع في الفترة $(5, 67, 5, 92)$

التمارين العامة :

(١) مجموعة الحل هي : $(-٢, ٨)$.



(٧) مجموعة الحل هي : $(-\infty, ٥] \cup (\frac{1}{٤}, -\infty)$.

الباب السادس :

التمارين (١-٦) :

[١] (أ) $\frac{٧}{١٨}$ ، (ب) $\frac{٥}{١٢}$ ، (ج) $\frac{٢}{٣}$ ،

(د) $\frac{٣}{٤}$ ، (أ) $\frac{٥}{٧٢}$ ، (ب) $\frac{١١}{٦}$ ،

[٢] (أ) ١٣٥° ، (ب) ٢٤٠° ، (ج) ٢٧٠° ،

(د) ١٢٠° ، (أ) ١٥٠° ، (ب) ٧٥° ،

[٣] المسافة التي قطعها عقرب الساعات = ٤ ، ٤ سم .

[٤] سرعة القمر الصناعي = ١١ ، ١٢٢ كلم / دقيقة .

[٥] طول القوس = ٠,٣ ، ٠ كم .

[٦] الميل البحري $\approx ١,٨٩$ كم .

[٧] (أ) ١٩٦,٢٥ سم ، (ب) ١٥٨,٤٦ م ،

(د) ۱۸, ۱۴ م.

(هـ) ۱۴۵, ۰۷ م ،

(ب) ۱, ۷ م ،

[۸] (أ) ۲, ۰۱ سم ،

(د) ۲ م.

(هـ) ۱, ۵۴ م ،

التمارين (۱-۲):

$$[۱] \text{ جتا} = \frac{۳}{۵}, \text{ جا} = \frac{۴}{۵}, \text{ ظا} = \frac{۴}{۳}, \text{ ظتا} = \frac{۳}{۴}$$

$$[۲] \text{ جتا} = \frac{۵}{۱۳}, \text{ جا} = \frac{۱۲}{۱۳}, \text{ ظا} = \frac{۱۲}{۵}$$

$$[۳] \text{ جاس} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}, \text{ ظاس} = \sqrt{۳}, \text{ ظتاس} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}, \text{ س} = ۶۰^\circ$$

$$[۴] \text{ جتا} = \frac{۱}{۳}, \text{ جا} = \frac{\sqrt{۲}}{۳}, \text{ ظا} = \sqrt{۲}, \text{ ظتا} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

التمارين (۱-۳):

$$[۱] \text{ جا} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}, \text{ ظا} = \sqrt{۳}, \text{ ظتا} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$[۲] \text{ جا} = \frac{۳}{۵}, \text{ جتا} = \frac{۴}{۵}, \text{ ظا} = \frac{۳}{۴}, \text{ ظتا} = \frac{۴}{۳}$$

$$[۴] \text{ جا} \hat{=} \hat{=} \frac{۳}{۱۳\sqrt{۲}}, \text{ جاب} \hat{=} \hat{=} \frac{۳}{۱۳\sqrt{۲}}$$

$$[۶] (أ) |اب| = \sqrt{۲}$$

$$(ب) \text{ جا} = \frac{۳}{۴}, \text{ جتا} = \frac{\sqrt{۷}}{۴}, \text{ ظا} = \frac{۳}{\sqrt{۷}}, \text{ ظتا} = \frac{\sqrt{۷}}{۳}$$

$$\frac{\sqrt{7}\sqrt{3}}{7} = \text{ظنا} \text{ هـ} , \frac{\sqrt{7}\sqrt{7}}{3} = \text{ظا} \text{ هـ} , \frac{3}{4} = \text{جتا} \text{ هـ} , \frac{\sqrt{7}\sqrt{7}}{4} = \text{جا} \text{ هـ} \text{ (هـ)}$$

