المملكة العربية السعودية
وزارة التربية والتعليم
التطوير التربوي

وزارة التربية والتعليم
MINISTRY OF EDUCATION

قررت وزارة التربية والتعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الرِّياضيَّات

للصف الثاني الثانوي

الفصل الدراسي الثاني

قسم العلوم الإدارية والاجتماعية

(بنين)

تأليف
مجموعة من المختصين

طبعة ١٤٢٨هـ ـ ١٤٢٩هـ
٢٠٠٧م ـ ٢٠٠٨م

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
السعودية، وزارة التربية والتعليم
الرياضيات : للصف الثاني الثانـوي : قسـم العلـوم الإدارية والاجتماعية
- الفصل الدراسي الثاني - ط ٥ - الرياض.
١٦٠ ص ؛ ٢١x٢٣ سم
ردمك : ٩ - ٢١٩ - ١٩ - ٩٩٦٠ (مجموعة)
٢ - ٢٢١ - ١٩ - ٩٩٦٠ (ج٢)
١ ـ الريـاضيـات ـ كتب دراسية
٢ ـ السعوديـة - التعليم الثـانـوي ـ كتب دراسيـة. أ ـ العنوان
ديوي ٧١٢، ٥١٠ **٢١٨٧ / ١٩**

رقـم الإيـداع : ٢١٨٧ / ١٩
ردمـك : ٩ - ٢١٩ - ١٩ - ٩٩٦٠ (مجموعة)
٢ - ٢٢١ - ١٩ - ٩٩٦٠ (ج٢)

لهذا الكتاب قيمة مهمّة وفائدة كبيرة فلنحافظ عليه ولنجعل نظافته تشهد على حسن سلوكنا معه...

إذا لم نحتفظ بهذا الكتاب في مكتبتنا الخاصة في آخر العام للاستفادة فلنجعل مكتبة مدرستنا تحتفظ به...

موقع الوزارة
www.moe.gov.sa

موقع الإدارة العامة للمناهج
www.moe.gov.sa/curriculum/index.htm

البريد الإلكتروني للإدارة العامة للمناهج
curriculum@moe.gov.sa

بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

الحمد للّه رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد وآله وصحبه.

أما بعد، فهذا هو الجزء الثاني من كتاب الرياضيات للصف الثاني الثانوي تم تأليفه لقسم العلوم الإدارية والاجتماعية .

يشمل هذا الكتاب خمسة أبواب هي :

١) الارتباط والانحدار.

٢) المتتابعات و المتسلسلات.

٣) الحساب التوافقي .

٤) الأرقام القياسية.

٥) الإحصاءات الحيوية .

نسأل اللّه تعالى أن يجعل من هذا الكتاب عونًا للطالب وللمعلم.

وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين.

المؤلفون

الفهـــــرس

الصفحة

الباب السادس

الارتبــاط والانحـــدار

الباب السادس

الارتبـاط والانحـدار

٦ ـ ١ مقدمـــة

كان اهتمامنا في الأبواب السابقة مركزاً على دراسة ظاهـرة واحـدة ، من حيث كيفية جمع المعلومات عنها ، وتمثيلها جدولياً وبيانياً ، وحساب بعض المعالم الإحصائية التي تفيدنا في وصف مثل هذه الظاهرة .

أما في هذا الباب فسنتطرق إلى دراسة العلاقة بين ظاهرتين وكيفية تمثيلها رياضياً . فإذا قمنا بحصر أوزان وأطوال طلاب أحد فصول السنة الثانية أدبي بإحـدى المدارس الثانـوية ، فإنـه سيكون لدينا مجموعة من القراءات عن ظاهرتين (أو متغيرين) ، هما ظاهرة الطـول وظاهـرة الوزن . ومن البديهي أن توجد بين هذين المتغيرين علاقة ، بمعنى أن وزن الطالب يتبع في تغيره ـ بصفة عامة ـ الطول . فكلما زاد طول الطالب زاد وزنه . وهذه العلاقة هي ما تسمى بالارتباط . ويقال أن هذين المتغيرين مرتبطان .

وليس من الضروري دائماً أن يتزايد أو يتناقص المتغيران معاً لتكون هناك علاقة بينهما ، وبالتالي يكونان مرتبطين. فهناك حالات تكون العلاقة بين المتغيرين عكسية ،بحيث يتزايد أحدهما بتناقص الآخر . ومثال ذلك العلاقة بين الحجم والضغط في الغـازات . فكلما ازداد الحجـم قل الضغط ، أو كلما ازداد الضغط قل الحجم . وبالتالي فإن هناك ارتباطاً بين المتغيرين ولكنه ارتباط عكسي أو سالب . أما في حالة العلاقة بين الوزن والطول فالارتباط طردي أو موجب .

والارتباط قد يكون تاماً ، بمعنى أن هناك علاقة رياضية تامة تربط بين المتغيرين بحيث إذا علمنا قيمة أحدهما ، نستطيع معرفة قيمة الآخر . فإذا كان هناك مربع طول ضلعه ٥ سم ، فإننا نعلم أن مساحته لا بد وأن تكون ٢٥ سم^{٢}.

وقد يكون الارتباط منعدماً ، بمعنى أنه لا توجد أي علاقة بين الظاهرتين . مثل العلاقة بين أوزان الطلاب ودرجاتهم في مادة الإحصاء .

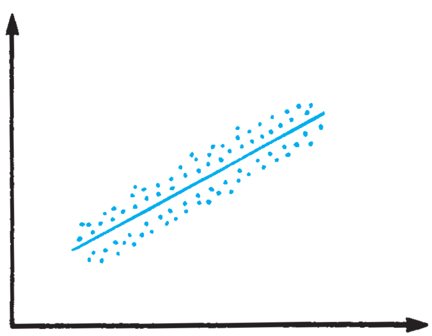
وبين الارتباط التام والمنعدم توجد درجات متفاوتة من الارتباط بين الظواهر .

وسنتعرض هنا لنوعين من الدراسة ، أحدهما يهتم بمقدار أو قوة العلاقة بين المتغيرين ، وهو ما يسمى بتحليل الارتباط . والآخر يهتم بإيجاد المعادلة الرياضية التي تمثل العلاقة بين الظاهرتين ، وهو ما يسمى بتحليل الانحدار .

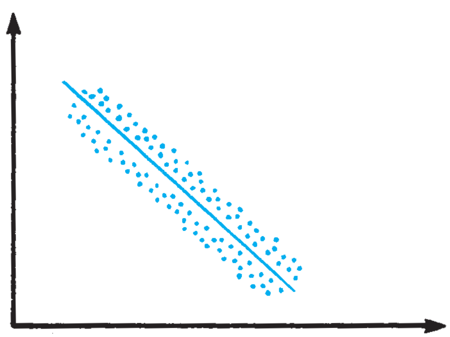
٦ ـ ٢ شكل الانتشار

إذا كان لدينا ظاهرتان س ، ص وأخذنا ن زوج من قيم هاتين الظاهرتين : ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) ، ($س_{٢}$ ، $ص_{٢}$) ، . . . ، ($س_{ن}$ ، $ص_{ن}$) ثم قمنا بتمثيل هذه القراءات بيانيا في مستوى الإحداثيات المتعامدة ، حيث يمثل المحور الأفقي الظاهرة س ، والرأسي الظاهرة ص ، فإننا نحصل على شكل يبين انتشار هذه النقط في المستوى ويسمى شكل الانتشار . ويبين شكل الانتشار منحنى العلاقة بين الظاهرتين مما يساعد على معرفة نوع ودرجة الارتباط بين الظاهرتين . فإذا كان الاتجاه العام للنقط في شكل الانتشار يمكن تمثيله بخط مستقيم كما في شكلي (أ) أو (ب) فإن العلاقة تكون خطية ويمكن تمثيلها بمعادلة خط مستقيم . كما نلاحظ أنه في شكل (أ) تكون العلاقة طردية ، أما في شكل (ب) فإن العلاقة عكسية .

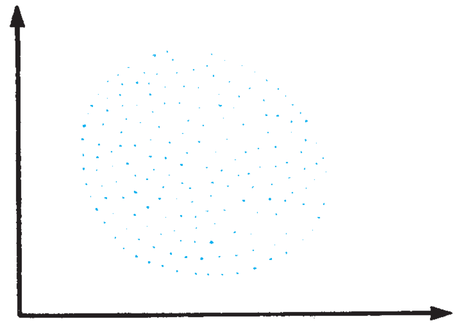
أما في حالة الارتباط المنعدم فإن النقط تنتشر بصورة عشوائية ، موضحة بذلك أنه لا علاقة بين المتغيرين ، أو أن المتغيرين غير مرتبطين كما في شكل (حـ) .



شكل (أ)



شكل (ب)



شكل (ح)

٦ ـ ٣ معامل الارتباط الخطّي (بيرسُون)

تقاس قوة الارتباط بين الظواهر بمقياس يسمى معامل الارتباط الخطي ، ويرمز له عادة بالرمز «ر». فإذا كان لدينا ن من أزواج القيم (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ، (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) ، . . . ، (س$_{ن}$ ، ص$_{ن}$)من الظاهرتين س ، ص فإن معامل الارتباط الخطي (بيرسون) يحسب من الصيغة :

$$ر = \frac{\frac{١}{ن} \sum س\, ص - \bar{س} . \bar{ص}}{ع_{س}\, ع_{ص}}$$

حيث أن

$\bar{س}$ = الوسط الحسابي للظاهرة س

$\bar{ص}$ = الوسط الحسابي للظاهرة ص

$ع_{س}$ = الانحراف المعياري للظاهرة س

$ع_{ص}$ = الانحراف المعياري للظاهرة ص

أي أنه لحساب معامل الارتباط يلزمنا الحصول على :

أ) الوسط الحسابي لكل من الظاهرتين س ، ص

ب) الانحراف المعياري لكل منهما .

حـ) مجموع حواصل ضرب كل من الظاهرتين ، أي $\sum$ س ص

بعض خصائص معامل الارتباط:

لمعامل الأرتباط الخطي بعض الخصائص الهامة نذكر منها :

(١) تكون ر موجبة في حالة الارتباط الطردي (الموجب).
(٢) تكون ر سالبة في حالة الارتباط العكسي (السالب) .
(٣) قيمة ر تساوي صفراً في حالة انعدام الارتباط.
(٤) قيمة ر تساوي + ١ في حالة الارتباط الطردي التام .
(٥) قيمة ر تساوي - ١ في حالة الارتباط العكسي التام .

ويلاحظ مما سبق أن قيمة معامل الارتباط ر تنحصر بين + ١ ، - ١ . وكلما اقتربت قيمة معامل الارتباط من + ١ أو - ١ كان هذا دليلاً على قوة الارتباط بين الظاهرتين . وكلما اقتربت قيمته من الصفر ، كان هذا دليلاً على انعدام الارتباط .

مثال (٦-١)

افترض أن س ، ص الموضحة في الجدول (٦ - ١) تمثل قيم ظاهرتين ، والمطلوب معرفة قوة الارتباط بينهما :

جدول (٦ـ١)

س	٣	٢	١	٤	٥
ص	٢	٤	٦	٨	١٠

الحـــل

لإيجاد معامل الارتباط يلزمنا حساب بعض المقادير المبينة في الجدول الآتي :

س	ص	س٢	ص٢	س ص
٣	٢	٩	٤	٦
٢	٤	٤	١٦	٨
١	٦	١	٣٦	٦
٤	٨	١٦	٦٤	٣٢
٥	١٠	٢٥	١٠٠	٥٠
١٥	٣٠	٥٥	٢٢٠	١٠٢

وبذلك يكـــون :

$$\overline{\text{س}} = \frac{١٥}{٥} = ٣$$

$$\overline{\text{ص}} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$$

$$\text{ع}_{\text{س}} = \sqrt{\frac{١}{\text{ن}} \sum \text{س}^{٢} - \overline{\text{س}}^{٢}}$$

$$= \sqrt{١١ - ٩}$$

$$= \sqrt{٢}$$

$$\text{ع}_{\text{س}} = \sqrt{\frac{١}{\text{ن}} \sum \text{ص}^{٢} - \overline{\text{ص}}^{٢}}$$

$$= \sqrt{٤٤ - ٣٦}$$

$$= \sqrt{٨}$$

ومن ذلك نجـــد أن :

$$ر = \frac{\frac{1}{ن} \sum س ص - \bar{س} \bar{ص}}{ع_س ع_ص}$$

$$= \frac{\frac{1}{٥} \times ١٠٢ - ٣ \times ٦}{\sqrt{٢} \sqrt{٨}}$$

$$= \frac{٢٠{,}٤ - ١٨}{\sqrt{١٦}}$$

$$= \frac{٢{,}٤}{٤}$$

$$= ٠{,}٦$$

ومن هذه النتيجة ، فإن الارتباط بين الظاهرتين طردي ولكنه ليس قوياً. فقيمة ر فوق المتوسط .

مثال (٦-٢)

الجدول الآتي يبين درجات عشرة طلاب في مادتي الرياضيات والفيزياء . أوجد معامل الارتباط:

جدول (٦-٢)

درجات الرياضيات	٦	٤	٧	٩	٨	٦	٧	٥	١٠	٨
درجات الفيزياء	٧	٦	٨	١٠	٩	٨	٧	٨	١٠	٧

الحـــل

كما في المثال السابق نعمل على تكوين جدول نحصل منه على $\sum$ س ، $\sum$ ص ،

$\sum$ س٬، $\sum$ ص٬، $\sum$ س ص كما يلي حيث س تمثل درجة الرياضيات ، ص تمثل درجة الفيزياء :

س	ص	س٬	ص٬	س ص
٦	٧	٣٦	٤٩	٤٢
٤	٦	١٦	٣٦	٢٤
٧	٨	٤٩	٦٤	٥٦
٩	١٠	٨١	١٠٠	٩٠
٨	٩	٦٤	٨١	٧٢
٦	٨	٣٦	٦٤	٤٨
٧	٧	٤٩	٤٩	٤٩
٥	٨	٢٥	٦٤	٤٠
١٠	١٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠
٨	٧	٦٤	٤٩	٥٦
٧٠	٨٠	٥٢٠	٦٥٦	٥٧٧

ومن ذلك نجد أن :

$$\bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{٧٠}{١٠}$$

$$= ٧$$

$$\bar{ص} = \frac{\sum ص}{ن}$$

$$= \frac{٨٠}{١٠}$$

$$= ٨$$

$$ع_س = \sqrt{\frac{١}{ن} \sum س^٢ - \bar{س}^٢}$$

$$= \sqrt{٥٢ - ٤٩}$$

$$= \sqrt{٣}$$

$$= ١,٧٣$$

$$ع_ص = \sqrt{\frac{١}{ن} \sum ص^٢ - \bar{ص}^٢}$$

$$= \sqrt{٦٥,٦ - ٦٤}$$

$$= \sqrt{١,٦}$$

$$= ١,٢٦$$

وبالتالي يكون معامل الارتباط:

$$ر = \frac{\frac{١}{ن} \sum س ص - \bar{س}\, \bar{ص}}{ع_س ع_ص}$$

$$= \frac{\frac{١}{١٠} \times ٥٧٧ - ٧ \times ٨}{١,٧٣ \times ١,٢٦}$$

$$= \frac{٥٧,٧ - ٥٦}{٢,١٨}$$

$$= \frac{١,٧٠}{٢,١٨}$$

$$= ٠,٧٨$$

ونلاحظ أن قيمة معامل الارتباط في هذا المثال موجبة وكبيرة نسبياً وبالتالي نستنتج أن هناك ارتباطاً طردياً قوياً بين درجات الطلاب في الرياضيات والفيزياء .

مثال (٦-٣)

لو قمنا بطرح كمية ثابتة من قيم كل من الظاهرتين في الجدول (٦ - ٣) ولتكن ٧ ، ٨ على التوالي ، نحصل على :

س	١ -	٣ -	٠	٢	١	١ -	٠	٢ -	٣	١
ص	١ -	٢ -	٠	٢	١	٠	١ -	٠	٢	١ -

حيث س تمثل درجة الرياضيات بعد طرح ٧، ص تمثل درجة الفيزياء بعد طرح ٨

وبتكوين جدول مماثل كما سبق (للحصول على معامل الارتباط) نجد أن:

س	ص	$س^{٢}$	$ص^{٢}$	س ص
-١	-١	١	١	١
-٣	-٢	٩	٤	٦
٠	٠	٠	٠	٠
٢	٢	٤	٤	٤
١	١	١	١	١
-١	٠	١	٠	٠
٠	-١	٠	١	٠
-٢	٠	٤	٠	٠
٣	٢	٩	٤	٦
١	-١	١	١	-١
٠	٠	٣٠	١٦	١٧

ومن ذلك يكون :

$\overline{س} = ٠$

$\overline{ص} = ٠$

$$ع_{س} = \sqrt{\frac{١}{ن} \sum س^{٢} \quad \overline{س}^{٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{١}{١٠} \times ٣٠ - ٠}$$

$$= \sqrt{٣}$$

$$= ١,٧٣$$

$$ع_{ص} = \sqrt{\frac{١}{ن} \sum ص^{٢} - \overline{ص}^{٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{١}{١٠} \times ١٦ - ٠}$$

$$= \sqrt{١,٦}$$

$$= ١,٢٦$$

وبالتالي فإن معامل الارتباط :

$$ر = \frac{\frac{١}{ن} \sum س\,ص - \overline{س}\,\overline{ص}}{ع_س \; ع_ص}$$

$$= \frac{\frac{١}{١٠} \times ١٧ - ٠ \times ٠}{١,٧٣ \times ١,٢٦}$$

$$= \frac{١,٧}{٢,١٨}$$

$$= ٠,٧٨$$

وهي النتيجة السابقة نفسها .

ويبين هذا المثال أن طرح كمية ثابتة من كل من الظاهرتين لا يؤثر على قيمة معامل الارتباط .
وهذا يعني أنه يمكن تبسيط العمليات الحسابية بطرح كمية ثابتة مناسبة من قيم كل من الظاهرتين .

مثال (٦-٤)

في الجدول (٦ - ٣) التالي ، الظاهرتان س ، ص عبارة عن الضغط ودرجة الحرارة لغاز ما . أوجد معامل الارتباط.

جدول (٦-٣)

س	٥٠	٥٢	٦٠	٦٢	٥٥	٥١
ص	١٧٠	١٦٣	١٤٨	١٤٥	١٥٥	١٦٧

الحـــل

من الجدول (٦ – ٣) نجد أن :

$$\bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}} = \frac{٣٣٠}{٦} = ٥٥$$

$$\bar{\text{ص}} = \frac{\sum \text{ص}}{\text{ن}} = \frac{٩٤٨}{٦} = ١٥٨$$

ولتبسيط عملية الحسابات نقوم بطرح كمية ثابتة من كل من الظاهرتين س ، ص ولتكن ٥٥ ، ١٥٨ على الترتيب (وذلك على سبيل المثال) وبتكوين جدول كالسابق نحصل على :

$\tilde{\text{س}} = \text{س} - \bar{\text{س}}$	$\tilde{\text{ص}} = \text{ص} - \bar{\text{ص}}$	$\tilde{\text{س}}^{٢}$	$\tilde{\text{ص}}^{٢}$	$\tilde{\text{س}}\tilde{\text{ص}}$
-٥	١٢	٢٥	١٤٤	-٦٠
-٣	٥	٩	٢٥	-١٥
٥	-١٠	٢٥	١٠٠	-٥٠
٧	-١٣	٤٩	١٦٩	-٩١
٠	-٣	٠	٩	٠
-٤	٩	١٦	٨١	-٣٦
٠	٠	١٢٤	٥٢٨	-٢٥٢

ومنه نجد أن:

$$\bar{\tilde{\text{س}}} = ٠$$

$$\bar{\tilde{\text{ص}}} = ٠$$

$$\text{ع}_{\text{س}} = \sqrt{\frac{1}{\text{ن}} \sum \text{س}^{2} - \bar{\text{س}}^{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{١}}{\text{٦}} \times \text{١٢٤} - \text{٠}}$$

$$= \sqrt{\text{٢٠,٦٦}}$$

$$= \text{٤,٥٥}$$

$$\text{ع}_{\text{ص}} = \sqrt{\frac{1}{\text{ن}} \sum \text{ص}^{2} - \bar{\text{ص}}^{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{١}}{\text{٦}} \times \text{٥٢٨} - \text{٠}}$$

$$= \sqrt{\text{٨٨}}$$

$$= \text{٩,٣٨}$$

وبالتالي فإن معامل الارتباط :

$$\text{ر} = \frac{\frac{1}{\text{ن}} \sum \text{س ص} - \bar{\text{س}}\,\bar{\text{ص}}}{\text{ع}_{\text{س}}\ \text{ع}_{\text{ص}}}$$

$$= \frac{\frac{\text{١}}{\text{٦}} \times (-\text{٢٥٢}) - \text{٠}}{\text{٤,٥٥} \times \text{٩,٣٨}}$$

$$= \frac{-\text{٤٢}}{\text{٤٢,٦٨}}$$

$$= -\text{٠,٩٨}$$

ونلاحظ في هذا المثال أن قيمة معامل الارتباط قريبة من − ١ وبالتالي فإن الارتباط بين الضغطوالحجم قوي جداً وعكسي .

٦ ـ ٤ معامل ارتباط الرّتب (سبيرمان)

كثيراً ما نصادف صعوبات في حساب معامل الارتباط الخطي بين ظاهرتين ، وذلك لكبر الأرقام وتفرقها بحيث لا يمكن تبسيطها كثيراً حتى لو استخدمنا طريقة طرح عدد ثابت من كل من الظاهرتين . كذلك لا يمكن حسابه في حالة البيانات الوصفية التي لا يمكن التعبير عنها رقمياً . وفي مثل هذه الحالات نلجأ لإيجاد قيمة تقريبية لمعامل الارتباط بين هاتين الظاهرتين بطريقة أبسط وأسرع في الحساب ، وذلك عن طريق حساب الارتباط بين رتب القراءات بدلاً من قيمها . في هذه الطريقة تعطى أصغر قراءة في الظاهرة الأولى الرتبة رقم ١ والقراءة التي أكبر منها مباشرة الرتبة رقم ٢ . . . وهكذا . ومن ثم نعيد نفس عملية الترتيب بالنسبة للظاهرة الثانية . ومنه يمكن حساب ما يسمى بمعامل ارتباط الرتب .

ونلاحظ أن الارتباط بين الرتب يتوافق في الاتجاه مع الارتباط بين القراءات الأصلية . ففي حالة الارتباط الطردي مثلاً حيث قيم س الكبيرة تصاحبها قيم كبيرة للظاهرة ص ، فإن الرتب الكبيرة للظاهرة الأولى تصاحبها عموماً رتب كبيرة أيضاً للظاهرة الثانية .

فإذا كان لدينا ن من أزواج القيم (س ، ص) تمثل ظاهرتين فإنه يمكن استنتاج معامل ارتباط الرتب (سبيرمان) من صيغة معامل الارتباط الخطي بعد التعويض عن القيم برتبها فنحصل على الصيغة التالية :

$$\text{ر} = 1 - \frac{6 \sum \text{ف}^2}{\text{ن}(\text{ن}^2 - 1)}$$

حيث ف هي الفروق بين رتب س ، ص

ومن الطبيعي أن يكون هناك بعض الاختلاف بين قيمتي معامل الارتباط للقراءات الأصلية (بيرسون) ومعامل ارتباط الرتب لهذه القراءات . وسبب ذلك يرجع إلى التعويض عن القراءات الأصلية برتبها .

ولحساب معامل ارتباط الرتب فإنه يجب حساب الفروق بين رتب الظاهرتين س ، ص ومربعات هذه الفروق .

مثال (٦-٥)

احسب معامل ارتباط الرتب للظاهرتين س ، ص كما هو مبين في الجدول (٦ – ٣) .

الحـــل

نتبع الخطوات المبينة في الجدول الآتي :

س	ص	رتب س	رتب ص	فروق الرتب ف	ف^{2}
٥٠	١٧٠	١	٦	– ٥	٢٥
٥٢	١٦٣	٣	٤	– ١	١
٦٠	١٤٨	٥	٢	٣	٩
٦٢	١٤٥	٦	١	٥	٢٥
٥٥	١٥٥	٤	٣	١	١
٥١	١٦٧	٢	٥	– ٣	٩
				المجموع	٧٠

يلاحظ أنه عند ترتيب القراءات اتبعنا ما يلي :

بالنسبة للظاهرة س أعطينا الرقم ٥٠ وهو أصغر قراءة الرتبة ١ (وذلك لأن الترتيب تصاعدي) . وأعطينا الرقم ٥١ الرتبة ٢ ، والرقم ٥٢ الرتبة ٣ ، والرقم ٥٥ الرتبة ٤ ، والرقم ٦٠ الرتبة ٥ ، والرقم ٦٢ الرتبة ٦

نكرر نفس عملية الترتيب للظاهرة ص كما هو مبين في الجدول السابق ، حيث يأخذ الرقم ١٤٥ الرتبة ١ ، والرقم ١٤٨ الرتبة ٢ وهكذا . . وبتطبيق القانون :

$$ر = ١ - \frac{٦ \sum ف^{٢}}{ن (ن^{٢} - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٦ \times ٧٠}{٦ (٣٦ - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٤٢٠}{٢١٠}$$

$$= ١ - ٢$$

$$= - ١$$

نلاحظ أن قيمة معامل الارتباط للرتب في هذا المثال تساوي - ١ وهي تساوي ـ تقريباً ـ قيمة معامل الارتباط للقيم الأصلية للقراءات كما في المثال رقم ٤

أي أن استخدام معامل ارتباط الرتب أظهر أن هناك ارتباطاً عكسياً تاماً بين الظاهرتين .

مثال (٦-٦)

أوجد معامل ارتباط الرتب للظاهرتين س ، ص والتي تمثل درجات ثمانية طلاب في مادتي التاريخ والجغرافيا من الجدول التالي :

درجات التاريخ (س)	٦	٤	٥	٩	٨	٦	٧	٥
درجات الجغرافيا (ص)	٧	٤	٤	١٠	٩	٨	٦	٤

الحـــل

لحساب معامل ارتباط الرتب يلزمنا تكوين الجدول التالي :

س	ص	رتب س	رتب ص	فروق الرتب ف	ف^{٢}
٦	٧	٣,٥	٥	-١,٥	٢,٢٥
٤	٤	١	٢	-١	١
٥	٤	٢	٢	٠	٠
٩	١٠	٨	٨	٠	٠
٨	٩	٦,٥	٧	-٠,٥	٠,٢٥
٦	٨	٣,٥	٦	-٢,٥	٦,٢٥
٧	٦	٥	٤	١	١
٨	٤	٦,٥	٢	٤,٥	٢٠,٢٥
				المجموع	٣١

يلاحظ أنه عند ترتيب القراءات في الجدول السابق اتبعنا ما يلي :

بالنسبة للظاهرة س أعطينا الرقم ٤ وهو أصغر قراءة الرتبة ١ ، وأعطينا الرقم ٥ الرتبة ٢ . ولكن هناك قراءتين متساويتين . وقيمة كل منهما ٦ ، ولذلك يجب أن تكون رتبتاهما متساويتين وهي عبارة عن الوسط الحسابي للرتبتين اللتين كانتا ستعطى لهما لو كانتا مختلفتين . أي أن رتبة كل من القراءتين تساوي $\frac{٣ + ٤}{٢}$ = ٣,٥ . ونكرر العملية لجميع قيم س ، حيث تعطى القيمة التي تليهما في الترتيب وهي القيمة ٧ الرتبة ٥ وهكذا . . .

أما بالنسبة للظاهرة ص فإن القراءة ٤ وهي أصغر قراءة تكررت ثلاث مرات ، وبالتالي فإن رتبة كل منهم تساوي $\frac{١ + ٢ + ٣}{٣}$ = ٢ ، ومن ثم فإن القراءة التي تليهما وهي القراءة ٦ تأخذ الرتبة ٤ وهكذا . . .

وبالتعويض في صيغة معامل ارتباط الرتـب :

$$\text{ر} = ١ - \frac{٦ \sum \text{ف}^{٢}}{\text{ن}(\text{ن}^{٢} - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٦ \times ٣١}{٨(٦٤ - ١)}$$

$$= ١ - \frac{١٨٦}{٥٠٤}$$

$$= ١ - ٠,٣٧$$

$$= ٠,٦٣$$

نلاحظ في هذا المثال أن قيمة معامل ارتباط الرتب موجبة وقيمته كبيرة إلى حد ما . وبالتالي فإن هناك ارتباطاً طردياً بين درجات الطلاب في مادتي التاريخ والجغرافيا .

مثال (٦-٧)

إذا كانت تقديرات خمسة طلاب في إحدى المواد في سنتين دراسيتين متتاليتين هما كالآتي :

التقدير في السنة الأولى (س)	جيد جداً	ممتاز	جيد	ممتاز	جيد
التقدير في السنة الثانية (ص)	جيد	جيد جدا	مقبول	ممتاز	ضعيف

والمطلوب : إيجاد معامل الارتباط بينهما .

الحـــل

نكون الجدول التـالي :

س	ص	رتب س	رتب ص	فروق الرتب ف	$\text{ف}^{٢}$
جيد جداً	جيد	٣	٣	٠	٠
ممتاز	جيد جداً	٤,٥	٤	٠,٥	٠,٢٥
جيد	مقبول	١,٥	٢	٠,٥ -	٠,٢٥
ممتاز	ممتاز	٤,٥	٥	٠,٥ -	٠,٢٥
جيد	ضعيف	١,٥	١	٠,٥	٠,٢٥
				المجموع	١

نلاحظ أن البيانات في هذا المثال وصفية ، وهي لا تختلف في الترتيب عن البيانات الكمية . فبالنسبة للظاهرة س نجد أن التقدير « جيد » تكرر مرتين وحيث أنه أقل التقديرات ، فيصبح رتبة كل منهما $\frac{١ + ٢}{٢}$ = ١,٥ ، ثم يعطى التقدير « جيد جداً » الرتبة ٣ ، والتقدير « ممتاز » تكرر مرتين فتكون رتبة كل منهما $\frac{٤ + ٥}{٢}$ = ٤,٥

أما بالنسبة للظاهرة ص ، فقد أعطى التقدير « ضعيف » الرتبة ١ ، ومقبول الرتبة ٢ وهكذا . . .

وبالتعويض في صيغة معامل ارتباط الرتب نحصل على :

$$= ١ - \frac{٦ \sum ف^٢}{ن (ن^٢ - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٦ \times ١}{٥ (٢٥ - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٦}{١٢٠}$$

$$= ١ - ٠,٠٥$$

$$= ٠,٩٥$$

نلاحظ أن معامل الارتباط موجب وقريب من الواحد . أي أن هناك ارتباطاً طردياً وقوياً بين تقديرات الطلاب في تلك المادة ولسنتين دراسيتين متتاليتين .

٦ ـ ٥ معادلة خط الانحدار

تكلمنا في البنود السابقة من هذا الباب عن الارتباط ومعناه وكيفية قياسه في الحالات المختلفة . وذكرنا أن مقاييس الارتباط تمكننا من معرفة درجة العلاقة بين ظاهرتين أو متغيرين . وبينا أنه إذا كان الارتباط تاماً فإن قيم الظاهرتين تقع كلها على خط مستقيم في شكل الانتشار . وإذا

كان الارتباط ضعيفاً ، فإن هذه القيم تكون مبعثرة بحيث لا يوجد رابط بينهما . وكلما كان الارتباط قوياً ، انحدرت أو قربت قيم كل من الظاهرتين من خط مستقيم يمثل العلاقة بينهما ، ويسمى هذا الخط « بخط الانحدار » . ويفيدنا خط الانحدار هذا في عملية التقدير أو التنبؤ . فعن طريق معادلة خط الانحدار يمكن إيجاد قيمة أحد المتغيرين إذا علمنا قيمة المتغير الآخر . وسنتعرض الآن لكيفية إيجاد معادلة خط الانحدار .

إذا فرضنا كما سبق أن لدينا ن من أزواج القيم (س ، ص) والتي تمثل ظاهرتين ، أي ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) ، ($س_{٢}$ ، $ص_{٢}$) ، . . . ، ($س_{ن}$ ، $ص_{ن}$) وعند رسم هذه القيم على الإحداثيات المتعامدة نجد أن شكل الانتشار يحتوي على ن نقطة . فإذا كانت هذه النقط تقع تقريباً على خط مستقيم ، فإن المطلوب هو إيجاد أفضل خط مستقيم يوفق بينها (وسنقتصر في هذا الكتاب على خطوط الانحدار المستقيمة) .

ويمكن رسم مثل هذا الخط المستقيم باليد ، ومن ثم بعملية هندسية بسيطة يمكن التوصل إلى الصورة الرياضية أو الجبرية لمعادلته . ولكن هذه الطريقة لإيجاد معادلة الخط المستقيم ليست دقيقة . لذا نلجأ إلى طريقة أدق تسمى طريقة المربعات الصغرى . وتتلخص هذه الطريقة في اختيار الخط المستقيم الذي يمر بين النقط بحيث يكون مجموع مربعات انحرافات النقط عن هذا الخط أصغر ما يمكن . ويلاحظ أنه عندما يكون مجموع المربعات صفراً فإن الارتباط يكون تاماً بين الظاهرتين ويمر الخط بجميع النقط . لنفرض أن معادلة أفضل خط مستقيم هي :

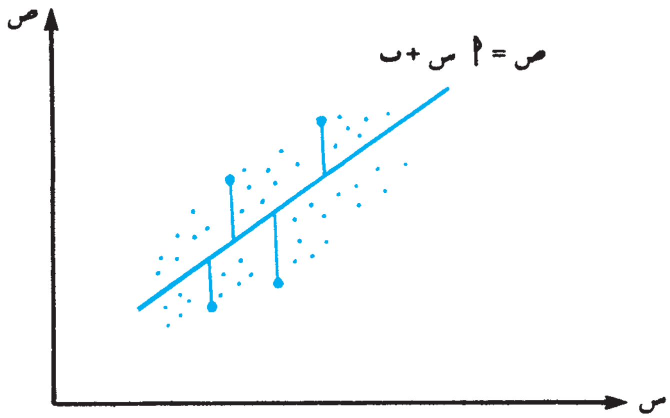
ص = ٲ س + ب (١)

وتسمى هذه المعادلة « بخط انحدار ص على س » حيث أن :

ٲ هي ميل خط الانحدار أو معامل الانحدار .

ب كمية ثابتة تمثل طول الجزء الذي يقطعه المستقيم من المحور الصادي (الرأسي) .

وبالتالي يصبح المطلوب هو إيجاد قيم ٲ ، ب بحيث يكون مجموع مربعات انحرافات النقط عن خط الانحدار ص = ٲ س + ب أصغر ما يمكن كما في الشكل التـالي :



تهدف طريقة المربعات الصغرى إلى إيجاد معادلة لهذا الخط بحيث يكون مجموع مربعات انحرافات (الأبعاد الرأسية) النقط أصغر ما يمكن (نهاية صغرى) .

ولإيجاد معادلة هذا الخط على الصورة (١) حيث إن ب هي الجزء المقطوع من محور الصادات ، أ هي ميل خط الانحدار ويسمى أيضًا بمعامل انحدار ص على س نجد أن قيم أ، ب التي تحقق هذا الشرط يمكن الحصول عليها بحل المعادلتين :

$$\text{مج ص} = \text{أ مج س} + \text{ن ب} \quad \text{—} \ (٢)$$

$$\text{مج س ص} = \text{أ مج س}^{٢} + \text{ب مج س} \quad \text{—} \ (٣)$$

وبقسمة المعادلة (٢) على ن (عدد المفردات) نجد أن :

$$\frac{\text{مج ص}}{\text{ن}} = \frac{\text{أ مج س}}{\text{ن}} + \text{ب}$$

$$\therefore \quad \text{ب} = \frac{\text{مج ص}}{\text{ن}} - \text{أ} \frac{\text{مج س}}{\text{ن}} \quad \text{—} \ (٤)$$

أي أن :

$$\boxed{\text{ب} = \bar{\text{ص}} - \text{أ} \, \bar{\text{س}}} \quad \text{—} \ (٥)$$

وبالتعويض عن قيمة ب في المعادلة (٣) ينتج أن :

$$\sum \text{س ص} = \text{أ} \sum \text{س}^{٢} + \sum \text{س} \left(\frac{\sum \text{ص}}{\text{ن}} - \text{أ} \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}} \right)$$

$$\sum \text{س ص} = \text{أ} \sum \text{س}^{٢} + \frac{\sum \text{س} \sum \text{ص}}{\text{ن}} - \text{أ} \frac{(\sum \text{س})^{٢}}{\text{ن}}$$

$$\sum \text{س ص} - \frac{(\sum \text{س})(\sum \text{ص})}{\text{ن}} = \text{أ} \left(\sum \text{س}^{٢} - \frac{(\sum \text{س})^{٢}}{\text{ن}} \right)$$

بقسمة الطرفين على ن :

$$\frac{\sum \text{س ص}}{\text{ن}} - \left(\frac{\sum \text{س}}{\text{ن}} \right) \left(\frac{\sum \text{ص}}{\text{ن}} \right) = \text{أ} \left(\frac{\sum \text{س}^{٢}}{\text{ن}} - \left(\frac{\sum \text{س}}{\text{ن}} \right)^{٢} \right)$$

$$\therefore \quad \text{أ} = \frac{\frac{١}{\text{ن}} \sum \text{س ص} - \bar{\text{س}}\bar{\text{ص}}}{\frac{\sum \text{س}^{٢}}{\text{ن}} - \bar{\text{س}}^{٢}} = \frac{\frac{١}{\text{ن}} \sum \text{س ص} - \bar{\text{س}}\bar{\text{ص}}}{\left(\frac{\sum \text{س}}{\text{ن}} - \text{س} \right) \text{س}}$$

$$\boxed{\text{أ} = \frac{\frac{١}{\text{ن}} \sum \text{س ص} - \bar{\text{س}}\bar{\text{ص}}}{\text{ع}^{٢}_{\text{س}}}} \quad \text{— (٦)}$$

أي أنه يمكن معرفة أ ، ب من المعادلتين (٥) ، (٦) لكي نحصل على معادلة خط انحدار ص على س

مثال (٦-٨)

أوجد معادلة خط انحدار ص على س حيث تمثل س سعر كيلو من الشاي بالريالات ، ص تمثل سعر كيلو من القهوة خلال الست سنوات الماضية :

س	٢	٣	٥	٧	٥	٨
ص	٥	٧	٧	٨	١١	١٣

الحـــل

لإيجاد معادلة خط انحدار ص على س نقوم بعمل جدول كما يلي :

	س	ص	س ص	$س^2$
	٢	٥	١٠	٤
	٣	٧	٢١	٩
	٥	٧	٣٥	٢٥
	٧	٨	٥٦	٤٩
	٥	١١	٥٥	٢٥
	٨	١٣	١٠٤	٦٤
المجموع	٣٠	٥١	٢٨١	١٧٦

ومن ذلك نجد أن :

$$\overline{س} = \frac{٣٠}{٦} = ٥$$

$$\overline{ص} = \frac{٥١}{٦} = ٨,٥$$

$$ع_{س}^{2} = \frac{١}{ن} \sum س^{2} - \overline{س}^{2}$$

$$= \frac{١}{٦} \times ١٧٦ - ٢٥$$

$$= ٢٩,٣٣ - ٢٥$$

$$= ٤,٣٣$$

$$أ = \frac{\frac{١}{ن} \sum س\,ص - \overline{س}\,\overline{ص}}{ع_{س}^{2}}$$

$$= \frac{\frac{١}{٦} \times ٢٨١ - ٥ \times ٨,٥}{٤,٣٣}$$

$$= \frac{٤,٣٣}{٤,٣٣}$$

$$= ١$$

$$ب = \bar{ص} - أ\ \bar{س}$$

$$= ٨,٥ - ١ \times ٥$$

$$= ٣,٥$$

وبذلك تكون معادلة خط الانحدار هي :

$$ص = س + ٣,٥$$

مثال (٦–٩)

أوجد معادلة خط انحدار ص على س لبيانات الجدول التالي :

س	١	٥	٩	١٣	١٧
ص	٧	٦	٩	٨	١٠

الحـــل

نوجد قيم $\sum$ س ، $\sum$ ص ، $\sum$ س ص ، $\sum$ $س^٢$ كما يلي :

س	ص	س ص	$س^2$
١	٧	٧	١
٥	٦	٣٠	٢٥
٩	٩	٨١	٨١
١٣	٨	١٠٤	١٦٩
١٧	١٠	١٧٠	٢٨٩
٤٥	٤٠	٣٩٢	٥٦٥

ومن ذلك نجد أن :

$$\overline{س} = \frac{٤٥}{٥} = ٩$$

$$\overline{ص} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$$

$$ع_س^2 = \frac{١}{ن} \sum س^2 - \overline{س}^2$$

$$= \frac{١}{٥} \times ٥٦٥ - ٨١$$

$$= ١١٣ - ٨١$$

$$= ٣٢$$

وتكون قيمة أ ، وقيمة ب كما يلي :

$$أ = \frac{\frac{١}{ن} \sum س\,ص - \overline{س}\,\overline{ص}}{ع_س^2}$$

$$= \frac{\frac{١}{٥} \times ٣٩٢ - ٩ \times ٨}{٣٢}$$

$$= \frac{٧٨,٤ - ٧٢}{٣٢}$$

$$= \frac{٦,٤}{٣٢}$$

$$= ٠,٢$$

$$ب = \overline{ص} - أ \, \overline{س}$$
$$= ٨ - ٠,٢ \times ٩$$
$$= ٨ - ١,٨$$
$$= ٦,٢$$

وبذلك تكون معادلة خط الانحدار هي :

ص = ٠,٢ س + ٦,٢

٦ ـ ٦ استخدام معادلة خط الانحدار

إن من أهم استخدامات خط الانحدار، بالإضافة إلى تمثيل العلاقة بين ظاهرتين أو متغيرين بصورة رياضية ، هو التقدير أو التنبؤ بقيم أحد المتغيرين عند معرفة قيم المتغير الآخر . وتسمى القيمة التي يتم الحصول عليها بالقيمة التقديرية .

مثال (٦-١٠)

لبيانات المثال (٦ – ٨) أوجد القيمة التقديرية للمتغير ص عندما تكون:

أولاً: س = ٤ ثانياً : س = ١١

الحــل

أولاً : عندما س = ٤ ريالات

من المثال ٨ نجد أن معادلة خط الانحدار هي :

ص = س + ٣,٥

بالتعويض عن قيمة س :

∴ ص = ٤ + ٣,٥

= ٧,٥

ثانياً: عندما س = ١١ ريالاً

فإنه بالمثل:

ص = ١١ + ٣,٥

= ١٤,٥

مثال (٦-١١)

لبيانات المثال (٦ – ٩) أوجد القيمة التقديرية للمتغير ص عندما تكون :

أولاً : س = ٠ ثانياً : س = ٦

الحـــل

من المثال (٩) نجد أن معادلة خط الانحدار هي :

ص = ٠,٢ س + ٦,٢

وبالتعويض عن قيمة س نجد أن :

أولاً: عندما س = ٠

∴ ص = ٠,٢ × ٠ + ٦,٢

= ٦,٢

ثانياً : عندما س = ٦

∴ ص = ٠,٢ × ٦ + ٦,٢

= ١,٢ + ٦,٢

= ٧,٤

الخلاصة

١ ـ تحليل الارتباط هو دراسة درجة العلاقة بين الظواهر .

٢ ـ تحليل الانحدار هو دراسة طبيعة العلاقة بين الظواهر رياضياً .

٣ ـ شكل الانتشار هو التمثيل البياني لقيم الظاهرتين .

٤ ـ يبين شكل الانتشار قوة ونوع العلاقة بين الظواهر .

٥ ـ معامل الارتباط الخطي (ارتباط بيرسون) يوضح درجة الارتباط بين ظاهرتين ويعطى بالصيغة :

$$\text{ر} = \frac{\frac{1}{\text{ن}} \sum \text{س ص} - \bar{\text{س}}\ \bar{\text{ص}}}{\text{ع}_{\text{س}}\ \text{ع}_{\text{ص}}}$$

٦ ـ معامل ارتباط الرتب (سبيرمان) هو :

$$\text{ر} = ١ - \frac{٦ \sum \text{ف}^{٢}}{\text{ن}\,(\text{ن}^{٢} - ١)}$$

٧ ـ معادلة خط الانحدار (ص على س) هي :

$$\text{ص} = \text{أ}\ \text{س} + \text{ب}$$

٨ ـ تستخدم معادلة خط الانحدار في تقدير قيمة أحد المتغيرين عند معرفة قيمة المتغير الآخر .

تماريــن (٦-١)

[١] ما الفرق بين تحليل الارتباط وتحليل الانحدار؟

[٢] احسب معامل الارتباط الخطي (بيرسون) ومعامل ارتباط الــرتب (سبيرمان) للـــظاهرتين س ، ص مستخدماً البيانات التالية :

س	٢	٤	٨	٦	١٠
ص	١	٢	٣	٤	٥

[٣] إذا أعطيت قيم س ، ص كما في الجدول التالي :

س	٢	٥	١١	١٤	١٧	٢٠
ص	٤	٤٠	٣٠	٢٥	٢٠	١٥

أوجد قيمة معامل الارتباط الخطي ومعامل ارتباط الرتب .

[٤] إذا كانت البيانات التالية تمثل أوزان وأطوال تسعة طلاب في الصف الأول الثانوي (مقربة لأقرب رقم صحيح) ، احسب معامل الارتباط الخطي ومعامل ارتباط الرتــب :

الوزن	٦١	٥٥	٥٦	٤٨	٥٥	٥٦	٥٥	٥٤	٦٠
الطول	١٧٥	١٦٦	١٦٧	١٤٣	١٦٥	١٦٨	١٦٧	١٥٨	١٧٠

[٥] احسب معامل الارتباط الخطي ومعامل ارتباط الرتب للعلاقة بين الضغط والحجم لسائل ما (مقربة لأقرب عدد صحيح) مستخدماً البيانات التالية :

الضغط	٥٠	٥٥	٤٥	٦٠	٤٠	٦٥
الحجم	٣١	٢٨	٣٥	٢٢	٣٩	١٩

[٦] احسب معامل ارتباط الرتب ومعامل الارتباط الخطي لدرجات عشرة طلاب من الصف الثاني الثانوي في مادتي القواعد والحديث كما في بيانات الجدول التالي :

درجات القواعد	٥	٨	٦	٥	١٠	٧	٦	٥	٩	٤
درجات الحديث	٤	٨	٧	٥	٩	٧	٥	٦	٩	٤

ثم علّق على النتيجة .

[٧] أوجد معامل ارتباط الرتب لتقديرات خمسة طلاب في مادتي اللغة العربية واللغة الإنجليزية وعلق على النتيجة :

تقدير اللغة العربية	جيد جداً	جيد	ممتاز	مقبول	ضعيف
تقدير اللغة الانجليزية	جيد	جيد	ضعيف	جيد جدا	ممتاز

[٨] إذا كان الجدول التالي يوضح أحجام ودخول ٧ أسر في إحدى المدن :

حجم الأسرة	كبير	كبير جداً	قليل	كبير	تحت المتوسط	متوسط	كبير جداً
دخل الأسرة	متوسط	كبير	قليل	متوسط	قليل	تحت المتوسط	متوسط

أوجد معامل ارتباط الرتب وعلّق على النتيجة .

[٩] أوجد معادلة خط الانحدار للظاهرتين س ، ص ثم أوجد قيمة ص التقديرية عندما تكون س = ٥:

س	٢	٤	٦	٨	١٠
ص	٣	١	٧	٥	٩

[١٠] أوجد معادلة خط الانحدار للظاهرتين س ، ص وكذلك القيمة التقديرية للظاهرة ص عندما تكون س = − ٣

س	− ٣	− ٢	− ١	٠	١	٢	٣
ص	٣٦	٣٣	٢٤	١٥	٩	٦	٣

[١١] أوجد معادلة خط الانحدار لدرجات الطلاب في مادتي القواعد س والحديث ص كما في السؤال السادس . واحسب القيمة التقديرية لدرجة طالب في الحديث إذا كانت درجته في القواعد ٩

[١٢] في إحدى مسائل الانحدار وجدنا أن :

ن = ١٨ ، $\overline{\text{س}}$ = ٦ ، $\overline{\text{ص}}$ = ٢٠ ، $\sum$ س^{٢} = ١٠٠ ، $\sum$ س ص = − ١٢٠

أوجد معادلة خط الانحدار .