التمارين (٤-٦) :

$$[١] \text{جتا} \text{ هـ} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{7}}{2} , \text{ظا} \text{ هـ} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{7}}{3} , \text{ظنا} \text{ هـ} = \sqrt{3}\sqrt{7}$$

$$[٢] \frac{7}{3} \text{ (هـ) ظا} \text{ هـ} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{2}}{15}$$

$$[٤] \text{جتا} \text{ هـ} \approx 0,86 , \text{جا} \text{ هـ} \approx 0,51 , \text{ظنا} \text{ هـ} \approx 1,7$$

$$[٦] \text{ هـ} = 45^\circ$$

التمارين (٥-٦) :

$$[١] (١) \text{جا} \text{ هـ} = 45 = \text{جتا} \text{ هـ} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{7}}{2} = 0,7071 \text{ (الجدول) .}$$

$$\text{جا} \text{ هـ} = 0,7071067 \text{ (الآلة الحاسبة) .}$$

$$[٢] 0,4305 , 0,9075 , 0,9769 , 0,6046 , 0,8901 , 0,5946$$

$$[٣] 58^\circ 49' , 30^\circ 48' , 36^\circ 55' , 57^\circ 42' , 30^\circ 48' , 30^\circ 67'$$

$$[٤] \text{ارتفاع المئذنة} \approx 0,28 , 26 \text{ م . } [٥] \text{طول الشجرة} = 17 , 19 \text{ م .}$$

$$\text{ارتفاع المنزل} = 0,31 \text{ م .}$$

$$[٦] \text{ارتفاع قمة الجبل} = 1081,53 \text{ م . } [٧] \text{ارتفاع التل} = 26,87 \text{ م .}$$

$$[٨] \text{المسافة التي سارها الرجل} = 2,46 \text{ م .}$$

$$[٩] \text{ارتفاع المئذنة} = \text{بعدها عن المبنى} = 23,66 \text{ م .}$$

$$[١٠] \text{عرض النهر} = 124,7 \text{ م .}$$

$$[١١] \text{البعد بين القريتين} = 505,49 \text{ م . } [١٢] \text{ارتفاع العمود} = 17,94 \text{ م .}$$

التمارين العامة :

$$[1] \left(\frac{1}{30} \right) \frac{7}{30}, 0,49, 0,28, 0, \frac{15}{12}$$

$$(ب) \frac{1}{4} \text{ راديان} : 39 \text{ } 28^\circ$$

$$1 \text{ راديان} = 17^\circ 57'$$

$$15^\circ = \frac{1}{12}$$

$$\frac{3}{4} \text{ راديان} = 85^\circ 57'$$

$$[2] \text{ طول القوس} = 0,79 \text{ سم} . [3] \text{ سرعة القمر} = 10205 \text{ كم / الساعة} .$$

$$[4] \text{ طول الضلع القائم الآخر} \approx 3,57 \text{ سم} .$$

$$[8] \text{ جا } 25^\circ = 0,4605 , \text{ ظنا } 17^\circ = 0,3780$$

$$[9] \text{ جا } 25^\circ = 0,460458 , \text{ ظنا } 17^\circ = 0,378201$$

$$[10] 30,31 \text{ م} . [11] \text{ المسافة بين الباخرتين} = 194,45 \text{ كم} .$$

إجابة تمارين الباب السابع

التمارين (٧-٢) :

$$(10) \frac{4}{3} \text{ ص} , (11) \text{ س} , (12) \frac{2}{3} \text{ س} , (13) \frac{1}{3} \text{ ص}$$

$$(14) 26 \text{ بليون كم} \quad (15) 0,15 \text{ ثانية} \quad (16) 1273 \text{ يوم تقريباً}$$

$$(17) 2,46 \times 10^4 \text{ كم} \quad (18) 8333 \text{ متراً} .$$

التمارين (٧-٣) :

$$(11) \frac{1}{6} \text{ ب} , (12) \frac{12 \text{ ص}}{9 \text{ ص}} , (13) 2 \text{ ب} + \frac{1}{3} \text{ ب} + \frac{1}{3} \text{ ب}$$