[١٣] في دراسة العلاقة بين ظاهرتين حصلنا على المعلومات التالية :

ن = ٣٠ ، $\sum$ س = ١٥ ، $\sum$ ص = ٣٠ ، $\sum$ س ص = − ٣٠ ، $\sum$ س^{٢} = ١٠٠ ، $\sum$ ص^{٢} = ١٦٠

أوجد ما يلي :

أ ـ معادلة خط الانحدار ص = أ س + ب

ب ـ قيم ص التقديرية عندما تكون س = ٠,٧٥

حـ ـ معامل الارتباط الخطي (بيرسون) .

الباب السابع

المتتابعات والمتسلسلات

٧ ـ ١ المتتابعات

٧ ـ ٢ المتتابعة الحسابية

٧ ـ ٣ المتتابعة الهندسية

٧ ـ ٤ المتسلسلات المنتهية

٧ ـ ٥ بعض المجاميع الهامة

– الخلاصة

– تمارين عامة

الباب السابع

المتتابعات والمتسلسلات

٧ ـ ١ المتتابعات

المتتابعة هي مجموعة من الاعداد مرتبة وفقاً لترتيب معيَّن . فمثلاً الأعداد :

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

تمثل متتابعة مكونة من الاعداد الطبيعية الخمسة الأولى. العدد ١ هو الحد الأول للمتتابعة والعدد ٢ هو الحد الثاني وهكذا دواليك . وكذلك الأعداد:

١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١.

متتابعة تتكون من الاعداد الفردية الموجبة الستة الأولى وحدها الأول هو العدد ١ وحدها السادس هو العدد ١١ . وكل من المتتابعتين أعلاه متتابعة منتهية . ويمكن أن تتكون المتتابعة من عدد غير منته من الحدود مثل الاعداد:

$$١ ، \frac{١}{٢} ، \ldots ، \frac{١}{ن} ، \ldots$$

حيث $\frac{١}{ن}$ يمثل الحد النونى وحيث النقاط الثلاث بعد $\frac{١}{ن}$ نعنى أن حدود المتتابعة تستمر وفقاً للقاعدة نفسها ما لا نهاية وهذه المتتابعة يمكن كتابتها أيضاً على الصورة:

$$\left(د(ن) = \frac{١}{ن} \right) \quad ، ن \in ط$$

حيث ط مجموعة الاعداد الطبيعية ، وعليه فإن :

$د(١) = \frac{١}{١} = ١$ هو الحد الأول

$د(٢) = \frac{١}{٢}$ هو الحد الثاني

$د(٣) = \frac{١}{٣}$ هو الحد الثالث وهكذا.

ويمكننا الآن اعطاء تعريف للمتتابعة :

تعريف (٧-١)

المتتابعة هي دالة حقيقية ع مجالها مجموعة الاعداد الطبيعية ط (أو مجموعة جزئيـة من ط). ونقول إنها متتابعة منتهية إذا كان مجالها مجموعة جزئية منتهية من ط، وإلا فإننا نقول إنها متتابعة غير منتهية، ولكل ﻥ في مجال المتتابعة فإن ع (ﻥ) يسمى الحد النوني أو الحد العام للمتتابعة.

مثـــال (٧-١)

جد الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة غير المنتهية المعرفة بالقاعدة التالية:

ع (ﻥ) = ١ - ٥ ﻥ ، ﻥ ∋ ط.

الحـــل

لقيم ﻥ = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ نجد أن:

ع (١) = ١ - ٥ × ١ = - ٤

ع (٢) = ١ - ٥ × ٢ = - ٩

ع (٣) = ١ - ٥ × ٣ = - ١٤

ع (٤) = ١ - ٥ × ٤ = - ١٩

ع (٥) = ١ - ٥ × ٥ = - ٢٤

ملاحظـــة:

في المثال (٧-١) المتتابعة هي:

- ٤، - ٩ ، - ١٤ ، - ١٩ ، - ٢٤ ، . . . . ، ١ - ٥ ﻥ ، . . .

ويمكن كتابة الأزواج المرتبة التي تكوّن الدالة ع على النحو التالي:

{ (١ ، - ٤)، (٢ ، - ٩)، (٣ ، - ١٩)، . . . . . ، (ﻥ ، ١ - ٥ ﻥ)، . . . }

أي ع = { (ﻥ ، ١ - ٥ ﻥ) : ﻥ ∋ ط }

وعموماً أي متتابعة ع حدها النوني ع (ﻥ) يمكن كتابتها على النحو التالي:

ع = { (ﻥ ، ع (ﻥ)) : ﻥ ∋ ط }

ملاحظات :

(١) كثيراً ما تستخدم الرمز $ع_ن$ بدلاً عن ع (ن) للحد النوني للمتتابعة، وعليه يمكن كتابة :

$$ع = \{ (ن ، ع_ن) : ن \in ط \}$$

ومن الرموز المستخدمة أيضاً :

$(ع_ن)$، $ن \in ط$ أو $(ع_ن)_{ن=١}^{\infty}$

للتعبير عن متتابعة غير منتهية . وكذلك :

$(ع_ن)_{ن=١}^{م}$ للتعبير عن متتابعة تتكون من م حداً وحدها النوني هو $ع_ن$ لقيم ن = ١ ، ٢ ، . . . ، م .

(٢) ليس من الضروري وجود قانون معيّن للحد النوني لكل متتابعة . فمثلاً متتابعة الاعداد الأولية :

٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، . . .

ليس لها قانون معيّن يعطي الحد النوني لها . وفي هذه الحالة يجب كتابة العناصر كلها (إن كانت منتهية) أو ذكر صفة العناصر .

(٣) المتتابعتان $(ا_ن)$ ، $(ب_ن)$ متساويتان إذا كان مجال $(ا_ن)$ = مجال $(ب_ن)$ وكان $ا_ن = ب_ن$ لكل $ن \in$ مجال $(ا_ن)$.

مثال (٧-٢)

اكتب الحد العام لكل من المتتابعات التالية :

(١) ٢ ، ٢ ، ٢ ، . . .

(٢) ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، . . .

(٣) ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، . . .

(٤) ١ ، - ٤ ، ٩ ، - ١٦ ، ٢٥ ، - ٣٦ ، . . .

الحل

(١) هذه المتتابعة حدودها ثابتة وحدها العام هو:

$ع_ن = ٢$ ، لكل $ن \in ط$

(٢) المتتابعة ١، ٣، ٥، ٧، ٩، . . .

حدها الأول $ع_١$ = ١ = ٢ × ١ − ١

حدها الثاني $ع_٢$ = ٣ = ٢ × ٢ − ١

حدها الثالث $ع_٣$ = ٥ = ٢ × ٣ − ١

حدها الرابع $ع_٤$ = ٧ = ٢ × ٤ − ١

فيكون حدها النوني $ع_ن$ = ٢ ن − ١.

(٣) المتتابعة ١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥، . . .

حدها الأول $ع_١$ = ١ = $١^٢$

حدها الثاني $ع_٢$ = ٤ = $٢^٢$

حدها الثالث $ع_٣$ = ٩ = $٣^٢$

حدها الرابع $ع_٤$ = ١٦ = $٤^٢$

فيكون حدها النوني $ع_ن$ = $ن^٢$

(٤) المتتابعة ١، − ٤، ٩، − ١٦، ٢٥، − ٣٦، . . .

حدها الأول $ع_١$ = ١ = $(-١)^{١ + ١} \times ١^٢$

حدها الثاني $ع_٢$ = − ٤ = $(-١)^{٢ + ١} \times ٢^٢$

حدها الثالث $ع_٣$ = ٩ = $(-١)^{٣ + ١} \times ٣^٢$

حدها الرابع $ع_٤$ = − ١٦ = $(-١)^{٤ + ١} \times ٤^٢$

فيكون حدها النوني $ع_ن$ = $(-١)^{ن + ١} \times ن^٢$.

تمارين (٧ − ١)

اكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعات التالية:

(١) (٣ ن − ٤)   (٢) ($ن^٢$ + ٥)   (٣) $\left(\frac{١}{ن + ١}\right)$

(٤) $\left((-١)^ن \, ن\right)$ (٥) $\left(\frac{١}{ن(ن + ١)}\right)$

استنتج الحد النوني للمتتابعات التالية :

(٦) ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، . . . .

(٧) ١، - ١، ١، - ١، . . . .

(٨) أ، أ ر، أ $ر^{٢}$، . . . .

(٩) أ، أ + د، أ + ٢ د، أ + ٣ د، . . . .

٧ ـ ٢ المتتابعة الحسابيـة

المتابعة ١ ، ٤، ٧ ، ١٠، ١٣، . . . .

تتميز بأن كل حدٍ من حدودها (باستثناء الأول) يمكن الحصول عليه باضافة ٣ إلى الحد الذي يسبقه، أي أن :

$ع_{١}$ = ١

$ع_{٢}$ = ٤ = ١ + ٣ = $ع_{١}$ + ٣

$ع_{٣}$ = ٧ = ٤ + ٣ = $ع_{٢}$ + ٣

$ع_{٤}$ = ١٠ = ٧ + ٣ = $ع_{٣}$ + ٣

وهكذا فيكون الحد العام :

$ع_{ن+١}$ = $ع_{ن}$ + ٣ لكل ن ∈ ط

ومثل هذه المتتابعة، التي يكون الفرق فيها بين كل حدٍ والحد الذي يسبقه ثابتاً، تسمى متتابعة حسابية .

تعريف (٧-٢)

المتتابعة ($ح_{ن}$) تسمى متتابعة حسابية إذا حققت :

$ح_{١}$ = أ ، $ح_{ن+١}$ = $ح_{ن}$ + د ∀ ن ∈ ط، حيث أ، د عددان ثابتان .

يسمى أ الحد الأول ويسمى د الفرق العام أو الأساس للمتتابعة الحسابية .

من التعريف (٧-٢) نستنتج أن حدود المتتابعة الحسابية :

$ح_{١}$ = أ

$ح_{٢}$ = أ + د

$ح_3 = ح_2 + د = أ + 2 د$

$ح_4 = ح_3 + د = أ + 3 د$

وبالاستمرار على هذا المنوال نرى أن الحد النوني $ح_ن$ للمتابعة الحسابية هو :

$ح_ن = أ + (ن - 1) د$ حيث $ن \in ط$

ومن الأمثلة على المتابعات الحسابية مايلي :

(١) ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ، ن ،

متابعة الاعداد الطبيعية وفيها أ = ١ ، د = ١ .

(٢) ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، . . . . .

متابعة الاعداد الزوجية الموجبة وفيها : أ = ٢ ، د = ٢ .

(٣) ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، . . . . .

متابعة الاعداد الفردية الموجبة وفيها : أ = ١ ، د = ٢ .

مثال (٧-٣)

جد الحد العاشر للمتابعة الحسابية :

١ ، -١ ، -٣ ، -٥ ، . . .

الحــل

أ = ١ ، د = -١ - ١ = -٢

إذن $ح_{10} = أ + (10 - 1) د = 1 + 9 (-2) = -17$

مثال (٧-٤)

متابعة حسابية فيها $ح_3 = 2$ ، $ح_{15} = -46$. جد $ح_{50}$

الحــل

$ح_3 = أ + 2 د = 2$

$ح_{15} = أ + 14 د = -46$

بطرح المعادلتين نجد :

$-12 د = 48 \Leftarrow د = -4$

بالتعويض في المعادلة الأولى نجد :

$$أ - ٨ = ٢ \quad \Leftarrow أ = ١٠$$

$$\Leftarrow ح_{٥٠} = أ + ٤٩ د = ١٠ + ٤٩ (- ٤) = - ١٨٦ .$$

الأوســاط الحسابيــة :

تعريف (٧-٣)
الأوساط الحسابية بين العددين أ و ب هي الحدود الواقعة بين أ و ب بحيث تكوِّن هذه الحدود مع أ وَ ب متتابعة حسابية حدها الأول أ وحدها الأخير ب .

الوسط الحسابي بين العددين أ وَ ب هو العدد حـ بحيث أ، حـ، ب تكوِّن متتابعة حسابية ولذا :

$$حـ - أ = ب - حـ$$

$$\Leftarrow حـ = \frac{أ + ب}{٢}$$

أي أن حـ هو متوسط العددين أ و ب .

مثال (٧-٤)

أدخل ٥ أوساط حسابية بين العددين - ١٣ ، ٢٤٥ .

الحـــل

بادخال ٥ أوساط حسابية بين العددين - ١٣ ، ٢٤٥ نحصل على متتابعة حسابية من ٧ حدود حيث :

$$ح_{١} = أ = - ١٣$$

$$ح_{٧} = أ + ٦ د = ٢٤٥$$

$$\Leftarrow - ١٣ + ٦ د = ٢٤٥ \Leftarrow د = ٤٣$$

$\Leftarrow$ الأوساط الحسابية هي :

- ١٣ + ٤٣ = ٣٠ ، - ١٣ + ٢ × ٤٣ = ٧٣ ، - ١٣ + ٣ × ٤٣ = ١١٦ ،
- ١٣ + ٤ × ٤٣ = ١٥٩ ، - ١٣ + ٥ × ٤٣ = ٢٠٢

تماريـن (٧ - ٢)

جـد الحد المطلوب في المتتابعة المعطاة :

(١) $ح_{٢٠}$ في ١ ، صفر ، - ١ ، . . .

(٢) ح$_{ن}$ في $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، صفر، . . .

(٣) ح$_{ن}$ في ٢ س − ٣، ٢ س − ١، ٢ س + ١، . . .

(٤) ح$_{١٨}$ في − ٨، − ٣، ٢، . . .

(٥) ح$_{٢١}$ في س + ٢ ص، ٣ س + ٣ ص، ٥ س + ٤ ص، . . .

(٦) أدخل الأوساط الحسابية المطلوبة فيما يلي :

(أ) أربعة اوساطة حسابية بين ١ ، ٢١

(ب) وسطاً حسابياً بين ٨٣ ، − ٧٣

(٧) متتابعة حسابية حدها الرابع يساوي ١٨ وحدهـا السابع يساوي ٢٧ أكتب الحد الثامن عشر فيها.

(٨) متتابعة حسابية ينقص حدها الثامن عن حدها الثالث بمقدار ٢٠، والحد الثالث مثْلا الحد الثامن ماهي المتتابعة وماقيمة كلٍ من هذين الحدين ؟

(٩) أودع تلميذ في أول المحرم من عام ١٤٠٤ هـ مبلغ ٦٠ ريالًا في حساب التوفير وفي أول كل شهر بعد ذلك يزيد مايودعه بمقدار ٨ ريالات عن الشهر السابق له . فما المبلغ الذي أودعه في أول ذي الحجة من عام ١٤٠٤ هـ ؟

٧ ـ ٣ المتتابعة الهندسية

المتتابعة ٢ ، ٨ ، ٣٢ ، ١٢٨ ، ٥١٢ ، ....

تتميز بأن كل حد من حدودها (باستثناء الحد الأول) يمكن الحصول عليه من الحد الذي يسبقه بضـربة في ٤ أي أن:

ع$_{١}$ = ٢

ع$_{٢}$ = ٨ = ٢ × ٤ = ع$_{١}$ × ٤

ع$_{٣}$ = ٣٢ = ٨ × ٤ = ع$_{٢}$ × ٤

ع$_{٤}$ = ١٢٨ = ٣٢ × ٤ = ع$_{٣}$ × ٤

ع$_{٥}$ = ٥١٢ = ١٢٨ × ٤ = ع$_{٤}$ × ٤ وهكـــذا . . .

ومثل هذه المتابعة التي تكون فيها النسبة بين كـل حدٍ والحـد الذي يسبقـه ثابتـة، تسمى متتابعـة هندسية .

تعريف (٧-٤)

المتابعة ($ح_ر$) نسمى متابعة هندسية إذا حققت :

$ح_١ = أ$ ، $ح_{ر+١} = ح_ر \cdot ر$ $\forall$ ر $\in$ ط ، حيث أ ، ر عددان ثابتان .

يسمى أ الحد الأول ونسمي ر النسبة العامة للمتابعة أو أساس المتابعة الهندسية .

من التعريف (٧-٤) نستنتج أن حدود المتابعة الهندسية هي :

$ح_١ = أ$

$ح_٢ = ح_١ \cdot ر = أ ر$

$ح_٣ = ح_٢ \cdot ر = أ ر^٢$

$ح_٤ = ح_٣ \cdot ر = أ ر^٣$

وبشكل عام الحد النوني $ح_ر$ للمتابعة الهندسية هو :

$$ح_ر = أ \cdot ر^{ر-١} \quad \text{حيث } ر \in ط$$

ومن الأمثلة على المتابعات الهندسية :

(١) ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، . . . حيث أ = ٣ . ر = ٢

(٢) ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، . . . . حيث أ = ٢ ، ر = ٢

(٣) ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، . . . . حيث أ = ١ ، ر = $\frac{١}{٢}$

(٤) ٨ ، ٢ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، . . . . حيث أ = ٨ ، ر = $\frac{١}{٤}$

(٥) - ١ ، $\frac{١}{٣}$ ، - $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{٢٧}$ ، . . . . حيث أ = - ١ ، ر = $\frac{-١}{٣}$

مثال (٧-٦)

جد الحد العاشر للمتابعة الهندسية :

$\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، . . . .

الحـــل

$ح_١ = أ = \frac{١}{٨}$ ، $ر = \frac{١}{٤} \div \frac{١}{٨} = \frac{١}{٢} \div \frac{١}{٤} = ٢$

$ح_{١٠} = ا ر^{٩} = \frac{١}{٨} × ٢^{٩} = ٦٤$.

مثال (٧-٧)

أثبت أن $\frac{١}{٢٤٣}$ هو أحد حدود المتتابعة الهندسية ٢٧، ٩، ٣، . . .

الحــــل

$ا = ٢٧ ، ر = \frac{١}{٣}$

$\frac{١}{٢٤٣}$ هو أحد حدود المتتابعة إذا وجد عدد طبيعي $ن$ بحيث :

$$\frac{١}{٢٤٣} = ا . ر^{ن-١} = ٢٧ × (\frac{١}{٣})^{ن-١}$$

$$\Leftarrow ٣^{ن-١} = ٢٧ × ٢٤٣ = ٣^{٣} × ٣^{٥} = ٣^{٨}$$

$$\Leftarrow ن - ١ = ٨ \Leftarrow ن = ٩$$

$\Leftarrow \frac{١}{٢٤٣}$ هو الحد التاسع للمتتابعة المعطاة.

الأوســاط الهندسيــة :

تعريف (٧-٥)

الأوساط الهندسية بين العددين ا و ب هي الحدود الـواقعة بـين ا وَ ب بحيث تكون هـذه الحدود مع ا وَ ب متتابعة هندسية حدها الأول ا وحدها الأخير ب .

نلاحظ مثلاً أن الوسط الهندسي بين العددين ا و ب هو العدد حـ بحيث ا، حـ، ب تكون متتابعـة هندسية :

$$\Leftarrow \frac{حـ}{ا} = \frac{ب}{حـ} \Leftarrow حـ^{٢} = ا ب$$

$$\Leftarrow حـ = \sqrt{ا ب} \quad \text{أو} \quad حـ = -\sqrt{ا ب}$$

وهذا ممكن فقط إذا كان ا ب > ٠ . لذا فإن عدد الأوساط الهندسية التي يمكن إدخالها بين عددين يعتمد على اشارتي العددين.

مثال (٧-٨)

أدخل وسطين هندسيين بين -٧ ، $\frac{١٨٩}{٨}$

الحـــل

بادخال الوسطين الهندسيين نحصل على متابعة هندسية مكونة من ٤ حدود فيها ·

$ح_١ = م = -٧$ ، $ح_٤ = م ر^٣ = \frac{١٨٩}{٨}$

$\Leftarrow \frac{١٨٩}{٨} = م ر^٣ = -٧ ر^٣$

$\Leftarrow ر^٣ = -\frac{١٨٩}{٨ \times ٧} = \frac{-٢٧}{٨} = \left(\frac{-٣}{٢}\right)^٣ \Leftarrow ر = \frac{-٣}{٢}$

إذن الوسطان هما :

$(-٧) \times \left(\frac{-٣}{٢}\right) = \frac{٢١}{٢}$ ، $(-٧) \times \left(\frac{-٣}{٢}\right)^٢ = \frac{-٦٣}{٤}$

تماريـن (٧ - ٣)

في التمارين من (١) إلى (٥) جد الحد المطلوب في المتابعة المعطاة :

(١) $ح_{١٢}$ في : ١٦ ، -٤ ، ١ ، . . . .

(٢) $ح_{١٢}$ في : $\frac{١}{٥^٤}$ ، $\frac{١}{٥^٣}$ ، $\frac{١}{٥^٢}$ ، . . . .

(٣) $ح_٦$ في : $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٦}$ ، $٢\sqrt{٣}$ ، . . . .

(٤) $ح_{١٥}$ في : $\frac{س}{١ + ص^٢}$ ، $\frac{س^٢}{١ + ص^٢}$ ، $\frac{س^٣}{١ + ص^٢}$ ، . . . ، حيث س $\neq$ ٠

(٥) $ح_{١٠}$ في : $\frac{س}{ص}$ ، $-\frac{ص}{س}$ ، $\frac{ص^٣}{س^٣}$ ، . . . ، حيث س ص $\neq$ ٠

(٦) أدخل وسطين هندسيين بين العددين المعطيَيْن :

(أ) بين ٩ و ٢٤٣

(ب) بين ٥ و ١٠٠

(٧) متابعة هندسية حدها الرابع = ٦٤ وحدها السابع = - ٨ فما حدها الحادي عشر ؟

(٨) متابعة هندسية يزيد حدها الثالث عن حدها الثاني بمقدار ٦ ويزيد حدها الرابع عن حدها الثاني بمقدار ١٨ فما المتابعة ؟

٧ ـ ٤ المتسلسلات المنتهية

تعريف (٧-٦)

إذا كانت ($ح_ر$) متابعة منتهية مكونة من $ن$ حداً فإن الصيغة :

$$ح_١ + ح_٢ + \ldots + ح_ن$$

تسمى متسلسلة منتهية مكونة من $ن$ جداً.

يمكن كتابة الصيغة السابقة باستخدام الحد العام للمتابعة ورمز التجميع $\sum$ على

النحو : $\sum_{ر=١}^{ن} ح_ر$.

مثال (٧-٩)

اكتب كلاً من المتسلسلتين التاليتين بطريقة رمز التجميع :

(١) ٤ + ٩ + ١٤ . . . + ٥ ن − ١

(٢) ٧ + ١٢ + ١٧ + ٢٢

الحـــل

(١) الحد العام للمتسلسلة هو $ح_ر$ = ٥ ر − ١

⇐ كتابة المتسلسلة على الصيغة :

$$\sum_{ر=١}^{ن} (٥ ر − ١) .$$

(٢) المتابعة ٧، ١٢ ، ١٧ ، ٢٢ متابعة حسابية حدها الأول = ٧ والفرق العام = ٥

⇐ $ح_ر$ = ٧ + ٥ (ر − ١) = ٥ ر + ٢

⇐ المتسلسلة هي $\sum_{ر=١}^{٤} (٥ ر + ٢)$

مثال (٧-١٠)

اكتب المتسلسلة $\sum_{\text{ر}=١}^{٥} ٢ \times ٣^{\text{ر}}$ بصورة صريحة .

الحل

بالتعويض عن قيم ر بالاعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ فإن المتسلسلة المعطاة هي .

$$٢ \times ٣^{١} + ٢ \times ٣^{٢} + ٢ \times ٣^{٣} + ٢ \times ٣^{٤} + ٢ \times ٣^{٥}$$

$$= ٦ + ١٨ + ٥٤ + ١٦٢ + ٤٨٦$$

تعريف (٧-٧)

تسمى المتسلسلة المنتهية $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}}$ متسلسلة حسابية أو هندسية إذا كانت المتتابعة $(\text{ح}_{\text{ر}})$ حسابية أو هندسية على التوالى .

فمثلاً المتسلسلتان في مثال (٧-٩) حسابيتان بينما المتسلسلة في مثال (٧-١٠) هندسية .

مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية :

لتكن $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}}$ متسلسلة حسابية ، ولتكن المتتابعة $(\text{ح}_{\text{ر}})$

حدها الأول $\text{ح}_{١} = \text{أ}$ والفرق العام = د . وليكن $\text{جـ}_{\text{ن}}$ هو مجموع المتسلسلة .

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \text{ح}_{١} + \text{ح}_{٢} + \text{ح}_{٣} + \ldots + \text{ح}_{\text{ن}}$$

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \text{أ} + (\text{أ} + \text{د}) + (\text{أ} + ٢\text{د}) + \ldots + \left(\text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{د}\right)$$

وإذا عكسنا ترتيب الحدود في المجموع فإنه أيضاً يأخذ الصيغة :

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \left(\text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{د}\right) + \left(\text{أ} + (\text{ن} - ٢)\,\text{د}\right) + \ldots + (\text{أ} + \text{د}) + \text{أ}$$

وبجمع صيغتي $\text{جـ}_{\text{ن}}$ السابقتين بحيث تجمع كل حد في الصيغة الأولى إلى الحد الذي يقابله في الثانية :

$$٢\,\text{جـ}_{\text{ن}} = \left(٢\text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{د}\right) + \left(٢\text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{د}\right) + \ldots + \left(٢\text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{د}\right)$$

حيث عدد الحدود في الطرف الايسر = ن حداً :

$\Leftarrow 2\,\text{حـ}_{\text{ن}} = \text{ن}\,[\,2\text{أ} + (\text{ن} - 1)\,\text{د}\,]$

$$\Leftarrow \boxed{\text{حـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{2}\,[\,2\text{أ} + (\text{ن} - 1)\,\text{د}\,]} \qquad (1)$$

القانون (١) يعطي قيمه $\text{حـ}_{\text{ن}} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}}$ بدلالة عدد الحدود ن والحـد الأول أ والفرق العـام

ويمكن أيضاً اعطاء $\text{حـ}_{\text{ن}}$ بدلالة عدد الحدود ن والحد الأول أ والحد الأخير $\text{ح}_{\text{ن}}$. إذ أن :

$$\text{ح}_{\text{ن}} = \text{أ} + (\text{ن} - 1)\,\text{د}$$

فينتج مـن (١) أن :

$$\text{حـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{2}\,[\,2\text{أ} + (\text{ن} - 1)\,\text{د}\,] = \frac{\text{ن}}{2}\,[\,\text{أ} + \text{أ} + (\text{ن} - 1)\,\text{د}\,]$$

$$\Leftarrow \boxed{\text{حـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{2}\,[\,\text{أ} + \text{ح}_{\text{ن}}\,]} \qquad (2) \qquad \text{أي أن } \text{حـ}_{\text{ن}} = \text{ن}\,\left[\,\frac{\text{أ} + \text{ح}_{\text{ن}}}{2}\,\right]$$

وهذا يعني أن مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية هو حاصل ضرب عـدد الحدود في الوسط الحسابي للحدين الأول والأخير.

مثال (٧-١١)

جـد مجموع المتسلسلة الحسابية $\sum_{\text{ر}=1}^{15} \text{ح}_{\text{ر}}$

علماً بأن $\text{ح}_{6} = -4$ ، $\text{ح}_{13} = 10$.

الحـــل

$\text{ح}_{6} = \text{أ} + 5\,\text{د} = -4$

$\text{ح}_{13} = \text{أ} + 12\,\text{د} = 10$

بطرح المعادلة الأولى من الثانية :

$7\,\text{د} = 14 \Leftarrow \text{د} = 2$

وبالتعويض في المعادلة الأولى :

$\text{أ} + 10 = -4 \Leftarrow \qquad \text{أ} = -14$.

$$\sum_{ر=1}^{15} ح_ر = \frac{15}{2} [2أ + (15 - 1) د]$$

$$= \frac{15}{2} [-28 + 14 \times 2] = \text{صفراً} .$$

مثال (٧-١٢)

جد عدد حدود المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر$

علمـــاً بأن :

$ح_1 = 13$ ، $ح_ن = -5$ ، $\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر = 40$

الحــــل

$$\sum_{ر=1}^{ن} ح = \frac{ن}{2} (ح_1 + ح_ن) \Leftrightarrow$$

$$40 = \frac{ن}{2} (13 - 5) = 4 ن$$

$\Leftarrow$ ن = ١٠ حدود .

مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية :

لتكن $\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر$ متسلسلة هندسية وليكن الحد الأول للمتتابعة $(ح_ر)$ هو $ح_1 = أ$
والنسبة العامة $= ر$

وليكن $جـ_ن$ هو مجموع المتسلسلة :

$$جـ_ن = ح_1 + ح_2 + ح_3 + \ldots + ح_ن$$

$$جـ_ن = أ + أ ر + أ ر^2 + \ldots + أ ر^{ن-1}$$

وبضرب الطرفين في ر :

$$ر . جـ_ن = أ ر + أ ر^2 + أ ر^3 + \ldots + أ ر^ن$$

وبطرح المعادلة الأولى من الثانية :

$$ر جـ_ن - جـ_ن = أ ر^ن - أ \Leftrightarrow$$

$\text{ح}_{\text{ن}}\,(\text{ر} - ١) = \text{ا}\,(\text{ر}^{\text{ن}} - ١) \Leftarrow$

$$\boxed{\text{ح}_{\text{ن}} = \frac{\text{ا}\,(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١} \quad \text{، حيث } \text{ر} \neq ١ \, .}$$

أما إذا كانت $\text{ر} = ١$ فإن مجموع المتسلسلة يصبح :

$\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ا} + \text{ا} + \ldots + \text{ا}$ (ن حداً)

$\Leftarrow \text{ح}_{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{ا}\, .$

مثال (٧-١٣)

احسب مجموع المتسلسلة الهندسية : $\sum_{\text{ر}=١}^{١٠} ٢^{\text{ر}}$

الحـــل

$$\sum_{\text{ر}=١}^{١٠} ٢^{\text{ر}} = ٢^{١} + ٢^{٢} + ٢^{٣} + \ldots + ٢^{١٠}$$

الحد الأول $\text{ا} = ٢$ ، النسبة العامة $\text{ر} = ٢$ ، $\text{ن} = ١٠$

$$\Leftarrow \sum_{\text{ر}=١}^{١٠} ٢^{\text{ر}} = \frac{\text{ا}\,(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{(\text{ر} - ١)} = \frac{٢\,(٢^{١٠} - ١)}{٢ - ١}$$

$$= ٢\,(١٠٢٤ - ١) = ٢٠٤٦$$

مثال (٧-١٤)

جد عدد حدود المتسلسلة الهندسية $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} ٣^{\text{ر} - ٣}$

إذا علمت أن مجموعها $= \frac{٣٦٤}{٩}$

الحـــل

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} ٣^{\text{ر} - ٣} = ٣^{-٢} + ٣^{-١} + \ldots + ٣^{\text{ن}-٣} = \frac{٣٦٤}{٩}$$

$$\Leftrightarrow \frac{٣^{-٢}\,(٣^{\text{ن}} - ١)}{٣ - ١} = \frac{٣٦٤}{٩}$$

$$\Leftrightarrow \frac{٣^{ن} - ١}{١٨} = \frac{٣٦٤}{٩} \Leftrightarrow ٣^{ن} - ١ = ٧٢٨$$

$$\Leftrightarrow ٣^{ن} = ٧٢٩ = ٣^{٦}$$

$$\Leftrightarrow ن = ٦ \text{ حدود}$$

تمارين (٧ – ٤)

في التمارين من (١) إلى (٨) جد مجموع المتسلسلة المعطاة :

(١) $\sum_{ر=١}^{٥} (٢ر + ١)$

(٢) $\sum_{ر=١}^{٤} (٢ر + ٥)$

(٣) $\sum_{ر=١}^{١٥} (٣ر + ١)$

(٤) $\sum_{ر=١}^{٢٠} (٢ر - ١)$

(٥) $\sum_{ن=١}^{١٠} ٤^{ن}$

(٦) $\sum_{ن=١}^{١٠} ١٢\left(\frac{٣}{٢}\right)^{ن+١}$

(٧) $\sum_{ن=١}^{٧} \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن}$

(٨) $\sum_{ر=١}^{٥} ٣^{-ر}$

(٩) جد مجموع المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=١}^{١٩} ح_{ر}$ علماً بأن: $ح_{١٢} = ١٣٠$ ، $ح_{١٩} = ١١٦$

(١٠) جد مجموع المتسلسلة الهندسية $\sum_{ر=١}^{١٠} ح_{ر}$ علماً بأن. $ح_{٣} = \frac{١}{٣}$ ، $ح_{٦} = ٩$

(١١) جد قيمة ن إذا علمت أن $\sum_{ر=١}^{ن} (٣ر + ٥) = ٢١٥$

(١٢) جد قيمة $ن$ إذا علمت أن $\sum_{ر=1}^{ن} \left(\frac{٣}{٢}\right)^{ر} = \frac{١٩٥}{١٦}$

(١٣) إذا كان مجموع أول ٤٠ حداً من متتابعة حسابية هو ٤٣٠ ومجموع أول ٦٠ حداً هو ٩٤٥ فما هو حدها الخامس؟

(١٤) متتابعة هندسية حدها الأول ٣ والأخير ٤٨ فإذا كان كل حد هو مثلا الحد الذى يسقه فما هو مجموع حدودها؟

(١٥) $\{ح_ر\}$ متتابعة هندسية. إذا كان $ح_٣ = ١٤٤$ و$ح_٦ = ٤٨٦$ فما هو مجموع حدودها الخمسة الأولى؟

٧ ـ ٥ بعض المجاميع الهامة

بالإضافة إلى مجموع المتسلسلتين الحسابية والهندسية فهنالك بعض المجاميع التي كثيراً ما تستخدم في الرياضيات مثل:

(١) $$\sum_{ر=1}^{ن} ١ = ن$$

وذلك لأن $\sum_{ر=1}^{ن} ١ = ١ + ١ + \ldots + ١ = ن$

(٢) $$\sum_{ر=1}^{ن} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢}$$

وذلك لأن $\sum_{ر=1}^{ن} ر$ مجموع متسلسلة حسابية حدها الأول $ح_١ = ١$ وحدها الأخير $ح_ن = ن$ وعدد الحدود $= ن$

$$\Leftarrow \sum_{ر=1}^{ن} ر = ن\left(\frac{ح_١ + ح_ن}{٢}\right)$$

(٣) $$\sum_{ر=1}^{ن} ر^٢ = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$$

ولبرهان (٣) لاحظ أن:

$$(ر + ١)^{٣} - ر^{٣}$$

$$= ر^{٣} + ٣ر^{٢} + ٣ر + ١ - ر^{٣}$$

$$= ٣ر^{٢} + ٣ر + ١$$

وعليه يمكن كتابة:

$$\sum_{ر=١}^{ن} \left((ر + ١)^{٣} - ر^{٣} \right) = \sum_{ر=١}^{ن} (٣ر^{٢} + ٣ر + ١)$$

$$= ٣\sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} + ٣\sum_{ر=١}^{ن} ر + \sum_{ر=١}^{ن} ١$$

ولكن $\sum_{ر=١}^{ن} \left((ر + ١)^{٣} - ر^{٣} \right) = [٢^{٣} - ١^{٣}] + [٣^{٣} - ٢^{٣}] + [٤^{٣} - ٣^{٣}]$

$+ \ldots + [(ن + ١)^{٣} - ن^{٣}]$.

لاحظ في الطرف الأيسر من المعادلة الأخيرة أن الحد الأول في كل قوس يختزل مع الحد الثاني في القوس الذي يليه فلا يبقى سوى الحد الثاني من القوس الأول والحد الأول من القوس الأخير.

$$\Leftarrow \sum_{ر=١}^{ن} \left((ر + ١)^{٣} - ر^{٣} \right) = (ن + ١)^{٣} - ١^{٣} = (ن + ١)^{٣} - ١ .$$

$$\Leftarrow ٣\sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} + ٣\sum_{ر=١}^{ن} ر + \sum_{ر=١}^{ن} ١ = (ن + ١)^{٣} - ١$$

ولكن من (١) و (٢) نجد أن:

$$٣\sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} + \frac{٣ن(ن + ١)}{٢} + ن = (ن + ١)^{٣} - ١$$

$$\Leftarrow \sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} = \frac{١}{٣}\left[(ن + ١)^{٣} - \frac{٣ن(ن + ١)}{٢} - (ن + ١)\right]$$

$$= \frac{(ن + ١)}{٣}\left[(ن + ١)^{٢} - \frac{٣ن}{٢} - ١\right]$$

$$= \frac{(ن + ١)}{٦}\left[٢(ن + ١)^{٢} - ٣ن - ٢\right]$$

$$= \frac{(ن + ١)}{٦}(٢ن^{٢} + ن) = \frac{ن(ن + ١)(٢ن + ١)}{٦}$$

تمارين (٧ – ٥)

في كل من التمارين التالية أعطيت بعض الحدود الأولى لمتسلسله لا نهائية، اكتب الحد المطلوب:

(١) الحد الخامس عشر من : ٢ + ٦ + ١٠ + . . .

(٢) الحد الرابع والستين من : ١ + ٣ + ٥ + . . .

(٣) الحد العاشر من : ٥ + ٨ + ١١ + . . .

(٤) الحد التاسع من : ١٤ + ١٠ + ٦ + . . .

(٥) الحد العشرين من : ٥ + $\frac{١}{٢}$ ٤ + ٤ + . . .

(٦) الحد السابع من : ٢ + $\sqrt{٢}$ + $\sqrt{٢}$ + . + . . .

(٧) الحد التاسع والتسعون من: ٢ س + ٥ س + ٨ س + ...

(٨) الحد العاشر من: ١ + ٢ + ٤ + . . .

(٩) الحد الحادى عشر من: – ٦ – ٣ – $\frac{٣}{٢}$ + . . .

(١٠) الحد الخامس عشر من: $\sqrt{٢}$ + $\sqrt{١٠}$ + ٥ $\sqrt{٢}$ + . . .

الخلاصة

في هذا الباب درسنا:

(١) المتتابعات وهى دوال حقيقية مجالها مجموعة الاعداد الطبيعية ط (أو مجموعة جزئية من ط)

(٢) المتتابعة الحسابية وقاعدتها:

$ح_ن$ = ا + (ن – ١) ء حيث ا حدها الأول و ء فرقها العام.

المتتابعة الهندسية وقاعدتها:

$ح_ن$ = ا $ر^{ن-١}$ حيث ا حدها الأول و ر نسبتها العامة كما درسنا الأوساط الحسابية والهندسية.

(٣) مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية وعرفناه بالقانونين:

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢ ا + (ن - ١) ء]$$

$$و\ جـ_ن = \frac{ن}{٢} [ا + ح_ن]$$

وبمجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية وعرفناه بالقانون :

$$\text{ح}_{\text{ن}} = \begin{cases} \dfrac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - \text{١})}{\text{ر} - \text{١}} & : \text{ر} \neq \text{١} \\ \text{ن أ} & : \text{ر} = \text{١} \end{cases}$$

تمارين عامة

اكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعات التالية :

(١) $(\text{٤ن} + \text{١})$ (٢) $\left(\dfrac{\text{١}}{\text{ن}^{\text{٢}}} + \dfrac{\text{٥}}{\text{ن}}\right)$

(٣) $(\text{٢}^{\text{ن}} + \text{١})$ (٤) $\left(\dfrac{\text{١}}{\text{ن}(\text{ن} + \text{٣})}\right)$

استنتج الحد النوني للمتتابعات التالية :

(٥) $\dfrac{\text{١}}{\text{٢}} ، \dfrac{\text{١}}{\text{٤}} ، \dfrac{\text{١}}{\text{٨}} ، \dfrac{\text{١}}{\text{١٦}} ، \ldots$

(٦) $\text{٥} ، -\text{٥} ، \text{٥} ، -\text{٥} ، \ldots$

(٧) $\dfrac{\text{١}}{\text{٢}} ، \dfrac{\text{٢}}{\text{٣}} ، \dfrac{\text{٣}}{\text{٤}} ، \dfrac{\text{٤}}{\text{٥}} ، \ldots$

(٨) $\dfrac{\text{١}}{\text{٢}} ، -\dfrac{\text{٢}}{\text{٣}} ، \dfrac{\text{٣}}{\text{٤}} ، -\dfrac{\text{٤}}{\text{٥}} ، \ldots$

ادخل الأوساط المطلوبة فيما يلي :

(٩) ثلاثة أوساط حسابية بين ٥ ، ٢٩

(١٠) اربعة أوساط هندسية بين - ١ ، ٢٤٣

(١١) متتابعه حسابية حدها الرابع يساوى - ١ وحدها السابع يساوى - ٧ فما هو حدها العاشر؟

(١٢) متتابعه هندسية ينقص حدها الرابع عن حدها الأول بمقدار $\dfrac{\text{١٩}}{\text{٢٧}}$ ويزيد حدها الثاني عن حدها الثالث بمقدار $\dfrac{\text{٢}}{\text{٩}}$ فما هى المتتابعة.

حد مجموع المتسلسلات التالية :

(١٣) $\sum\limits_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{٦}} (\text{٥ر} + \text{٣})$ (١٤) $\sum\limits_{\text{ن}=\text{١}}^{\text{٧}} (\text{ن}^{\text{٢}} + \text{٢ ن})$

(١٥) $\sum\limits_{\text{ن}=\text{١}}^{\text{٦}} \left(\dfrac{\text{٧}}{\text{٩}}\right)^{\text{ن}}$ (١٦) $\sum\limits_{\text{ن}=\text{١}}^{\text{٩}} \text{٢}^{-\text{ن}}$

الباب الثامن

الحســاب التــوافقــي

الباب الثامن

الحساب التوافقي

٨ ـ ٢ مبدأ العدّ

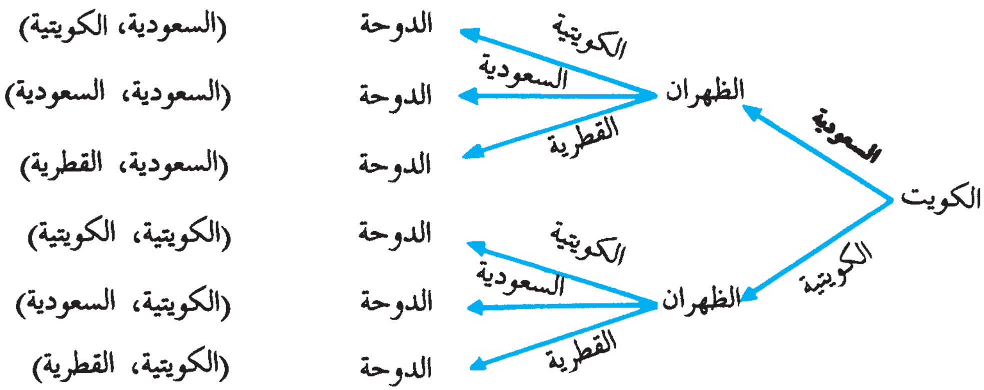
سنقدم لدراسة مبدأ العد بالمثال التالي:

مثال (٨-١)

يريد رجل أن يسافر من الكويت إلى الدوحة ماراً بالظهران، وبإمكانه أن يسافر من الكويت إلى الظهران على طائرة من طائرات إما الخطوط السعودية أو الخطوط الكويتية، ومن الظهران إلى الدوحة إما بالخطوط الكويتية أو السعودية أو القطرية.
كم طريقة للسفر يمكن أن يتخذها الرجل في رحلته من الكويت إلى الدوحة؟

الحل

سنستخدم المخطط التالي للوصول الى الجواب:



شكل (٣-١)

يسمى شكل (٣-١) مخطط الشجرة للرحلة التي تبدأ من الكويت وتنتهي في الدوحة. وكما هو واضح من الشكل فإنه توجد خيارات للسفر من الكويت إلى الظهران، إما بالخطوط السعودية أو بالخطوط الكويتية، ومن الظهران إلى الدوحة هناك ثلاثة خيارات لمواصلة الرحلة إلى الدوحة إما بالخطوط الكويتية أو بالخطوط السعودية أو بالخطوط القطرية. وعليه فإن الخيارات المتاحة للمسافر من الكويت الى الدوحة هي :

(السعودية، الكويتية)، (السعودية، السعودية)، (السعودية، القطرية)،
(الكويتية، الكويتية)، (الكويتية، السعودية)، (الكويتية، القطرية).

أي أنه توجد ست طرائق للسفر من الكويت إلى الدوحة.

هناك وسيلة أخرى للوصول إلي حل هذا المثال ، وهي أن تمثل طرائق السفر من **الكويت إلى الظهران بالمجموعة أ، وطرائق السفر من الظهران إلى الدوحة بالمجموعة ب، فيكون :**

أ = { السعودية، الكويتية }

ب = { الكويتية، السعودية، القطرية }

ويكون الجداء (حاصل الضرب) الديكارتي

أ × ب = { (السعودية، الكويتية) ، (السعودية ، السعودية) ، . . . ، (الكويتية، القطرية) } ممثلاً للخيارات المتاحة للمسافر بحيث يمثل كل عنصر في المجموعة أ × ب إحدى طرائق السفر الموضحة في مخطط الشجرة السابق.

نلاحظ هنا أن عدد عناصر المجموعة أ يساوي ٢، وعدد عناصر المجموعة ب يساوي ٣، وعدد عناصر المجموعة أ × ب يساوي ٦، فإذا استخدمنا الرمز د (س) للدلالة على عدد عناصر المجموعة س ، فإن عدد طرائق السفر المطلوبة في مثال (٣-١) هي:

د (أ × ب) = د (أ) × د (ب)

= ٢ × ٣

= ٦

مما سبق نستطيع صياغة مبدأ العد على إحدى الصورتين التاليتين:

١ - اذا كان هناك اجراء معين يمكن أن يتم بعدد $م_{١}$ من الطرائق، ثم يتبعه اجراء آخر يمكن أن يتم بعدد $م_{٢}$ من الطرائق، فإن الاجراءين يمكن أن يتما على التتابع بعدد $م_{١}$ × $م_{٢}$ من الطرائق.

٢ - إذا كانت $س_{١}$ مجموعة عدد عناصرها $م_{١}$ ، $س_{٢}$ مجموعة عدد عناصرها $م_{٢}$ فإن عدد عناصر المجموعة $س_{١}$ × $س_{٢}$ هو:

$$د(س_١ \times س_٢) = د(س_١) \times د(س_٢)$$

$$= م_١ \times م_٢$$

وعندما يكون لدينا عدة إجراءات متتابعة فإن مبدأ العد يأخذ الصيغة العامة التالية:

١ - إذا كان هناك عدد ك من الاجراءات المتتالية بحيث يمكن أن يتم الاجراء الأول بعدد $م_١$ من الطرائق، والاجراء الثاني بعدد $م_٢$ من الطرائق، والاجراء الثالث بعدد $م_٣$ من الطرائق، وهكذا الى أن نصل الى الاجراء الأخير والذي يمكن أن يتم بعدد $م_ن$ من الطرائق، فإن هذه الاجراءات جميعها يمكن أن تتم على التتابع بعدد $م_١ \times م_٢ \times م_٣ \times \ldots \times م_ن$ من الطرائق.

وفي صورته الرمزية يأخذ مبدأ العد الشكل التالي:

٢ - إذا كانت $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ... ، $س_ن$ مجموعات غير خالية

وكان $د(س_١)$ أي عدد عناصر المجموعة $= م_١$

$$د(س_٢) = م_٢$$

$$د(س_٣) = م_٣$$

.

.