$$\frac{9}{2} \text{ (16) ، } \frac{4}{9} \text{ (15) ، } \frac{1+s}{s-1} \text{ (14)}$$

$$\text{، 9 (17) ، } 10 \times 3 \text{ (18) }^{-9} \text{ ثانية .}$$

التمارين (٤-٧) :

$$\sqrt{3} \sqrt{2} \text{ (1) ، } 2 \sqrt{2} (1-2\sqrt{2})^2 \text{ (2) ، } |5| \text{ (3) |س|}$$

$$|س-5| \text{ (4) ، } 2س-2\sqrt{س}+4 \text{ (5) ، } 10 \text{ (6) ، } 10$$

$$\sqrt{3}\sqrt{2}+5\sqrt{2} \text{ (7) ، } \frac{\sqrt{2}}{4} - \text{ (8) ، } \sqrt{2} \text{ (9) ، } 2-5\sqrt{2} \text{ (11) ، } 5\sqrt{2}+15\sqrt{2} \text{ (10)}$$

$$\sqrt{3}\sqrt{2}-13\sqrt{2} \text{ (13) ، } \sqrt{3}\sqrt{4+8}\sqrt{2} \text{ (12) ، } 26 \text{ (18) ، } 0,054 \text{ (17) ، } 441 \text{ (16) ، } 1600 \text{ (15)}$$

التمارين (٥-٧) :

$$\sqrt{5}\sqrt{2}-15\sqrt{2} \text{ (12) ، } 62 \text{ (11) ، } 4,5 \text{ (10) م،}$$

$$1+3\sqrt{4} \text{ (15) ، } \frac{1}{4} \text{ (14) ، } \sqrt{2}\sqrt{5} \text{ (13)}$$

$$1 \text{ (18) ، } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (17) ، } \sqrt[3]{2} \text{ (ب.أ) (16) ، } 1,866-3 \text{ (21) ، } 1,828-5 \text{ (20) ، } \frac{5}{12} \text{ (19)}$$

$$21,728 \text{ (23) ، } 1,866 \text{ (22) ، } 10$$

$$\begin{array}{ccc} 22, 61 (26) & , 360- & (24) 2, 8 (25) \\ \sqrt[13]{\frac{1}{2}} (29) & , \sqrt[3]{\frac{1}{2}} (28) & , 2 (27) \\ 1 (32) & , 9 (31) & , \text{س-ص} (30) \end{array}$$

التمارين (٦-٧):

$$\begin{array}{ccc} 3 (13) & , 1 (12) & , \frac{3}{4} (11) \\ 2- & (16) - \frac{1}{11} & , (15) 0, 5, 2 (17) & , 1 (14) \end{array}$$

التمارين (٧-٧):

$$\begin{array}{ccc} , 1 = \text{س} (3) & , -2, 5 = \text{س} (2) & , -4 = \text{س} (1) \\ 1, 5, 1 (6) & , 3 = \text{س} (5) & , \frac{1}{5} = \text{س} (4) \\ , 0, - & , \frac{7}{4} (10) & , 2- & , 1 (7) \\ 1, 7- & , (12) 0, 3- (13) & , 0, 6 (11) \end{array}$$

التمارين (٨-٧):

$$\begin{array}{ccc} \sqrt[4]{\frac{1}{2}} & (21) \sqrt[32]{8} (20) & , 4 (19) \\ & , 27 (23) & , \frac{3}{4} (22) \\ 1 (29) & , 3 \pm (25) & , 6 (24) \\ & 1 (34) & , 1 (30) \end{array}$$