.

$$د(س_ن) = م_ن$$

فـإن د (سه$_1$ × سه$_2$ × سه$_3$ × . . . × سه$_ن$) = م$_1$ × م$_2$ × م$_3$ × . . .
× م$_ن$ حيث مجموعة الجداء الديكارتي سه$_1$ × سه$_2$ × سه$_3$ × . . . × سه$_ن$
ـ كما هو معلوم ـ مكونة من جميع العناصر س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$ ، . . .
، س$_ن$ حيث س$_1$ ∈ سه$_1$ ، س$_2$ ∈ سه$_2$ ، س$_3$ ∈ سه$_3$ ، . . .
، س$_ن$ ∈ سه$_ن$

مثال (٨-٢)

يقدم مطعم ثلاثة أصناف من اللحم وصنفين من السلطة وأربعة أصناف من الحلوى. كم عدد الوجبات المختلفة التي يمكن تقديمها بحيث تتكون كل منها من لحم وسلطة وحلوى في هذا المطعم؟

الحـــل

واضح أنه مع كل صنف من أصناف اللحم الثلاثة يمكن تقديم واحد من صنفين من السلطة، فيكون لدينا ٣ × ٢ = ٦ خيارات من اللحم والسلطة. ومع كل واحد من هذه الخيارات الستة يمكن تقديم واحد من أربعة أصناف من الحلوى، فيكون مجموع الخيارات الممكنة من اللحم والسلطة والحلوى هو ٦ × ٤ = ٢٤ .

ولكي نضع الحل في الصيغة الرمزية لمبدأ العد فإننا نفرض أن:

سه$_1$ هي مجموعة أصناف اللحوم، فيكون د (سه$_1$) = ٣

سه$_2$ هي مجموعة أصناف السلطة، فيكون د (سه$_2$) = ٢

سه$_3$ هي مجموعة أصناف الحلوى، فيكون د (سه$_3$) = ٤

إذاً $د(س_1 \times س_2 \times س_3) = ٣ \times ٢ \times ٤$

$= ٢٤$

وهو عدد الوجبات المختلفة التي يمكن تقديمها في المطعم.

مثال (٨-٣)

كم عدداً مكوناً من رقمين يمكن تكوينه باستخدام الأرقام ٢ ، ٣ ، ٤

(أ) عندما يسمح بتكرار الرقم (ب) عندما لا يسمح بتكرار الرقم.

الحـــل

حيث إن الأعداد المطلوب تكوينها مكونة من رقمين: رقم الآحاد ورقم العشرات،

فإننا نفرض أن:

$س_1$ هي مجموعة أرقام الآحاد

$س_2$ هي مجموعة أرقام العشرات

(أ) عندما يسمح بتكرار الرقم فإن:

$س_1 = س_2 = \{٢ ، ٣ ، ٤\}$

أي أن:

$د(س_1) = د(س_2)$
$= ٣$

فيكون عدد الأعداد التي يمكن تكوينها

د ($س_{١} \times س_{٢}$) = ٣ × ٣ = ٩

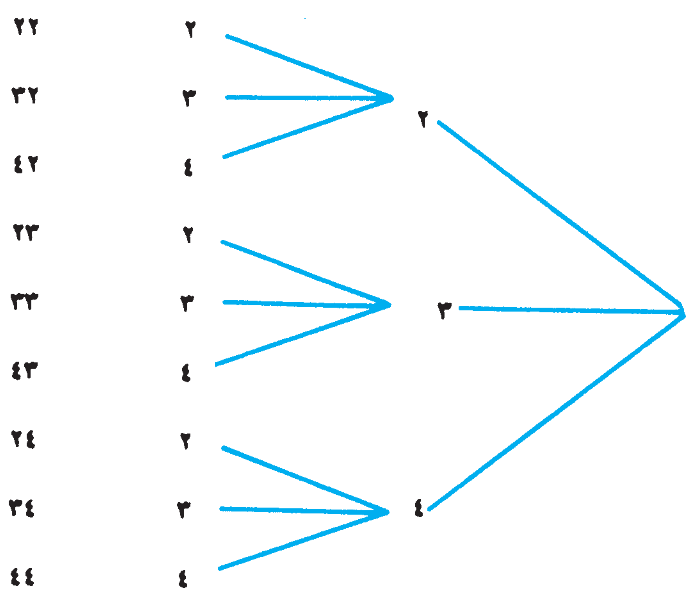
(ب) عندما لا يسمح بتكرار الرقم فإن لكل اختيار لرقم الآحاد من المجموعة {٢ ، ٣ ، ٤} يوجد خيـاران فقط لرقم العشرات، فيكـون عدد طـرائق تكوين الأعداد المطلوبة في هذه الحالة يساوي ٣ × ٢ = ٦

مثال (٨-٤)

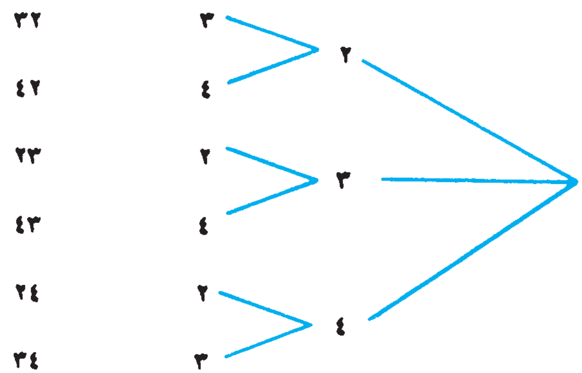
استخدم مخطط الشجرة للحصول على الأعداد المطلوبة في المثال السابق.

الحـــل

(أ) عندما يسمح بتكرار الرقم نحصل على المخطط التالي:



(ب) عندما لا يسمح بتكرار الرقم.



تماريـن (٨ - ١)

١ - إذا كان لديـك ٥ زهرات حمـر، ٧ بيض، ٣ صفر، وأردت أن تصنـع باقـات صغيرة تشتمل كـل منها عـلى زهرة حمـراء وزهرة بيضـاء وزهرة صفـراء، فكم يكون عدد الباقات؟ ارسم مخطط الشجرة لتـوضيح اجـابتك، علماً بـأنه يمكن تمييز زهرات كل لون.

٢ - أراد لاعب تنس أن يختـار كرتـين من كرات التنس من صنـدوق بـه ٨ كـرات مختلفة. بكم طريقة يمكنه ذلك إذا كان يختارها واحدة بعد الأخرى؟

٣ - لنفرض أنك تريد أن تسافر من المدينة أ إلى المدينة حـ مـاراً بالمـدينة ب. فـإذا كان هناك ٤ طرق مختلفة تربط أ ، ب ولا يوجد سوى طـريقين مختلفـين بين ب ، حـ ، فبكم طريقة يمكن إن تسافر من أ إلى حـ؟ أرسم مخـطط الشجرة لاستنتاج الخيارات المتاحة لك.

٤ ـ كم عدداً مكوناً من أربعة أرقام يمكن تكوينه باستخدام الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٩ بحيث:

(أ) يسمح بتكرار الرقم (ب) لا يسمح بتكرار الرقم؟

٥ ـ بكم طريقة يمكن إهداء طالب متفوق ثلاثة كتب مكونة من كتاب في اللغة الانكليزية، وكتاب تاريخ، وكتاب علوم، مختارة من خمسة كتب في اللغة الانكليزية، وسبعة كتب تاريخ، وثلاثة كتب علوم، علماً بأن جميع الكتب مختلفة؟

٦ ـ لدينا قطعة نقود معدنية على أحد وجهيها صورة وعلى الآخر كتابة، قذفنا بها بحيث سقطت على مائدة مستوية فظهر أحد الوجهين. إذا قذفنا القطعة مرتين فما هي النتائج الممكنة من حيث ظهور الصورة أو الكتابة؟ ارسم مخطط الشجرة لتوضيح اجابتك. كم عدد الحالات التي تظهر فيها الصورة مرة واحدة فقط؟ كم عدد الحالات التي تظهر فيها الصورة مرة واحدة على الأقل؟

٧ ـ لنفرض أن قطعة النقود المذكورة في التمرين السابق قذفت ثلاث مرات.

ارسم المخطط الشجري للنتائج الممكنة وحدد ما يلي:

(أ) عدد الحالات التي تظهر فيها الصورة مرة واحدة والكتابة مرتين.

(ب) عدد الحالات التي تظهر فيها الصورة مرتين والكتابة مرة واحدة.

(حـ) عدد الحالات التي تظهر فيها الصورة ثلاث مرات.

(ء) عدد الحالات التي لا تظهر فيها الصورة.

(هـ) عدد الحالات التي تظهر فيها الكتابة مرة واحدة على الأقل.

٨ ـ ٢ التباديـــل

مثال (٨-٥)

بكم طريقة يمكن ترتيب أربعة كتب مختلفة على الرف؟

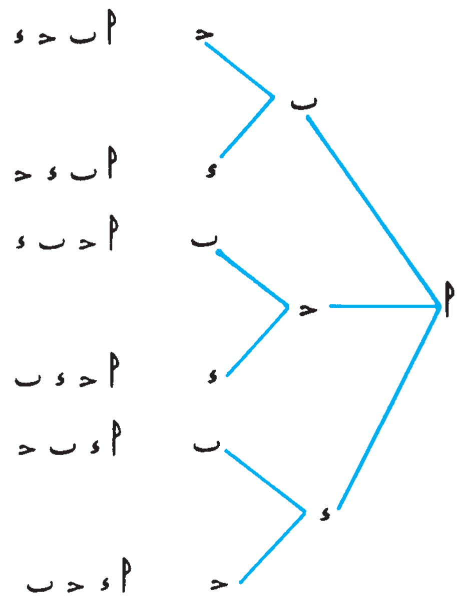
الحـــل

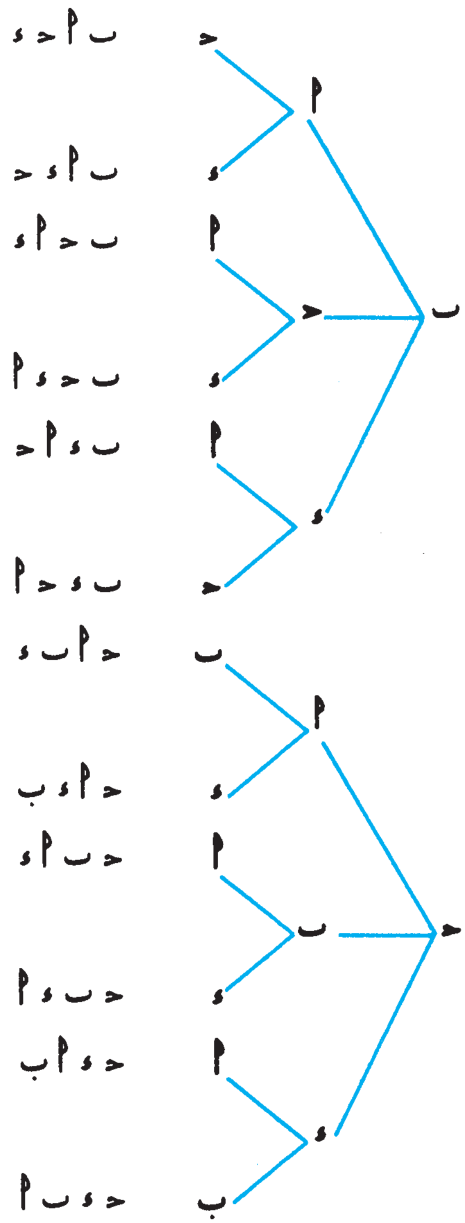
سنرمز للكتب الأربعة بالحروف أ ، ب ، حـ ، ء.

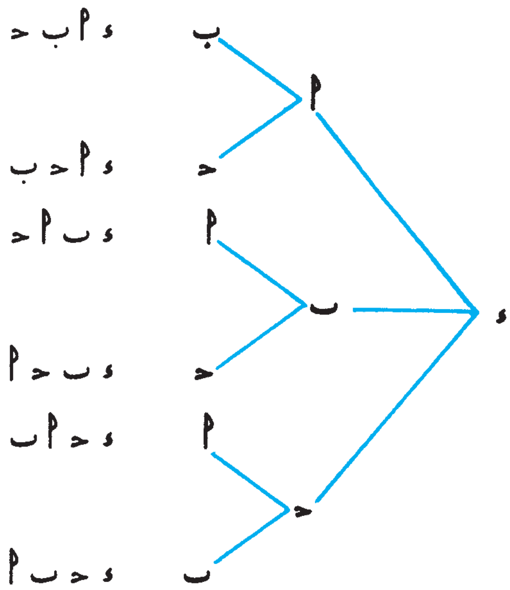
لدينا أربع طرائق لاختيار الكتاب الأول من بين أ ، ب ، حـ ، ء. وبعد ذلك يبقى لدينا ثلاث طرائق لاختيار الكتاب الثاني، ثم طريقتان لاختيار الكتـاب الثالث، وطريقة واحدة لاختيار الكتاب الرابع. ومن مبدأ العد نحصل على:

٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

من التراتيبَ للكتب الأربعة، وهي:




ب أ جـ د
ب أ د جـ
ب جـ أ د
ب جـ د أ
ب د أ جـ
ب د جـ أ
جـ أ ب د
جـ أ د ب
جـ ب أ د
جـ ب د أ
جـ د أ ب
جـ د ب أ



تعريف (٨-١)

تبديل مجموعة سـ هو ترتيب معين لعناصرها

وفي المثال السابق وجدنا أن عدد تباديل المجموعة { أ ، ب ، حـ ، ء } يساوي ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤ . هذه النتيجة هي حالة خاصة من النظرية التالية :

نظرية (٨-١)

إذا كانت سـ مجموعة عدد عناصرها ك، فإن :

عدد تباديل سـ = ك (ك - ١) (ك - ٢) . . . × ٢ × ١

البرهـان :

بإمكاننا اختيار العنصر الأول بعدد ك من الطرائق، وبعد ذلك يصبح لدينا

(ك ـ ١) من الطرائق لاختيار العنصر الثاني، ويلي ذلك (ك ـ ٢) من الطرائق لاختيار العنصر الثالث، وهكذا إلى أن نصل الى العنصر الأخير. ومن مبدأ العد نحصل على :

عدد تباديل س = ك (ك – ١) (ك – ٢) . . . × ٢ × ١

= |ك

حيث استخدمنا الرمز |ك ويقرأ «مضروب ك» اختصاراً للدلالة على حاصل الضرب ك (ك – ١) (ك – ٢) . . . × ٢ × ١.

|٧ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

= ٥٠٤٠

لاحظ أن :

|ك – ١ = (ك – ١) (ك – ٢) . . . × ٢ × ١

|ك = ك |ك – ١

= ك (ك – ١) |ك – ٢

|١ = ١

ويعرَّف |٠ = ١

مثال (٨-٦)

ما عدد الأعداد التي يمكن تكوين كل منها من أربعة أرقام مختلفة من المجموعة {١ ، ٣ ، ٤ ، ٧}؟

الحـــل

واضح أن كل عـدد من الأعداد المـطلوبة هـو ترتيب معـين ـ أو تبديـل ـ للأرقـام الأربعة المعطاة. وعليه فإن عدد الأعداد التي يمكن تكوينها هـو عدد تبـاديل المجمـوعة $\{١ ، ٣ ، ٤ ، ٧\}$ ، أي

$$\underline{٤|} = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$$

$$= ٢٤$$

مثال (٨-٧)

ماعـدد الأعداد التي يمكن تكـوين كل منهـا من رقمين مختلفـين من المجموعة $\{١ ، ٣ ، ٤ ، ٧\}$؟

الحـــل

لـدينا ٤ طـرائق لاختيار الـرقم الأول (الآحاد)، ٣ طـرائق لاختيـار الـرقم الثـاني (العشرات)، فيكون:

مجموع عدد الطرائق $= ٤ \times ٣$

$= ١٢$

يبين المثال (٨-٧) حالة جـديدة تعـالج فيهـا تراتيب مجمـوعة جـزئية من مجمـوعة الاختيار، وهذا يتطلب توسيع مفهوم التبديل كما ورد في تعريف (٣ ـ ١) إلى الآتي:

تعريف (٨-٢)

إذا كانت سـ مجموعة عدد عناصرها ك، فإن كل ترتيب لمجموعة جزئية من سـ عدد عناصرها ر يسمى تبديلاً للمجموعة سـ أخذ راءً راءً.

لاحظ أن ر $\leqslant$ ك في جميع الحالات، وأنه عندما ر = ك فإن تعريف (٨-٢) يتفق مع تعريف (٨-١). ولاحظ أيضاً أن أي تبديل للمجموعة سـ أخذَ راءً راءً ينطوي على اختيار معين لعدد ر من عناصر سـ وترتيب معين لهذه العناصر المختارة. ومن الواضح أن **مجموع تباديل المجموعة س المأخوذة راءً راءً هو جميع الاختيارات الممكنة لعدد ر من عناصر س مكررة بقدر الترتيبات المختلفة لكل اختيار.**

نظرية (٨-٢)

إذا كانت سـ مجموعة عدد عناصرها ك فإن عدد تباديل عناصر سـ مأخوذة راءً راءً يرمز له بالرمز $^{ك}ل_{ر}$ = ك (ك - ١) (ك - ٢) . . . (ك - ر + ١)

حيث ر $\leqslant$ ك

البرهان :

لدينا ك من الطرائق لاختيار العنصر الأول من سـ ،

ك - ١ من الطرائق لاختيار العنصر الثاني ،

ك - ٢ من الطرائق لاختيار العنصر الثالث ،

.

.

.

ك - ر + ١ من الطرائق لاختيار العنصر الرائي .

ومن مبدأ العد نستنتج أن عدد التباديل يساوي :

$$\text{ك}\,(\text{ك}-١)\,(\text{ك}-٢)\ldots(\text{ك}-\text{ر}+١)$$

نتيجة (٨–١)

$$\text{ل}^{\text{ك}}_{\text{ر}}=\frac{\underline{\text{ك}|}}{\underline{\text{ك}-\text{ر}|}}\qquad \text{حيث ر} \leqslant \text{ك}$$

البرهان :

$$\text{ل}^{\text{ك}}_{\text{ر}}=\text{ك}\,(\text{ك}-١)\,(\text{ك}-٢)\ldots(\text{ك}-\text{ر}+١)$$

$$=\text{ك}\,(\text{ك}-١)\,(\text{ك}-٢)\ldots(\text{ك}-\text{ر}+١)\times\frac{\underline{\text{ك}-\text{ر}|}}{\underline{\text{ك}-\text{ر}|}}$$

$$=\frac{\text{ك}\,(\text{ك}-١)\,(\text{ك}-٢)\ldots(\text{ك}-\text{ر}+\ )\,(\text{ك}-\text{ر})\ldots\times٢\times١}{\underline{\text{ك}-\text{ر}|}}$$

$$=\frac{\underline{\text{ك}|}}{\underline{\text{ك}-\text{ر}|}}$$

ومن هذه النتيجة نحصل على الحالة الخاصة :

$$\text{ل}^{\text{ك}}_{\text{ك}}=\frac{\underline{\text{ك}|}}{\underline{٠|}}=\frac{\underline{\text{ك}|}}{١}$$

$$\boxed{\text{ل}^{\text{ك}}_{\text{ك}}=\underline{\text{ك}|}}$$

مثال (٨-٨)

بكم طريقة يمكن توزيع الجوائز الأولى والثانية والثالثة والرابعة على المشتركين في إحدى مسابقات حفظ القرآن الكريم إذا كان عدد المشتركين ستة عشر حافظاً؟

الحـــل

على افتراض أنه لا يشترك في الجائزة الواحدة أكثر من متنافس واحد فإن المطلوب هو عدد طرائق اختيار وترتيب ٤ من ١٦، أي عدد تباديل ١٦ عنصراً أخذت أربعة أربعة، ومن نظرية (٣ ـ ٢) فإن الجواب:

$$ {}^{16}\text{ل}_{4} = 16 \times 15 \times 14 \times 13 $$

$$ = 43680 $$

مثال (٨-٩)

كم تطبيقاً متبايناً يمكن تعيينه من المجموعة سـ الى المجموعة صـ، علماً بأن د (سـ) ≥ د (صـ).

الحـــل

لنفرض أن د (سـ) = ر ، د (صـ) = ك

سنعين لكل عنصر من المجموعة سـ صورة من المجموعة صـ على النحو التالي:

١ ـ العنصر الأول في سـ يمكن أن نختار له أي واحد من عناصر صـ وعددها ك ليكون صورة له.

٢ ـ العنصر الثاني في سـ يمكن أن نختار له أي واحد من عناصر صـ المتبقية وعددها ك ـ ١ لأنه لا يجوز أن تتكرر الصورة في التطبيق المتباين.

٣ ـ العنصر الثالث في سـ يمكن أن نختار له أي واحد من عناصر صـ المتبقية وعددها ك ـ ٢ .

٤ ـ وهكذا الى أن نصل الى العنصر رقم ر من سـ فيكون لدينا ك ـ ر + ١ من عناصر صـ المتبقية وبإمكاننا أن نختار أي واحد منها ليكون صورة للعنصر الرائي في سـ .

من مبدأ العد نستنتج أن عدد التطبيقات التي نحصل عليها بهذه الطريقة هو:

$$\text{ك}\,(\text{ك} - ١)\,(\text{ك} - ٢)\,\ldots\,(\text{ك} - \text{ر} + ١) = \text{ل}^{\text{ك}}_{\text{ر}}$$

رهو عدد تباديل المجموعة صـ اذا أخذت راءً راءً.

وفي حالة ر = ك نستنتج أن عدد تباديل المجموعة صـ يساوي عدد التقابلات من المجموعة على نفسها.

مثال (٨-١٠)

اثبت أن $\text{ل}^{\text{ك}+١}_{\text{ر}+١} \div \text{ل}^{\text{ك}}_{\text{ر}} = \text{ك} + ١$

البرهان :

$$\text{ل}^{\text{ك}+١}_{\text{ر}+١} \div \text{ل}^{\text{ك}}_{\text{ر}} = \frac{\underline{|\text{ك} + ١}}{\underline{|\text{ك} + ١ - (\text{ر} + ١)}} \div \frac{\underline{|\text{ك}}}{\underline{|\text{ك} - \text{ر}}}$$ من نتيجة (٣ ـ ١)

$$= \frac{\underline{|ن + ١}}{\underline{|ن - ر}} \times \frac{\underline{|ن - ر}}{\underline{|ن}}$$

$$= \frac{\underline{|ن + ١}}{\underline{|ن}}$$

$$= \frac{(ن + ١)\,\underline{|ن}}{\underline{|ن}}$$

$$= ن + ١$$

مثال (٨-١١)

إذا كان ${}^{م+د}ل_{٢} = ٢١٠$ ، ${}^{م-د}ل_{٢} = ٧٢$ فما قيمة كل من م ، د ؟

الحـــل

$${}^{م+د}ل_{٢} = (م + د)(م + د - ١)$$

$$٢١٠ = ١٥ \times ١٤$$

$$\Leftarrow م + د = ١٥ \qquad (١)$$

$${}^{م-د}ل_{٢} = (م - د)(م - د - ١)$$

$$٧٢ = ٩ \times ٨$$

$$\Leftarrow م - د = ٩ \qquad (٢)$$

بجمع المعادلتين (١) ، (٢) نحصل على :

٢ م = ٢٤

م = ١٢

وبالتعويض في المعادلة (١) نحصل على:

د = ٣

تمارين (٨ – ٢)

١ - إذا كانت سه = { أ ، حـ ، و ، س ، ع ، ل ، د ، ي } فأوجد عدد الكلمات المكونة من عناصر سه دون تكرار للحرف في الكلمة الواحدة، وبحيث تكون الكلمة مكونة من:

(أ) حرفين (ب) ٣ حروف (حـ) ٤ حروف

(ء) ٥ حروف (هـ) ٦ حروف (و) ٧ حروف

(ز) ٨ حروف

٢ - إذا كانت سه مجموعة مكونة من ٨ عناصر فكم تطبيقاً متبايناً يمكن تعيينه من المجموعة $سه_1$ إلى سه، إذا كانت $سه_1$ تحتوي على:

(أ) عنصرين (ب) ٣ عناصر (حـ) ٤ عناصر

(ء) ٥ عناصر (هـ) ٦ عناصر (و) ٧ عناصر

(ز) ٨ عناصر

٣ - احسب ما يلي:

$$\lfloor\underline{٥}\ ،\ \text{ل}^{٥}_{٢}\ ،\ \text{ل}^{٦}_{٣}\ ،\ \lfloor\underline{٧}\ ،\ \text{ل}^{٨}_{٢}\ ،\ \text{ل}^{٨}_{١}\ ،\ \frac{\text{ل}^{٨}_{٤}}{\text{ل}^{٨}_{٣}}\ ،\ \frac{\text{ل}^{٩}_{٥}}{\text{ل}^{٩}_{٣}}$$

٤ - كم عدداً يمكن تكوينه من الأرقام من ١ إلى ٩ إذا كان:

(أ) العدد مكوناً من ٣ أرقام ولا يسمح بتكرار الرقم؟

(ب) العدد مكوناً من ٤ أرقام ولا يسمح بتكرار الرقم؟

٥ - إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٧ } فكم عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه إذا كان:

(أ) كل رقم يمكن استخدامه مرة واحدة فقط في تكوين العدد؟

(ب) الرقم ٧ يجب أن يكون في المنزلة الثانية (العشرات)؟

(حـ) الرقم ١ يجب أن يكون في المنزلة الأولى (الآحاد)، والرقم ٦ يجب أن يكون في المنزلة الثالثة (المئات)؟

٦ - بكم طريقة يمكن ترتيب ٦ كتب مختلفة على أحد الرفوف، وبكم طريقة يمكن اجراء هذا الترتيب إذا كان المطلوب أن يظل كتابان معينان لا ينفصلان؟

٧ - لدينا ٥ كتب مختلفة في الرياضيات، ٤ كتب مختلفة في الفيزياء وكتابان مختلفان في الأحياء. بكم طريقة يمكن ترتيب هذه الكتب بحيث تبقى كتب كل موضوع على حدة؟

٨ - إذا كان $\lfloor\underline{\text{هـ}}$ = ٧٢٠ فما قيمة هـ؟

٩ ـ إذا كان $\underline{|د + ١} \div \underline{|د - ١} = ٤٢$ فما قيمة د؟

١٠ ـ أوجد د إذا كان $ل^{٧}_{د} = ٢٥٢٠$.

١١ ـ إذا كان $ل^{م+د}_{٢} = ٩٠$ ، $ل^{م-د}_{٢} = ١٢$ فما قيمة كل من م ، د؟

١٢ ـ إذا كان $ل^{د}_{٣} \div ل^{د}_{٢} = ١٢$ فما قيمة د؟

١٣ ـ احسب ما يلي:

(أ) $\underline{|٩} \div \underline{|٦}$

(ب) $$\frac{\underline{|٣} \times \underline{|٥} \times \underline{|٧}}{\underline{|٢} \times \underline{|٤} \times \underline{|٦}}$$

١٤ ـ ضع في أبسط صورة:

(أ) $$\frac{\underline{|د}}{(د - ١)}$$

(ب) $$\frac{\underline{|د}}{\underline{|د - ٣}}$$

(جـ) $$\frac{\underline{|د + ١}}{\underline{|د - ٢}}$$

١٥ ـ بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ومحاسب ومدير برامج من بين أعضاء النادي البالغ عددهم ١١ عضواً إذا كان لكل عضو أن يشغل منصباً واحداً فقط؟ كم عدد الطرائق إذا كان عدد الأعضاء ٢١ عضواً؟

٨ ـ ٣ مجموعة القوة

نعلم من دراستنا للمجموعات أن كلاً من { أ ، ب } ، { أ } ،

{ ب ، حـ } مجموعة جزئية من المجموعة سـ = { أ ، ب ، حـ }.

والمجموعات الجزئية للمجموعة سـ تشكل مجموعة أخرى تسمى مجموعة القوة للمجموعة سـ ، ويرمز لها بالرمز ى (سـ) ، أي أن

ى (سـ) = { ∅ ، { أ } ، { ب } ، { حـ } ، { أ ، ب } ، { أ ، حـ } ،

{ ب ، حـ } ، { أ ، ب ، حـ } }

لاحظ هنا أن عدد عناصر سـ يساوي ٣ بينما عدد عناصر ى (سـ) يساوي ٨ ،

أي أن

د (سـ) = ٣

د (ى (سـ)) = ٨

تعريف (٨-٣)

المجموعة التي عناصرها المجموعات الجزئية للمجموعة سـ تسمى مجموعة القوة للمجموعة سـ، ويرمز لها بالرمز ى (سـ).

والنظرية التالية تحدد العلاقة بين د (سـ) ، د (ى(سـ)):

نظرية (٨-٣)

لأي مجموعة سـ ، إذا كان د (سـ) = ن فإن

$د(ق(سـ)) = ٢^{ن}$

البرهـان :

لنفرض أن سـ = $\{س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، \ldots ، س_ن\}$

إن أي مجموعة جزئية من سـ تتكون من عناصر من سـ ، وبإمكاننا أن نعتبر تكوينها نتيجة ن من الاختيارات المتتابعة على النحو التالي :

الاختيار الأول هو أن نأخذ العنصر الأول $س_١$ أو نتركه ،

الاختيار الثاني هو أن نأخذ العنصر الثاني $س_٢$ أو نتركه ،

الاختيار الثالث هو أن نأخذ العنصر الثالث $س_٣$ أو نتركه ،

وهكذا الى أن نصل الى العنصر الأخير من سـ وهو $س_ن$ فإما أن نأخذه أو نتركه .

أي لكل عنصر من سـ يوجد طريقتان لتكوين مجموعات سـ الجزئية .

ومن مبدأ العد نستنتج أن عدد الطرائق التي يمكن بها تكوين مجموعات سـ الجزئية هي :

$$\underbrace{٢ \times ٢ \times ٢ \times \ldots \times ٢}_{\text{ن من المرات}} = ٢^{ن}$$

$$\Leftarrow د(ق(سـ)) = ٢^{ن}$$

ملاحظة (٨-١)

١ ـ في البرهان السابق نحصل على المجموعة الجزئية سـ عندما نختار جميع عناصر سـ ، ونحصل على المجموعة الخالية $\varnothing$ عندما نترك جميع هذه العناصر.

٢ ـ بتطبيق هذه النظرية على المجموعة $\{$ أ ، ب ، حـ $\}$ التي سبق الحديث عنها في مطلع هذا البند نجد أن مجموعة القوة مكونة من $٢^{٣} = ٨$ عناصر.

مثال (٨-١٢)

أوجد ق (سـ) في الحالات التالية وحقق نظرية (٣ ـ ٣)

(أ) سـ = $\varnothing$

(ب) سـ = $\{$ س $\}$

(حـ) سـ = $\{$ س$_{١}$ ، س$_{٢}$ $\}$

الحل

(أ) ليس للمجموعة الخالية $\varnothing$ إلا مجموعة جزئية واحدة هي $\varnothing$ نفسها،

أي أن ق $(\varnothing) = \{\varnothing\}$

= مجموعة ذات عنصر واحد

في هذه الحالة من الواضح أن :

ك = عدد عناصر $\varnothing$ = صفر

$د(ق(\emptyset)) = ٢^{٠}$

$= ١$

(ب) في هذه الحالة :

$ق(سـ) = \{\emptyset ، \{س\}\}$

= مجموعة ذات عنصرين

$د(سـ) = ١$

$د(ق(سـ)) = ٢^{١}$

$= ٢$

(حـ) $ق(سـ) = \{\emptyset ، \{س_{١}\} ، \{س_{٢}\} ، \{س_{١} ، س_{٢}\}\}$

= مجموعة ذات أربعة عناصر

$د(سـ) = ٢$

$د(ق(سـ)) = ٢^{٢}$

$= ٤$

٨ ـ ٤ التوافيق

في البند (٨-٢) انصب اهتمامنا على حصر عدد الطرائق التي يمكن بها اختيار وترتيب عدد ر من عناصر مجموعة سـ مكونة من ك عنصراً، فوجدنا أن عدد هذه

الطرائق هو عدد تباديل المجموعة سـ مأخوذة رائ رائ، وهو يساوي:

$$ {}^{ك}ل_{ر} = \frac{ك!}{(ك - ر)!} $$

وفي هذا البند سنبحث موضوع اختيار ر من عناصر المجموعة سـ دون الاهتمام بترتيبها، أي أننا سنهتم بدراسة مجموعات سـ الجزئية المكونة كل منها من عدد ر من العناصر.

تعريف (٨-٤)

إذا كانت سـ مجموعة عدد عناصرها ك فإن توافيق المجموعة سـ مأخوذة رائ رائ هي مجموعات سـ الجزئية التي عدد عناصر كل منها ر. ويعرَّف الرمز $\binom{ك}{ر}$ بأنه عدد هذه التوافيق، ويقرأ «ك فوق ر»، حيث ر ≥ ك

إذا عدنا الى المجموعة سـ = {أ ، ب ، حـ} لوجدنا أن مجموعة القوة ق (سـ) هي:

$$ ق(سـ) = \{ \emptyset ، \{أ\} ، \{ب\} ، \{حـ\} ، \{أ ، ب\} ، \{أ،حـ\} ، \{ب ، حـ\} ، \{أ ، ب ، حـ\}\} $$

فإننا نستنتج أن:

$\binom{٣}{٠}$ = عدد المجموعات الخالية في ق (سـ) = ١

$\binom{٣}{١}$ = عدد المجموعات الجزئية التي تتكون كل منها من عنصر واحد = ٣

$\binom{٣}{٢}$ = عدد المجموعات الجزئية التي تتكون كل منها من عنصرين = ٣

$\binom{٣}{٣}$ = عدد المجموعات الجزئية التي تتكون كل منها من ثلاثة عناصر = ١

نظرية (٨-٤)

إذا كانت س مجموعة عدد عناصرها ن ، فإن عدد مجموعاتها الجزئية ذوات ر من العناصر، أي عدد توافيقها مأخوذة راءً راءً، هو:

$$\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \frac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\underline{\text{ر}}|} \qquad \text{حيث } \text{ر} \leqslant \text{ن}$$

البرهان :

من نظرية (٨-٢) نعلم أن عدد تباديل المجموعة س مأخوذة راءً راءً هي ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}$ ، وهو عدد المجموعات الجزئية المرتبة ذوات ر من العناصر.

ولكن كل واحدة من هذه المجموعات الجزئية يتكرر ظهورها بمقدار عدد تراتيب عناصرها، أي أنه يتكرر ظهورها $\underline{\text{ر}}|$ من المرات. إذاً عدد المجموعات الجزئية غير المتكررة ذوات ر من العناصر هو:

$$\frac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\underline{\text{ر}}|}$$

أي أن :

$$\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \frac{\text{ل}^{\text{ن}}_{\text{ر}}}{\text{ر}!}$$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)\cdots(\text{ن}-\text{ر}+١)}{\text{ر}(\text{ر}-١)(\text{ر}-٢)\cdots\times ٢\times ١}$$

نتيجة (٨ ـ ٢)

$$\boxed{\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \frac{\text{ن}!}{\text{ر}!\,(\text{ن}-\text{ر})!}}$$

البرهان :

$$\text{ل}^{\text{ن}}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{ر})!}$$ من نتيجة (٨-١)

وبالتعويض في نظرية (٨-٤) نحصل على المطلوب .

نتيجة (٨ ـ ٣)

$$\boxed{\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \binom{\text{ن}}{\text{ن}-\text{ر}}}$$

$$\binom{\text{ن}}{\text{ن}-\text{ر}} = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{ر})!\,(\text{ن}-(\text{ن}-\text{ر}))!}$$ من نتيجة (٨-٢)

$$= \frac{\text{ن}!}{\text{ر}!\,(\text{ن} - \text{ر})!}$$

$$= \binom{\text{ن}}{\text{ر}}$$

نتيجة (٨ ـ ٤)

$$\boxed{\binom{\text{ن}}{\text{ر}} + \binom{\text{ن}}{\text{ر} + 1} = \binom{\text{ن} + 1}{\text{ر} + 1}} \qquad \text{ر} = 0 ، 1 ، 2 ، \ldots ، \text{ن} - 1$$

البرهان :

$$\binom{\text{ن}}{\text{ر}} + \binom{\text{ن}}{\text{ر} + 1} = \frac{\text{ن}!}{\text{ر}!\,(\text{ن} - \text{ر})!} + \frac{\text{ن}!}{(\text{ر} + 1)!\,(\text{ن} - (\text{ر} + 1))!}$$

من نتيجة (٨–٢)

$$= \frac{(\text{ر} + 1)\,\text{ن}!}{(\text{ر} + 1)!\,(\text{ن} - \text{ر})!} + \frac{\text{ن}!}{(\text{ر} + 1)!\,(\text{ن} - \text{ر} - 1)!}$$

$$= \frac{\text{ن}!\,(\text{ر} + 1)}{(\text{ر} + 1)!\,(\text{ن} - \text{ر})!} + \frac{\text{ن}!\,(\text{ن} - \text{ر})}{(\text{ر} + 1)!\,(\text{ن} - \text{ر})!}$$

$$= \frac{\text{ن}!\,(\text{ر} + 1 + \text{ن} - \text{ر})}{(\text{ر} + 1)!\,(\text{ن} - \text{ر})!}$$

$$= \frac{\underline{\left|\text{ك} + \text{١}\right.}}{\underline{\left|\text{ر} + \text{١}\right.}\ \underline{\left|\text{ك} - \text{ر}\right.}}$$

$$= \binom{\text{ك} + \text{١}}{\text{ر} + \text{١}}$$

مثال (٨-١٣)

بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من ثلاثة أعضاء من بين مجلس ادارة شركة مكون من ثمانية أعضاء.

الحـــل

حيث إن ترتيب أعضاء اللجنة الثلاثية ليس له أهمية فالمطلوب هنا هو عدد توافيق ثمانية عناصر مأخوذة ثلاثة ثلاثة، وهو

$$\binom{\text{٨}}{\text{٣}} = \frac{{}^{\text{٨}}\text{ل}_{\text{٣}}}{\underline{\left|\text{٣}\right.}}$$

$$= \frac{\text{٨} \times \text{٧} \times \text{٦}}{\text{٣} \times \text{٢} \times \text{١}}$$

$$= \frac{\text{٣٣٦}}{\text{٦}} = \text{٥٦}$$

لاحظ أن ${}^{\text{٨}}\text{ل}_{\text{٣}} = \text{٣٣٦}$ هو عدد تباديل ثمانية عناصر مأخوذة ثلاثة ثلاثة، ويظهر فيها كل اختيار من بين الستة والخمسين اختياراً مكرراً ست مرات بترتيبات مختلفة.

مثال (٨-١٤)

بكم طريقة يمكن لطالب في امتحان العلوم أن يختار ستة أسئلة بحيث تكون ثلاثة منها في الفيزياء واثنان في الكيمياء وسؤال واحد في الاحيـاء، علماً بأن ورقـة الامتحان بها خمسة أسئلة في الفيزياء وأربعة أسئلة في الكيمياء وسؤالان في الاحياء.

الحـــل

عدد طرائق اختيار أسئلة الفيزياء $= \binom{٥}{٣}$

$$= \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣ \times ٢ \times ١} = ١٠$$

عدد طرائق اختيار أسئلة الكيمياء $= \binom{٤}{٢}$

$$= \frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١} = ٦$$

عدد طرائق اختيار سؤال الاحياء $= \binom{٢}{١}$

$$= \frac{٢}{١} = ٢$$

وبما إن اختيار الأسئلة يتم بالتتابع، فمن مبدأ العد يكون عـدد طرائق اختيـار الأسئلة الستة هو:

$$١٠ \times ٦ \times ٢ = ١٢٠$$

مثال (٨-١٥)

ما معنى: (أ) $\binom{ك}{٠}$ ، (ب) $\binom{ك}{ك}$ ؟

الحــــل

(أ) $\binom{ك}{٠}$ هو عدد المجموعات الجزئية الخالية لمجموعة ذات ك من العناصر،

وبما إنه لا توجد إلا مجموعة خالية واحدة فإن :

$$\binom{ك}{٠} = ١$$

(ب) $\binom{ك}{ك}$ هو عدد المجموعات الجزئية ذوات ك من العناصر لمجموعة ذات ك من العناصر، وبما إنه لا توجد مجموعة جزئية تحقق ذلك سوى المجموعة نفسها فإن :

$$\binom{ك}{ك} = ١$$

وهاتان النتيجتان يمكن الحصول عليهما بالتعويض عن ر في نتيجة (٣ - ٢) بالعددين ٠ ، ك .

تمارين (٨ – ٣)

١ ـ احسب قيمة كل مما يلي:

$$\text{ل}^{٥}_{٢} \text{ ، } \text{ل}^{٧}_{٣} \text{ ، } \text{ل}^{١٤}_{٢} \text{ ، } \binom{٦}{٤} \text{ ، } \binom{٩}{٣} \text{ ، } \binom{١٠}{٨} \text{ ، } \binom{١٢}{١١}$$

$$\binom{٢٠٠}{٠} \text{ ، } \binom{٣٠٠}{٣٠٠} \text{ ، } \frac{\underline{\text{د}|}}{\underline{\text{د} - ٢|}}$$

٢ ـ تحقق من صحة القانون

$$\binom{\text{د}}{\text{ر}} + \binom{\text{د}}{\text{ر} + ١} = \binom{\text{د} + ١}{\text{ر} + ١}$$

عندما $\text{د} = ٦$ ، $\text{ر} = ٣$

٣ ـ اثبت صحة القانون

$$\binom{\text{د}}{\text{ر}} \div \binom{\text{د}}{\text{ر} - ١} = \frac{\text{د} - \text{ر} + ١}{\text{ر}} \qquad ١ \leqslant \text{ر} \leqslant \text{د}$$

ثم استخدمه في ايجاد قيمة كل من:

(أ) $\binom{٨}{٣} \div \binom{٨}{٢}$

(ب) $\binom{١٢}{٨} \div \binom{١٢}{٧}$

(جـ) $\binom{٢٠}{١٧} \div \binom{٢٠}{١٦}$

(ء) $\binom{١٥}{١١} \div \binom{١٥}{٩}$

لاحظ أن $\binom{١٥}{١١} \div \binom{١٥}{٩} = \left[\binom{١٥}{١١} \div \binom{١٥}{١٠}\right] \times \left[\binom{١٥}{١٠} \div \binom{١٥}{٩}\right]$

٤ - باستخدام القانونين المذكورين في التمرينين ٢ ، ٣ أوجد قيمة كل من:

(أ) $\dfrac{\binom{١٢}{٩} + \binom{١٢}{٨}}{\binom{١٢}{٨} + \binom{١٢}{٧}}$ (ب) $\dfrac{\binom{٢٠}{١٥} + \binom{٢٠}{١٤}}{\binom{٢٠}{١٦} + \binom{٢٠}{١٥}}$

٥ - أوجد المجموع :

$$\binom{١٢}{٠} + \binom{١٢}{١} + \binom{١٢}{٢} + \dots + \binom{١٢}{١١} + \binom{١٢}{١٢}$$

٦ - يوجد مجلس ادارة مكون من ١٣ عضواً. بكم طريقة يمكن أخذ قرار بموافقة ٩ أعضاء واعتراض ٤ أعضاء؟

٧ - يراد اختيار هيئة تحرير لمجلة مدرسية بحيث يختار ٣ من الصف الثالث واثنان من الصف الثاني وواحد من الصف الأول، علماً بأن عدد الطلبة في الصفوف الثلاثة هو ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ على التوالي. بكم طريقة يمكن اختيار هيئة التحرير؟

٨ ـ ما هو عدد الطرائق التي يمكن بها اختيار ٤ قطع من العملة أو أكثر من بين ٧ قطع؟

٩ ـ أراد طالب شراء ٣ قصص باللغة العربية، واثنتين باللغة الانكليزية، فإذا وجد بالمكتبة ١٠ قصص باللغة العربية، ٨ قصص باللغة الانكليزية، فكم طريقة يمكنه شراء ما يلزمه؟

١٠ ـ بكم طريقة يمكن للجنة مكونة من خمسة أعضاء أن تتخذ قراراً بالأغلبية؟

٨ـ٥ الرمز Σ

Σ هو أحد حروف الهجاء اليونانية ويسمى «سيجما» Sigma ويستخدم للدلالة على المجموع، فمثلاً:

(أ) $\sum_{١}^{٣} ر$ هو مجموع الأعداد الصحيحة ر من ر = ١ إلى ر = ٣ ، أي أن :

$$\sum_{١}^{٣} ر = ١ + ٢ + ٣$$

$$= ٦$$

(ب) $\sum_{٣}^{٦} (٢ ر - ١)$ هو مجموع الأعداد ٢ ر - ١ من ر = ٣ إلى ر = ٦ ،

أي

$$\sum_{٣}^{٦} (٢ ر - ١) = (٢ \times ٣ - ١) + (٢ \times ٤ - ١)$$

$$+ (٢ \times ٥ - ١) + (٢ \times ٦ - ١)$$

$$= ٥ + ٧ + ٩ + ١١ = ٣٢$$

(حـ) $\sum_{١}^{٥}$ س$_ر$ هو مجموع الأعداد س$_ر$ من ر = ١ إلى ر = ٥.

$$\sum_{١}^{٥} س_ر = س_١ + س_٢ + س_٣ + س_٤ + س_٥$$

تعريف (٨-٥)

$$\sum_{١}^{د} س_ر = س_١ + س_٢ + س_٣ + \cdots + س_د$$ حيث د عدد طبيعي

مثال (٨-١٦)

(أ) $\sum_{١}^{} ر^٢ = ١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ٤^٢ + ٥^٢ + ٦^٢$

$$= ١ + ٤ + ٩ + ١٦ + ٢٥ + ٣٦ = ٩١$$

(ب) $\sum_{٠}^{٥} \frac{ر}{ر + ١} = ٠ + \frac{١}{٢} + \frac{٢}{٣} + \frac{٣}{٤} + \frac{٤}{٥} + \frac{٥}{٦}$

$$= \frac{٢١٣}{٦٠}$$

(حـ) $\sum_{١}^{٥} \frac{(-١)^ر}{ر!} = \frac{-١}{١!} + \frac{(-١)^٢}{٢!} + \frac{(-١)^٣}{٣!} + \frac{(-١)^٤}{٤!} + \frac{(-١)^٥}{٥!}$

$$= -١ + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٦} + \frac{١}{٢٤} - \frac{١}{١٢٠}$$

$$= \frac{-\,١٢٠ + ٦٠ - ٢٠ + ٥ - ١}{١٢٠}$$

$$= -\,\frac{٧٦}{١٢٠}$$

(د) $\sum_{ر=١}^{ن} \frac{١}{ر(ر+١)} = \frac{١}{١ \times ٢} + \frac{١}{٢ \times ٣} + \frac{١}{٣ \times ٤} + \cdots + \frac{١}{ن(ن+١)}$

وفي هذه الحالة لا نستطيع أن نحصل على قيمة عددية للمجموع إلا إذا حددت قيمة ن.

من خواص رمز التجميع $\sum$ ما يلي:

١ - $\sum_{١}^{ن} (س_ر + ص_ر) = \sum_{١}^{ن} س_ر + \sum_{١}^{ن} ص_ر$

٢ - $\sum_{١}^{ن} أ\,س_ر = أ \sum_{١}^{ن} س_ر$ حيث أ عدد لا يعتمد على ر.

وبإمكان الطالب أن يبرهن هاتين الخاصتين من تعريف (٣ - ٥).