التمارين (٩-٧):

$$(17) \text{ لو } (10) \text{ س } (10) \text{ لو } (1) \text{ لو } -23 & (5) \frac{3}{4} \text{ لو } \text{س} & (1) \text{ لو } -23$$

$$(18) \text{ لو } \frac{8 \text{ س}^2}{3 \text{ ص}} ، \quad (19) \text{ لو ص س} ، \quad (20) \text{ لو } \frac{3}{3 \text{ ب}}$$

$$(21) \text{ - لو } \frac{5}{1} ، \quad (22) \text{ لو } \frac{4}{2} ، \quad (23) 9$$

$$(24) 6 ، \quad (25) 64 ، \quad (26) 2 \text{ لو } \frac{3}{2}$$

$$(27) 1 ، 176 ، \quad (28) 2 ، 097 ، \quad (29) - 222 ، 0$$

$$(30) 0 ، 954 ، \quad (31) \{ 3 \} ، \quad (35) \{ 5 \}$$

التمارين (7 - 10) :

$$(25) 371 ، 5 ، \quad (26) 4266 ، 0 ، \quad (27) 0 ، 0017$$

$$(31) 6 ، 2442 ، \quad (32) 0 ، 001 \text{ ب}$$

التمارين (7 - 11) :

$$(1) 4 ، 86 ، \quad (2) 4 ، 05 ، \quad (3) 1 ، 98$$

$$(4) 0 ، 696 (6) ، \quad (5) 0 ، 41 (5) ، \quad 7 ، 45 -$$

$$(7) 5 ، 3 \times 10^{-6} ، \quad (8) 1132 ، 8 ، \quad (9) 2 ، 4 \times 10^{-7}$$

$$(10) 65079 ، 87 ، \quad (11) 1 ، 674 ، \quad (12) 46 ، 667855$$

$$(13) 0 ، 00253296 ، \quad (14) 2632 ، 1287 ، \quad (15) 12 ، 07 \text{ سم}$$

$$(16) 1 ، 187 \text{ دسم} ، \quad (17) 1 ، 225 ، \quad (18) 0 ، 1229016$$

التمارين العامة :

$$(27) \{ 3 ، 6 \} ، \quad (28) \{ 5 \} ، \quad (29) \{ 2 - ،$$

$$(30) \{ 2 ، 19013 \} (32) ، \quad (31) \{ 3 - ، 3 \} ، \quad (32) 2 ، 19013$$

$$\begin{array}{ccc} (33) \pm 0,37, 778, & (34) 5, & (35) 5 \\ (36) 4, & (37) 81, & (38) 10 \\ (43) \exists (0, \sqrt{10}), & (44) 1, 2116369, & (45) 1, 4069915 \\ (46) 11034525, & (47) 10^8 \times 1, 30805, & (48) 10^7 \times 1, 66395 \end{array}$$

إجابة تمارين الباب الثامن

التمارين (٨ - ٢) :

$$(6) (أ) 28, 0, (ب) 12, 0, (7) (أ) 72 \text{ سيارة.}$$

التمارين (٨ - ٣) :

$$\begin{array}{ccc} (4) (أ) 4, 91 \text{ جزءاً} & (ب) 4 \text{ أجزاء} \\ (5) (أ) 1063, 125 \text{ كم} & (ب) 941, 5 \text{ كم} \\ (8) (أ) 149, 4 \text{ سم} & (ب) 148, 3 \text{ سم} \\ (9) 5 \text{ مليون ريال تقريباً.} & (10) 145, 714 \text{ سم.} \end{array}$$

التمارين (٨ - ٤) :

$$\begin{array}{ccc} (1) \approx 1, 7205 \text{ درجة.} & (2) \approx 97, 49 \\ (3) \approx 2, 488 \text{ جزءاً} & (4) 97, 49 \\ (5) \approx 10 = \text{مقررات.} & (6) \approx 2, 52 \text{ كم.} \\ (7) \approx 1, 7046 = \text{فرداً.} & (8) 612 \\ (9) 612 & \end{array}$$

التمارين العامة :

$$\begin{array}{ccc} (3) (أ) 2, 5, 5, 12, 5 & (ب) 8, 49, 5, 49, 5, \text{ لا يوجد منوال.} \\ (5) (أ) 67, 45, 67, 429, 67, 346, 67 & (ب) 2, 92 \end{array}$$