مثال (٨-١٧)

أوجد قيمة $\sum_{١}^{٥} \frac{س^ر}{ر!}$ عندما تكون:

(أ) س = ٠ (ب) س = ١

(جـ) س = - ١ (د) س = ٢

الحـــل

$$\overset{\text{٥}}{\text{مجـ}}\ \frac{\text{س}^{\text{ر}}}{\underline{|\text{ر}}} = \frac{\text{س}^{\text{١}}}{\underline{|\text{١}}} + \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\underline{|\text{٢}}} + \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\underline{|\text{٣}}} + \frac{\text{س}^{\text{٤}}}{\underline{|\text{٤}}} + \frac{\text{س}^{\text{٥}}}{\underline{|\text{٥}}}$$

$$= \text{س} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}^{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{٦}}\text{س}^{\text{٣}} + \frac{\text{١}}{\text{٢٤}}\text{س}^{\text{٤}} + \frac{\text{١}}{\text{١٢٠}}\text{س}^{\text{٥}}$$

(أ) في حالة س = ٠ من الواضح أن المجموع $\overset{\text{٥}}{\underset{\text{١}}{\text{مجـ}}}\ \frac{\text{س}^{\text{ر}}}{\underline{|\text{ر}}}$ يساوي الصفر

(ب) في حالة س = ١ نحصل على:

$$\overset{\text{٥}}{\underset{\text{١}}{\text{مجـ}}}\ \frac{(\text{١})^{\text{ر}}}{\underline{|\text{ر}}} = \text{١} + \frac{\text{١}}{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{٦}} + \frac{\text{١}}{\text{٢٤}} + \frac{\text{١}}{\text{١٢٠}}$$

$$= \frac{\text{٢٠٦}}{\text{١٢٠}}$$

(حـ) في حالة س = - ١ سبق أن وجدنا من المثال السابق أن:

$$\overset{\text{٥}}{\underset{\text{١}}{\text{مجـ}}}\ \frac{(-\text{١})^{\text{ر}}}{\underline{|\text{ر}}} = -\frac{\text{٧٦}}{\text{١٢٠}}$$

(ء) $$\overset{\text{٥}}{\underset{\text{١}}{\text{مجـ}}}\ \frac{\text{٢}^{\text{ر}}}{\underline{|\text{ر}}} = \text{٢} + \frac{\text{٢}^{\text{٢}}}{\text{٢}} + \frac{\text{٢}^{\text{٣}}}{\text{٦}} + \frac{\text{٢}^{\text{٤}}}{\text{٢٤}} + \frac{\text{٢}^{\text{٥}}}{\text{١٢٠}}$$

$$= \text{٤} + \frac{\text{٤}}{\text{٣}} + \frac{\text{٢}}{\text{٣}} + \frac{\text{٤}}{\text{١٥}}$$

$$= \frac{\text{٦٠} + \text{٣٠} + \text{٤}}{\text{١٥}}$$

$$= \frac{\text{٩٤}}{\text{١٥}}$$

تماريـن (٨ – ٤)

١ ـ اكتب الحدود الخمسة الأولى في كل من المجاميع الآتية:

(أ) $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} ٢\,\text{ر}^{٢}$

(ب) $\sum_{\text{ر}=٣}^{\text{ن}} \dfrac{\text{ر}}{\text{ر} - ١}$

(ﺣ) $\sum_{\text{ر}=٠}^{\text{ن}} \dfrac{٣^{\text{ر}}}{\text{ر}!}$

٢ ـ أثبت صحة ما يأتي:

(أ) $\sum_{\text{ر}=٠}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} = \sum_{\text{ر}=٢}^{\text{ن}+٢} \text{س}_{\text{ر}-٢}$

(ب) $\sum_{\text{ر}=٠}^{\text{ن}} \dfrac{\text{س}^{\text{ر}}}{\text{ر}!} = ١ + \text{س} + \sum_{\text{ر}=٠}^{\text{ن}-٢} \dfrac{\text{س}^{\text{ر}+٢}}{(\text{ر}+٢)!}$

(ﺣ) $\sum_{\text{ر}=٠}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} = \sum_{\text{ر}=٠}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ن}-\text{ر}}$

٣ ـ اكتب المفكوكات الآتية على صورة مجاميع، مستخدما الرمز $\sum$:

(أ) $٢ + ٤ + ٦ + \cdots + ٢\text{ن}$

(ب) $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٠}$

(حـ) $\frac{١}{٣} + \frac{٢}{٥} + \frac{٣}{٧} + \cdots + \frac{د}{٢د + ١}$

٤ ـ تحقق من صحة المساواة في كل مما يلي:

(أ) $\sum_{ر=١}^{١٠} ٢ر = ١١٠$　　(ب) $\sum_{ر=٠}^{٥} \frac{١}{٢} ر (ر - ١) = ٢٠$

(حـ) $\sum_{ر=١}^{٥} \frac{١}{ر} = \frac{١٣٧}{٦٠}$　　(ء) $\sum_{ر=١}^{٤} \frac{١}{ر (ر + ١)} = \frac{٤}{٥}$

٥ ـ احسب المجاميع التالية:

(أ) $\sum_{ر=١}^{٦} ٣ر$　　(ب) $\sum_{ر=١}^{٥} ر^{٢}$

(حـ) $\sum_{ر=١}^{٧} ر (ر - ١)$　　(ء) $\sum_{ر=٠}^{٤} ٢^{ر}$

٨ـ٦ نظرية ذات الحدين

المقدار س + ص مكون من حدين هما س ، ص ومفكوك المقدار $(س + ص)^{د}$ حيث د عدد طبيعي هو موضوع هذا البند نظراً لكثرة ظهوره وأهمية الوصول الى قاعدة يمكن الاستناد إليها في الحصول عليه.

بالعمليات الجبرية المباشرة يمكننا الحصول على مفكوكات $(س + ص)^{د}$ عندما تكون د = ١ ، د = ٢ ، د = ٣ ، د = ٤ ، د = ٥ وهي على الترتيب :

$$(س + ص)^{١} = س + ص$$

$$(س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}$$

$$(س + ص)^{٣} = س^{٣} + ٣ س^{٢} ص + ٣ س ص^{٢} + ص^{٣}$$

$$(س + ص)^{٤} = س^{٤} + ٤ س^{٣} ص + ٦ س^{٢} ص^{٢} + ٤ س ص^{٣} + ص^{٤}$$

$$(س + ص)^{٥} = س^{٥} + ٥ س^{٤} ص + ١٠ س^{٣} ص^{٢} + ١٠ س^{٢} ص^{٣}$$

$$+ ٥ س ص^{٤} + ص^{٥}$$

ونلاحظ في هذه المفكوكات ما يلي:

١ ـ عدد الحدود في كل مفكوك يزيد واحداً عن ﻫ

٢ ـ الحد الأول في المفكوك هو س مرفوعاً للأس ﻫ ثم ينقص أس المقدار س في الحدود التالية بمقدار الواحد في كل مرة إلى أن يصبح صفراً.

٣ ـ يتزايد أس المقدار ص من صفر في الحد الأول الى ﻫ في الحد الأخير.

٤ ـ مجموع أسَّي المقدارين س ، ص في كل حد يساوي ﻫ.

٥ ـ معامل الحد الأول يساوي معامل الحد الأخير ويساوي الواحد، ومعامل الحد الثاني يساوي معامل الحد قبل الأخير، ومعامل الحد الثالث من بداية المفكوك يساوي معامل الحد الثالث من نهايته، وهكذا.

بناء على ما تقدم يمكننا أن نقول بصفة عامة إن مفكوك ذي الحدين $(س + ص)^{ﻫ}$ يكون على الشكل التالي:

$$(س + ص)^{ن} = م_{٠} س^{ن} + م_{١} س^{ن-١} ص + م_{٢} س^{ن-٢} ص^{٢} + \cdots$$

$$+ م_{ر} س^{ن-ر} ص^{ر} + \cdots + م_{ن-١} س ص^{ن-١} + م_{ن} ص^{ن}$$

حيث تمثل $م_{٠}$ ، $م_{١}$ ، $م_{٢}$ ، ... ، $م_{ن}$ معاملات مفكوك ذي الحدين، وتحديد هذه المعاملات هو موضوع نظرية (٨-٥) التي تسمى نظرية ذات الحدين. ولكن قبل أن نقدم هذه النظرية سنمهد لها بمناقشة الحالة الخاصة عندما تكون $ن = ٤$. في هذه الحالة

$$(س + ص)^{٤} = (س + ص)\,(س + ص)\,(س + ص)\,(س + ص)$$

وبعد إجراء عملية الضرب بين العوامل الأربعة وتجميع الحدود المتجانسة نحصل على :

$$(س + ص)\,(س + ص)\,(س + ص)\,(س + ص)$$

$$= م_{٠} س^{٤} + م_{١} س^{٣} ص + م_{٢} س^{٢} ص^{٢} + م_{٣} س ص^{٣} + م_{٤} ص^{٤}$$

ونلاحظ أنه عند اجراء عملية الضرب هذه فإن كل عامل (س + ص) يسهم في العملية إما بالمقدار س أو بالمقدار ص.

فالحد الأول $م_{٠} س^{٤}$ نحصل عليه باختيار س من جميع العوامل الأربعة ولا يوجد إلا طريقة واحدة لهذا الاختيار، فنستنتج أن $م_{٠} = ١$

والحد الثاني $م_{١} س^{٣} ص$ نحصل عليه باختيار ص من عامل واحد فقط بين العوامل الأربعة، وذلك يتم بطرائق عددها $\binom{٤}{١} = ٤ = م_{١}$.

والحد الثالث $م_{٢} س^{٢} ص^{٢}$ نحصل عليه باختيار ص من عاملين اثنين من بين

العوامل الأربعة، وذلك يتم بطرائق عددها $\binom{٤}{٢} = ٦ = م_{٢}$

والحد الرابع $م_{٣}$ س $ص^{٣}$ نحصل عليه باختيار ص من ثلاثة عوامل من أربعة، ويتم ذلك بطرائق عددها $\binom{٤}{٣} = ٤ = م_{٣}$.

والحد الخامس $م_{٤}$ $ص^{٤}$ نحصل عليه باختيار ص من جميع العوامل الأربعة ولا يوجد الا طريقة واحدة لهذا الاختيار فيكون $م_{٤} = \binom{٤}{٤} = ١$.

وإذا كتبنا $م_{٠} = \binom{٤}{٠} = ١$ استناداً إلى أن الحد الأول هو نتيجة عدم اختيار ص من جميع العوامل الأربعة، فإن مفكوك المقدار $(س + ص)^{٤}$ يأخذ الشكل التالي:

$$(س + ص)^{٤} = \binom{٤}{٠} س^{٤} + \binom{٤}{١} س^{٣} ص + \binom{٤}{٢} س^{٢} ص^{٢}$$

$$+ \binom{٤}{٣} س ص^{٣} + \binom{٤}{٤} ص^{٤}$$

$$= \sum_{ر=٠}^{٤} \binom{٤}{ر} س^{٤-ر} ص^{ر}$$

نظرية (٨-٥)

إذا كان ن عدداً طبيعياً فإن:

$$(س + ص)^{ن} = س^{ن} + \binom{ن}{١} س^{ن-١} ص + \binom{ن}{٢} س^{ن-٢} ص^{٢}$$

$$+ \cdots + \binom{ن}{ر} س^{ن-ر} ص^{ر}$$

$$+ \cdots + \binom{ن}{ن-١} س ص^{ن-١} + ص^{ن}$$

$$= \sum_{ر=٠}^{ن} \binom{ن}{ر} س^{ن-ر} ص^{ر}$$

ملاحظة (٨-٢)

١ - حيث إن $\binom{ن}{٠} = \binom{ن}{ن} = ١$ بإمكاننا كتابة الحد الأول في مفكوك $(س + ص)^{ن}$ بالصورة $\binom{ن}{٠} س^{ن}$ والحد الأخير بالصورة $\binom{ن}{ن} ص^{ن}$ فتكون الصورة العامة للحد الذي ترتيبه ر + ١ في المفكوك هي $\binom{ن}{ر} س^{ن-ر} ص^{ر}$

حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، ن

٢ - حيث إن $\binom{ن}{١} = \binom{ن}{ن-١} = ن$ فإن الحد الثاني هو ن $س^{ن-١}$ ص

والحد النوني (قبل الأخير) هو $ن$ س ص$^{ن-1}$

نتيجة (٨ ـ ٥)

بما أن $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ن-ر}$ من نتيجة (٨-٣)

إذاً معامل س$^{ن-ر}$ ص^{ر} في مفكوك (س + ص)^{ن} يساوي معامل س^{ر} ص$^{ن-ر}$، مما يدل على أن معامل الحد الأول يساوي معامل الحد الأخير، ومعامل الحد الثاني يساوي معامل الحد قبل الأخير، ومعامل الحد الثالث من بداية المفكوك يساوي معامل الحد الثالث من نهايته، الخ، كما سبق أن لاحظنا.

مثال (٨-١٨)

أوجد مفكوك (س + ص)^{٦}

الحل

$$(س + ص)^{٦} = س^{٦} + \binom{٦}{١} س^{٥} ص + \binom{٦}{٢} س^{٤} ص^{٢} + \binom{٦}{٣} س^{٣} ص^{٣}$$
$$+ \binom{٦}{٤} س^{٢} ص^{٤} + \binom{٦}{٥} س ص^{٥} + ص^{٦}$$

$$= س^{٦} + ٦ س^{٥} ص + \frac{٦ \times ٥}{٢ \times ١} س^{٤} ص^{٢} + \frac{٦ \times ٥ \times ٤}{٣ \times ٢ \times ١} س^{٣} ص^{٣}$$

$$+ \frac{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} س^{٢} ص^{٤} + \frac{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} س ص^{٥} + ص^{٦}$$

$=$ س^{٦} + ٦ س^{٥} ص + ١٥ س^{٤} ص^{٢} + ٢٠ س^{٣} ص^{٣}
+ ١٥ س^{٢} ص^{٤} + ٦ س ص^{٥} + ص^{٦}

مثال (٨-١٩)

أوجد مفكوك (س + ٣)^{٤}

الحـــل

(س + ٣)^{٤} $=$ س^{٤} + $\binom{٤}{١}$ س^{٣} (٣) + $\binom{٤}{٢}$ س^{٢} (٣)^{٢} +
$\binom{٤}{٣}$ س (٣)^{٣} + ٣^{٤}
$=$ س^{٤} + ٤ (٣) س^{٣} + ٦ (٩) س^{٢} + ٤ (٢٧) س + ٨١
$=$ س^{٤} + ١٢ س^{٣} + ٥٤ س^{٢} + ١٠٨ س + ٨١

مثلث المعاملات :

لو عدنا الى مفكوكات المقدار (س + ص)^{ن} عندما
ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ وأضفنا اليها (س + ص)^{٠} = ١ لوجدنا أن
معاملات هذه المفكوكات يمكن وضعها على شكل مثلث كما يلي:

ن = ٠							١						
ن = ١						١		١					
ن = ٢					١		٢		١				
ن = ٣				١		٣		٣		١			
ن = ٤			١		٤		٦		٤		١		
ن = ٥		١		٥		١٠		١٠		٥		١	
ن = ٦	١		٦		١٥		٢٠		١٥		٦		١

يسمى هذا المثلث من معاملات مفكوك ذي الحدين مثلث باسكال نسبة إلى الرياضي الفرنسي Pascal ، وبالتدقيق فيه نجد أن الأعداد التي على الضلع الأيمن والضلع الأيسر منه كلها ١ ، وأن كل عدد في داخل المثلث يساوي مجموع العددين اللذين فوقه . وهذا يتفق مع العلاقة التي سبق أن توصلنا إليها في نتيجة (٣ - ٤) في البند (٣ - ٤).

$$\binom{\text{ن}}{\text{ر}} + \binom{\text{ن}}{\text{ر} + ١} = \binom{\text{ن} + ١}{\text{ر} + ١} \qquad \text{ر} = ٠ ، ١ ، ٢ ، \cdots ، \text{ن} - ١$$

وبإمكاننا ـ استناداً الى هذه العلاقة ـ الاستمرار في الاضافة إلى مثلث باسكال، فنحصل على

ن = ٧   ١   ٧   ٢١   ٣٥   ٣٥   ٢١   ٧   ١

ن = ٨   ١   ٨   ٢٨   ٥٦   ٧٠   ٥٦   ٢٨   ٨   ١

.

.

.

وبذلك نستطيع حساب معاملات مفكوك ذي الحدين أو التحقق من صحة حسابها لقيم ن الصغيرة نسبياً.

مثال (٨-٢٠)

أوجد :

(أ) الحد السادس من مفكوك $(\text{أ} - ٢)^{٧}$

(ب) الحد الثالث من مفكوك $\left(أ + \frac{١}{ب}\right)^{١٣}$

الحـــل

(أ) حيث إن $\binom{ن}{ر}$ س$^{ن - ر}$ ص^{ر} هو الحد الذي ترتيبه ر + ١ في مفكوك (س + ص)^{ن}، نستنتج أن الحد السادس في مفكوك $(أ - ٢)^{٧}$ هو

$$ح_{٦} = \binom{٧}{٥} أ^{٢} (-٢)^{٥} = \binom{٧}{٢} أ^{٢} (-٢)^{٥} \qquad \text{(لماذا؟)}$$

وذلـك بعد اجـراء التعويض ن = ٧ ، ر + ١ = ٦ ،
س = أ ، ص = - ٢

$$ح_{٦} = \binom{٧}{٢} أ^{٢} (-٢)^{٥} \qquad = \frac{٧ \times ٦}{٢ \times ١} أ^{٢} (-٣٢)$$

$$= ٢١ (-٣٢) أ^{٢}$$

$$= -٦٧٢ أ^{٢}$$

لاحظ أنه كان بامكاننا الحصول على $\binom{٧}{٥}$ من مثلث باسكال اعلاه.

(ب) في هذه الحالة ن = ١٣ ، ر + ١ = ٣ ، س = أ ، ص = $\frac{١}{ب}$

$$ح_{٣} = \binom{١٣}{٢} أ^{٢} \left(\frac{١}{ب}\right)^{١١} = \frac{١٣ \times ١٢}{٢} أ^{٢} ب^{-١١}$$

$$= ٧٨ أ^{٢} ب^{-١١}$$

$$= ٧٨ \frac{أ^{٢}}{ب^{١١}}$$

تماريـن (٨ – ٥)

١ - اكتب مفكوكات ما يأتي:

(أ) $(أ + ب)^{٦}$

(ب) $(س + ٢ ص)^{٤}$

(حـ) $(س - ص)^{٥}$

(ء) $(س - ٥)^{٣}$

(هـ) $(١ - \frac{١}{٢} س)^{٨}$

(و) $(\frac{٢}{س} - \frac{س}{٢})^{٧}$

(ز) $(٣ ص - \frac{١}{٣})^{٥}$

(ح) $(\frac{١}{٢} أ^{٢} - \frac{٤}{أ})^{٤}$

٢ - أوجد الحدود التالية:

(أ) الحد السابع في مفكوك $(أ + س)^{٨}$

(ب) الحد الخامس في مفكوك $(١ - \frac{٢}{٣} س)^{١٠}$

(حـ) الحد الخامس في مفكوك $(٤ - \frac{١}{٢} س)^{١٠}$

(ء) الحد السادس في مفكوك $(س^{٣} - \frac{٢}{س^{٢}})^{٩}$

(هـ) الحد الأوسط في مفكوك $(٢ \text{ س}^{٢} - \frac{١}{٢})^{١٠}$

٣ ـ باستخدام نظرية ذات الحدين أثبت أن:

$$\binom{د}{٠} + \binom{د}{١} + \binom{د}{٢} + \cdots + \binom{د}{د} = ٢^{د}$$

حيث د عدد طبيعي. بالرجوع إلى مفهوم مجموعة القوة هل يمكنك تقديم تفسير لهذه النتيجة؟

٤ ـ اكتب مفكوك $(أ + ب)^{د}$ ثم أوجد كلاً مما يأتي باعطاء أ ، ب قيماً مناسبة:

(أ) $\binom{د}{٠} - \binom{د}{١} + \binom{د}{٢} - \cdots + (-١)^{د}\binom{د}{د}$

(ب) $\binom{د}{٠} + \frac{١}{٢}\binom{د}{١} + (\frac{١}{٢})^{٢}\binom{د}{٢} + \cdots + (\frac{١}{٢})^{د}\binom{د}{د}$

٥ ـ أوجد مفكوكات ما يأتي باستخدام مثلث باسكال:

(أ) $(\text{س} + \text{ص})^{٨}$

(ب) $(\text{هـ} - ١)^{٩}$

(جـ) $(\text{ع} + ٢)^{١٠}$

الخلاصة

١ - لأي مجموعة منتهية $سـ$ يستخدم الرمز $د(سـ)$ للدلالة على عدد عناصر المجموعة $سـ$.

٢ - عرِّف مبدأ العد في صورته الرمزية على النحو التالي:

$$د(سـ_١ \times سـ_٢ \times \cdots \times سـ_ن)$$
$$= د(سـ_١) \times د(سـ_٢) \times \cdots \times د(سـ_ن)$$

٣ - عدد تباديل مجموعة عدد عناصرها $ن$ مأخوذة راءً هو:

$$ل^{ن}_{ر} = ن(ن - ١)(ن - ٢) \cdots (ن - ر + ١) \quad \text{حيث } ر \leqslant ن$$

٤ - أي مجموعة $سـ$ ذات $ن$ من العناصر:

(أ) كل المجموعات الجزئية للمجموعة $سـ$ تشكل مجموعة القوة للمجموعة $سـ$ وعدد عناصرها يساوي $٢^{ن}$

(ب) عدد المجموعات الجزئية للمجموعة $سـ$ ذوات $ر$ من العناصر يساوي

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ل^{ن}_{ر}}{\underline{ر|}} \quad \text{حيث } ر \leqslant ن.$$

وهو يساوي عدد توافيق $سـ$ مأخوذة راءً راءً.

٥ - $\sum_{ر=1}^{ن} س_ر = س_1 + س_2 + \cdots + س_ن$

٦ - $(س + ص)^ن = \sum_{ر=0}^{ن} \binom{ن}{ر} س^{ن-ر} ص^ر$

$= \sum_{ر=0}^{ن} \binom{ن}{ر} س^ر ص^{ن-ر}$

٧ - يمكن ترتيب معاملات ذي الحدين $\binom{ن}{ر}$ في صفوف لقيم ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ... بحيث تشكل هذه الصفوف مثلثاً متطابق الضلعين يتكون ضلعاه الأيمن والأيسر من العدد ١ مكرراً، وكل معامل في داخل المثلث يساوي مجموع المعاملين اللذين فوقه. ويسمى هذا المثلث مثلث باسكال.

تمارين عامة

١ - كم عدداً من أربعة أرقام يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ اذا كان:

(أ) التكرار مسموحاً به ؟ (ب) التكرار غير مسموح به ؟

(ح) التكرار غير مسموح، وبحيث يكون العدد أقل من ٥٠٠٠ ؟

٢ - يراد تكوين لجان في مدرسة ثانوية، بحيث يكون بكل لجنة طالب من كل صف من الصفوف الثلاثة التي عدد التلاميذ فيها ٤٠، ٣٥، ٣٠ على الترتيب. كم لجنة يمكن تكوينها بهذه الطريقة؟

٣ - بكم طريقة يمكن لسبعة أطفال الخروج من قاعة بها خمسة أبواب؟

٤ - في حديقة عامة لها خمسة أبواب، بكم طريقة يستطيع رجل أن يدخل ويخرج ؟

(أ) من بابين مختلفين؟ (ب) من أي باب؟

٥ ـ استضاف مدير مدرسة ثلاثة مدرسين وأربعة طلاب، وجلسوا للطعام على مائدة مستديرة بحيث جلس المدير على كرسي معين، وبجانبه طالب فمدرس فطالب فمدرس، وهكذا. بكم طريقة يمكن للمجموعة الجلوس؟

٦ ـ ٩ قطع من العملة قذفت آنياً. بكم طريقة يمكن أن تظهر بها ٤ قطع متفقة في أحد الوجهين، بينما تتفق الخمس الأخرى في الوجه الآخر؟

٧ ـ في مجلس إدارة مكون من ١٠ أعضاء بكم طريقة يمكن اتخاذ قرار باتفاق ٦ أعضاء ضد ٤؟

٨ ـ لدينا ٨ نقاط كل ٣ منها ليست على استقامة واحدة.

(أ) كم قطعة مستقيمة يمكن رسمها بين هذه النقاط؟

(ب) كم مثلثاً يمكن تعيينه؟

٩ ـ يراد تقسيم ١٠ كتب بين طالبين أ ، ب بحيث يعطى الأول ٦ كتب والثاني ٤ كتب. بكم طريقة يمكن أن يتم هذا التقسيم؟

وبكم طريقة يمكن أن يتم التقسيم بحيث يعطى الأول ٦ كتب والثاني ٢؟

١٠ ـ تحقق من صحة أو خطأ المساواة في كل من الحالات التالية؛

(أ) $٦ \sum_{١}^{ن} ر^{٢} = \sum_{١}^{ن} ٦ ر^{٢}$

(ب) $\sum_{١}^{ن} س_{ر} = \sum_{١}^{ن} س_{ع}$

(حـ) $\left(\sum_{١}^{ن} أ_{ر}\right)\left(\sum_{١}^{ن} ب_{ر}\right) = \sum_{١}^{ن} أ_{ر} ب_{ر}$

(د) $\sum_{١}^{\text{ك}} \text{س}_{\text{ر}} + \sum_{\text{ك}+١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} = \binom{\text{ن}}{١} \text{س}_{\text{ر}}$ حيث $١ < \text{ك} < \text{ن}$

(هـ) $\left(\sum_{١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} \right)^{٢} = \sum_{١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}^{٢}$

١١ - احسب المقادير التالية :

(أ) $\binom{١٠}{٥}$ (ب) $\binom{١١}{٣}$ (جـ) $\binom{٥٥}{٥٤}$

(د) $\binom{٩٩}{٠}$ (هـ) $\binom{٥}{٤}\binom{٦}{٥}$

١٢ - أوجد مفكوك $(\text{س} + ٢\ \text{س}^{٢})^{٧}$

١٣ - أوجد مفكوك $\left(١ + \frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{٥}$

١٤ - أوجد الحد الحادي عشر من مفكوك $\left(\frac{١}{٦} - \frac{\text{س}}{٣}\right)^{١٥}$

١٥ - أوجد الحد التاسع من مفكوك $\left(\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \frac{٨}{\text{س}}\right)^{١٧}$

١٦ - استخدم نظرية ذات الحدين لإثبات أن :

$$\sum_{٠}^{\text{ن}} ٢^{\text{ر}} \binom{\text{ن}}{\text{ر}} = ٣^{\text{ن}}$$

وتحقق من صحة المساواة في حالة $\text{ن} = ٤$

١٧ - أثبت صحة العلاقة

$$\binom{\text{ك}+٢}{\text{ر}+٢} = \binom{\text{ك}}{\text{ر}+٢} + ٢\binom{\text{ك}}{\text{ر}+١} + \binom{\text{ك}}{\text{ر}}$$

بتطبيق نتيجة (٣ - ٤) مرتين.

الباب التاسع

الأرقام القياسية

9 ـ 1 مُقَدِّمَة

9 ـ 2 منسوب السعر

9 ـ 3 الرقم القياسي التجميعي البسيط

9 ـ 4 الرقم القياسي التجميعي المرجح

9ـ 5 متوسط المناسيب البسيط

– الخلاصة

– تمارين عامة

الباب التاسع

الأرقـــام القيـاسيـة

٩ ـ ١ مقدمـــة

تختلف كثير من الظواهر باختلاف الزمان والمكان. فظاهرة مثل سعر التفاح مثلاً، تختلف قيمتها من فترة زمنية لأخرى، ومن منطقة جغرافية لأخرى. وفي مثل هذه الحالة قد يكون من المفيد مقارنة قيمة الظاهرة بين فترتين أو منطقتين معينتين لمعرفة ما إذا كانت تتغير بانتقالنا من فترة (أو منطقة) لأخرى، ومقدار هذا التغير. ويقودنا هذا للبحث عن رقم يمكن اعتباره مقياساً للتغير.

وتزداد الحاجة لمثل هذا الرقم في حالة سعينا لمقارنة التغير في مجموعة مرتبطة من الظواهر، مثل أسعار السلع الاستهلاكية، بين فترات زمنية (أو أماكن جغرافية) مختلفة. وذلك لأن مجرد فحص قيم عدد من الظواهر بين فترتين لا يتيح لنا في العادة رؤية اتجاه أو مقدار التغير في قيم المجموعة ككل. إذ قد تزيد قيم بعض هذه الظواهر بينما تنخفض قيم الأخرى، أو تظل ثابتة بين الفترتين. ويسمى الرقم الذي يستخدم لقياس التغير بالرقم القياسي.

ويتم تكوين الرقم القياسي بنسبة قيمة الظاهرة أو الظواهر في إحدى الفترتين وتسمى فترة المقارنة، إلى قيمتها في الفترة الأخرى وتسمى فترة الأساس. ويتبع نفس المبدأ في حالة الأماكن الجغرافية.

تعريف (٩-١)

الرقم القياسي هو رقم نسبي يقيس التغير الذي يطرأ على ظاهرة أو مجموعة مرتبطة من الظواهر بين فترتين زمنيتين أو منطقتين جغرافيتين .

وقد شاع استخدام الأرقام القياسية بصفة خاصة في مجال الاقتصاد، لقياس التغير في الظواهر الاقتصادية مثل الأسعار، الإنتاج، الدخل، البطالة، الصادرات والواردات وما إلى ذلك. كما استخدمت في مجالات أخرى مثل التعليم والدراسات السكانية وغيرها.

ومن أكثر الأرقام القياسية شيوعاً:

- الرقم القياسي لتكاليف المعيشة والذي يقيس التغير في أسعار السلع الاستهلاكية.
- الأرقام القياسية للإنتاج والتي تبين التغير في إنتاج السلع المختلفة مثل البترول والحديد والقمح. . . الخ،
- وكذلك الرقم القياسي للبطالة، والرقم القياسي للأجور.

ولا يقتصر استخدام الأرقام القياسية على قياس التغير بالنسبة للزمن أو المكان، وإنما يمكن أن يتعداها لقياس التغير بالنسبة لمتغيرات أخرى مثل الدخل والعمر والمهنة.

وفي هذا الباب سنقتصر على الأرقام القياسية التي تقيس التغير في الأسعار بالنسبة للزمن. غير أن جميع الطرق التي سنتعرض لها فيما يلي يمكن تطبيقها على الظواهر الأخرى بتعديلات طفيفة.

٩ ـ ٢ منسوب السعر

منسوب السعر، ويسمى أحياناً بالنسبة البسيطة، هو أبسط صور الأرقام القياسية. ويستخدم في حالة مقارنة سعر سلعة واحدة بين فترتين. وللحصول على منسوب السعر، ننسب سعر السلعة في فترة المقارنة إلى سعرها في فترة الأساس، ونضع الناتج في شكل نسبة مئوية.

تعريف (٩-٢)

$$\text{منسوب السعر} = \frac{\text{سعر السلعة في فترة المقارنة}}{\text{سعر السلعة في فترة الأساس}} \times ١٠٠$$

فإذا رمزنا لسعر السلعة في فترة المقارنة بالرمز $ع_١$ ولسعرها في فترة الأساس بالرمز $ع_٠$ فإن التعريف السابق يمكن التعبير عنه رمزياً كما يلي:

$$\text{منسوب السعر} = \frac{ع_١}{ع_٠} \times ١٠٠$$

مثال (٩-١)

إذا كان سعر كيلو البرتقال في مدينة ما سنة ١٣٩٠ هـ هو ٥ ريالات. وفي سنة ١٣٩٥ هـ أصبح ٦ ريالات. أحسب منسوب السعر في سنة ١٣٩٥ هـ بالنسبة لسنة ١٣٩٠ هـ كسنة أساس.

الحـــل

بما أن عام ١٣٩٠ هـ هو سنة الأساس، وعام ١٣٩٥ هـ هو سنة المقارنة فإن:

$ع_١$ = السعر في سنة المقارنة = ٦ ريالات

$ع_٠$ = السعر في سنة الأساس = ٥ ريالات

إذاً ، فإن منسوب السعر في سنة ١٣٩٥ هـ بالنسبة لسنة ١٣٩٠ هـ هو:

$$\text{منسوب السعر} = \frac{ع_١}{ع_٠} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٦}{٥} \times ١٠٠$$

$$= ١٢٠ \,\%$$

وهذا يعني أن سعر كيلو البرتقال قد زاد في سنة ١٣٩٥ هـ بنسبة ٢٠ ٪ عما كان

عليه في سنة ١٣٩٠ هـ.

مثال (٩-٢)

إذا كان سعر كيلو الجبن في سنة ١٣٨٢ هـ هو ٦ ريالات وفي سنة ١٣٩٤ هـ أصبح ١٠ ريالات، أحسب:

أ) منسوب السعر في سنة ١٣٩٤ هـ باعتبار ١٣٨٢ هـ كسنة أساس.

ب) منسوب السعر في سنة ١٣٨٢ هـ باعتبار ١٣٩٤ هـ كسنة أساس.

جـ) منسوب السعر في سنة ١٣٨٢ هـ باعتبار نفس السنة كأساس.

الحـــل

أ) باعتبار ١٣٨٢ هـ سنة أساس، ١٣٩٤ هـ سنة مقارنة فإن :

$ع_١$ = ١٠ ريالات

$ع_٠$ = ٦ ريالات

وبهذا يكون:

$$\text{منسوب السعر} = \frac{ع_١}{ع_٠} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٠}{٦} \times ١٠٠$$

= ١٦٦,٦٧ ٪ تقريباً.

ب) باعتبار سنة ١٣٩٤ هـ سنة أساس، ١٣٨٢ هـ سنة مقارنة فإن:

$ع_١$ = ٦ ريالات

$ع_٠$ = ١٠ ريالات

وبهذا يكــون:

$$\text{منسوب السعر} = \frac{ع_١}{ع_٠} \times ١٠٠$$

$= \frac{٦}{١٠} \times ١٠٠$

$= ٦٠ \%$

جـ) بما أن سنة ١٣٨٢ هـ سنة أساس ومقارنة في نفس الوقت فإن:

$ع_1 = ع_0 = ٦$ ريالات

وبهذا يكـــون :

منسوب السعر $= \frac{٦}{٦} \times ١٠٠$

$= ١٠٠ \%$

أي أن منسوب السعر لسنة معينة بالنسبة لنفس السنة هو ١٠٠ ٪، وهذه نتيجة عامـة.

مثال (٩-٣)

الجدول التالي يوضح أسعار سلعة معينة في ٤ سنوات

السنة	١٣٧٠ هـ	١٣٧٥ هـ	١٣٧٦ هـ	١٣٨٠ هـ
السعر	٢٠	٢٥	٣٥	٤٠

باعتبار عام ١٣٧٥ هـ سنة أساس، أحسب مناسيب الأسعار لبقية السنوات.

الحـــل

باعتبار سنة ١٣٧٥ هـ سنة أساس فإن:

منسوب السعر في سنة ١٣٧٠ هـ $= \frac{٢٠}{٢٥} \times ١٠٠ = ٨٠ \%$

منسوب السعر في سنة ١٣٧٦ هـ $= \frac{٣٥}{٢٥} \times ١٠٠ = ١٤٠ \%$

منسوب السعر في سنة ١٣٨٠ هـ $= \frac{٤٠}{٢٥} \times ١٠٠ = ١٦٠ \%$

ويلخص الجدول التالي هذه النتائج:

السنة (هـ)	١٣٧٠	١٣٧٥	١٣٧٦	١٣٨٠
منسوب السعر (٪)	٨٠	١٠٠	١٤٠	١٦٠

حيث وضعنا منسوب السعر لسنة الأساس ١٠٠ ٪ كما هو الحال دائمًا.

٩ ـ ٣ الرقم القياسي التجميعي البسيط

يمتاز منسوب السعر بالبساطة، إلا أن استخدامه يقتصر على الحالة التي تكون فيها هناك سلعة واحدة. ولهذا فهو لا يصلح في الحالات التي تقتضي الحصول على رقم يبين التغير في أسعار مجموعة من السلع بدلاً من سعر سلعة واحدة. فمثلاً، إذا أردنا معرفة ما إذا كانت تكاليف المعيشة قد تغيرت بين سنتين معينتين، فإن حساب منسوب السعر لكل من السلع المناسبة لا يتيح لنا ـ في العادة ـ معرفة ما إذا كانت الأسعار في جملتها قد ارتفعت أو انخفضت بين السنتين. إذ قد ترتفع أسعار بعض السلع وتنخفض أسعار البعض الآخر كما ذكرنا آنفاً. وفي مثل هذه الحالة نحتاج إلى رقم واحد يعكس الاتجاه العام لأسعار هذه السلع، ويعطينا مقياساً تقريبياً لمقدار التغير فيها. وهناك صيغ عديدة للأرقام القياسية في حالة تعدد السلع. ومن أبسط هذه الصيغ الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار، ويوصف كالتالي:

تعريف (٩-٣)

$$\text{الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار} = \frac{\text{مجموع الأسعار في سنة المقارنة}}{\text{مجموع الأسعار في سنة الأساس}} \times ١٠٠$$

وللتعبير عن الرقم التجميعي البسيط رمزيا نضع:

$ع_{.1}$ ، $ع_{.2}$ ، . . . لتمثل سعر السلعة ١، وسعر السلعة ٢، . . . في سنة الأساس،

$ع_{11}$ ، $ع_{12}$، . . . لتمثل سعر السلعة ١، وسعر السلعة ٢، . . . في سنة المقارنة

ونعرف :

$\sum ع_{.} = ع_{.1} + ع_{.2} + \ldots$ = مجموع أسعار السلع في سنة الأساس

$\sum ع_{1} = ع_{11} + ع_{12} + \ldots$ = مجموع أسعار السلع في سنة المقارنة

وبهــذا يكــون :

الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار = $\frac{\sum ع_{1}}{\sum ع_{.}} \times ١٠٠$

مثال (٩-٤)

الجدول التالي يوضح أسعار ٥ سلع (بالريالات) في سنتي ١٣٨٠ هـ، ١٣٩٥ هـ في بلد ما:

السلعة / السنة (هـ)	الخبز (بالقطعة)	الجبن (بالكيلو)	السكر (بالكيلو)	الزبد (بالكيلو)	الشاي (بالعلبة)
١٣٨٠	١	٥	٢	٩	٧
١٣٩٥	١,٥	٨	٣	٩	١٠

احسب الرقم القياسي التجميعي البسيط لأسعار هذه السلع باعتبار سنة ١٣٨٠ هـ كأساس.

الحـــل

الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار = $\frac{\text{مجموع الأسعار في سنة المقارنة}}{\text{مجموع الأسعار في سنة الأساس}} \times ١٠٠$

$$= \frac{١٫٥ + ٨ + ٣ + ٩ + ١٠}{١ + ٥ + ٢ + ٩ + ٧} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٣١٫٥}{٢٤} \times ١٠٠$$

$$= ١٣١٫٢٥ \%$$

وهذا يعني أن أسعار السلع المذكورة قد زادت بمقدار ٣١٫٢٥ ٪ في سنة ١٣٩٥ هـ عما كانت عليه في ١٣٨٠ هـ.

مثال (٩-٥)

فيما يلي متوسط أسعار السلع أ، ب، جـ، في الفترة من ١٣٩٠ هـ إلى ١٣٩٣ هـ (بالريالات):

السلعة (بالكيلو) / السنة (هـ)	أ	ب	جـ	مجموع أسعار السلع
١٣٩٠	١٠	٣٥	١١٠	١٥
١٣٩١	١٢	٣٩	١٢٥	١٧٦
١٣٩٢	١٢	٤٣	٢٠٠	٢٥٥
١٣٩٣	١٣	٤٥	٢٠٢	٢٦٠

بأخذ ١٣٩٠ هـ كسنة أساس، احسب الأرقام القياسية التجميعية البسيطة للأسعار للسنوات ١٣٩١ هـ ، ١٣٩٢ هـ ، ١٣٩٣ هـ .

الحـــل

باعتبار ١٣٩٠ هـ سنة أساس فإن :

$$\text{الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار في سنة ١٣٩١} = \frac{\text{مجموع الأسعار في سنة ١٣٩١}}{\text{مجموع الأسعار في سنة ١٣٩٠}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٧٦}{١٥٥} \times ١٠٠$$

$$= ١١٣.٥٥ \,\%$$

$$\text{الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار في سنة ١٣٩٢} = \frac{\text{مجموع الأسعار في سنة ١٣٩٢}}{\text{مجموع الأسعار في سنة ١٣٩٠}} \times ١٠٠$$

$$\frac{٢٥٥}{١٥٥} \times ١٠٠$$

$$= ١٦٤,٥٢ \,\%$$

$$\text{الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار في سنة ١٣٩١} = \frac{\text{مجموع الأسعار في سنة ١٣٩٣}}{\text{مجموع الأسعار في سنة ١٣٩٠}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٢٦٠}{١٥٥} \times ١٠٠$$

$$= ١٦٧,٧٤ \,\%$$

ويلخص الجدول التالي هذه النتائج:

السنة (هـ)	الرقم القياسي التجميعي البسيط (٪)
١٣٩٠	١٠٠,٠٠
١٣٩١	١١٣,٥٥
١٣٩٢	١٦٤,٥٢
١٣٩٣	١٦٧,٧٤

٩ ـ الرقم القياسي التجميعي المرجح

يعاني الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار من عيبين رئيسين:

١ ــ لا يضع في الاعتبار تفاوت السلع في الأهمية.

ففي حساب الرقم التجميعي البسيط نقوم بمجرد جمع أسعار السلع دون إعطاء السلع الأهم سبياً وزناً أكبر في المجموع. وهذا يعني أننا حين نحسب الرقم القياسي التجميعي البسيط لأسعار السلع الاستهلاكية مثلًا، نعطي سلعة هامة مثل الخبز أو الحليب نفس الأهمية التي نعطيها لسلعة غير هامة مثل معجون الحلاقة. وواضح أن مثل هذا الرقم سيكون مضللاً إذا استخدم كمقياس للتغير في تكاليف المعيشة.

٢ ــ لا يأخذ في الاعتبار الوحدة التي قيست بها السلعة (كيلو، طن، متر، قطعة، ... الخ) رغم أنها تؤثر في قيمته.

وللتخلص من هذه العيوب نلجأ لما يسمى بالأرقام التجميعية المرجحة. وفي هذه الأرقام نرجح سعر كل سلعة بضربه في معامل مناسب قبل إجراء عملية الجمع. والمعامل يكون، عادة، شيئاً يمثل أهمية السلعة، مثل الكمية المستهلكة منها في سنة الأساس أو سنة المقارنة أو أي كمية أخرى. وبالطبع تختلف قيمة الرقم الناتج باختلاف نوعية الأوزان أو الترجيحات

وسنقتصر على الرقم القياسي التجميعي المرجح بكميات سنة الأساس واضعين في الاعتبار أن نفس الطريقة يمكن اتباعها في الحالات الأخرى.

فإذا كان لدينا عدد من السلع، وكانت أسعارها في سنة الأساس $ع_{١}$، $ع_{٢}$، .... وفي سنة المقارنة $ع_{١١}$، $ع_{١٢}$، ....

وإذا كانت الكميات في سنة الأساس لنفس السلع هي:

$ك_{١٠}$، $ك_{٢٠}$، .... فإن الرقم القياسي التجميعي المرجح بكميات سنة الأساس يكون:

تعريف (٩-٤)

الرقم القياسي التجميعي المرجح بكميات الأساس

$$= \frac{\text{مجموع (أسعار سنة المقارنة × كميات سنة الأساس)}}{\text{مجموع (أسعار سنة الأساس × كميات سنة الأساس)}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{ع_{١١}ك_{٠١} + ع_{١٢}ك_{٠٢} + \cdots}{ع_{٠١}ك_{٠١} + ع_{٠٢}ك_{٠٢} + \cdots} \times ١٠٠$$

$$= \frac{\sum ع_١ ك_٠}{\sum ع_٠ ك_٠} \times ١٠٠$$

وللحصول على هذا الرقم نتبع الخطوات التالية:

١ ــ نوجد البسط، وذلك بضرب سعر كل سلعة في سنة المقارنة في كميتها في سنة الأساس، ونجمع حواصل الضرب لجميع السلع.

٢ ــ نوجد المقام، وذلك بضرب سعر كل سلعة في سنة الأساس في كميتها في سنة الأساس ونجمع حواصل الضرب لجميع السلع.

٣ ــ نقسم الناتج في الخطوة (١) على الناتج في الخطوة (٢) ونضرب النتيجة في ١٠٠.

وتقضي هذه الطريقة بصفة خاصة على العيب الأول في الرقم القياسي التجميعي البسيط. فإذا كانت السلعة الأولى مثلاً أكثر أهمية من السلعة الثانية بحيث كانت الكمية المستهلكة منها $ك_{٠١}$ أكبر من الكمية المستهلكة من السلعة الثانية $ك_{٠٢}$. فبضرب سعر كل من السلعتين في الكمية المناظرة نتيح للسلعة الأولى أن تمثل بمقدار أكبر من السلعة الثانية في المجموع. وهذا بالطبع يختلف عما كان سيحدث لو أننا جمعنا الأسعار دون تعديل كما يحدث في حالة الرقم القياسي التجميعي البسيط.

مثال (٩-٦)

فيما يلي بيانات لأسعار ٣ سلع (بالريالات) في سنتي ١٣٨١ هـ، ١٣٩٦ هـ والكميات المستهلكة منها:

السنة / السلعة	١٣٨١ هـ		١٣٩٦ هـ	
	السعر	الكمية	السعر	الكمية
الجبن (بالرطل)	٥	١٠,٠٠٠	٧	١٥,٠٠٠
الخبز (بالقطعة)	١	٨٠,٠٠٠	١	١٠٠,٠٠٠
الزيتون (بالكيلو)	٩	١,٠٠٠	١٠	١,٥٠٠

باعتبار سنة ١٣٨١ هـ سنة أساس، أحسب الرقم القياسي التجميعي للأسعار المرجح بكميات سنة الأساس.

الحـــل

الرقم القياسي التجميعي للأسعار المرجح بكميات الأساس

$$= \frac{\sum ع_١ ك_٠}{\sum ع_٠ ك_٠} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١,٠٠٠ \times ١٠ + ٨٠,٠٠٠ \times ١ + ١٠,٠٠٠ \times ٧}{١,٠٠٠ \times ٩ + ٨٠,٠٠٠ \times ١ + ١٠,٠٠٠ \times ٥} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٦٠,٠٠٠}{١٣٩,٠٠٠} \times ١٠٠$$

$$= ١١٥,١١ \ ٪$$

لاحظ أنك إذا حسبت الرقم التجميعي البسيط للأسعار من البيانات السابقة لوجدت أنه يساوي ١٢٠ ٪. أي أنه أكبر من الرقم المرجح. والسبب في ذلك يعود لعملية الترجيح التي أعطت وزناً أكبر لسلعة الخبز، وهي سلعة لم يتغير سعرها بين الفترتين.

مثال (٩-٧)

من بيانات المثال (٩ – ٦) احسب الرقم القياسي التجميعي للأسعار المرجح بكميات الأساس، ولكن هذه المرة استخدم ١٣٩٦ هـ كسنة أساس.

الحـــل

إذا اعتبرنا ١٣٩٦ هـ سنة أساس فإن:

الرقم القياسي التجميعي للأسعار المرجح بكميات الأساس

$$= \frac{\sum ع_{١} ك_{٠}}{\sum ع_{٠} ك_{٠}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٥ \times ١٥,٠٠٠ + ١ \times ١٠٠,٠٠٠ + ٩ \times ١,٥٠٠}{٧ \times ١٥,٠٠٠ + ١ \times ١٠٠,٠٠٠ + ١٠ \times ١,٥٠٠} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٨٨,٥٠٠}{٢٢٠,٠٠٠} \times ١٠٠$$

$$= ٨٥,٦٨ \,\%$$

أي أن الأسعار في سنة ١٣٨١ هـ أقل بمقدار ١٤,٣٢ عما هي عليه في سنة ١٣٩٦ هـ.

٩ ـ ٥ متوسط المناسيب البسيط

وهذا الرقم يتخلص من العيب الثاني للرقم التجميعي البسيط، لكنه يظل يعاني من العيب الأول. وللحصول على متوسط المناسيب البسيط نحسب منسوب السعر لكل سلعة على حدة ثم نأخذ الوسط الحسابي للمناسيب الناتجة.

فإذا كان لدينا عدد ن من السلع ومناسيبها هي:

$$\frac{ع_{١١}}{ع_{٠١}} \times ١٠٠ \text{ ، } \frac{ع_{١٢}}{ع_{٠٢}} \times ١٠٠ \text{ ، } \ldots\ldots \text{ إلى } \frac{ع_{١ن}}{ع_{٠ن}} \times ١٠٠$$

فإن متوسط المناسيب البسيط هو الوسط الحسابي لهذه المناسيب.

تعريف (٩-٥)

$$\text{متوسط المناسيب البسيط} = \frac{\frac{ع_{١}}{ع_{٠}} \times ١٠٠ + \frac{ع_{٢}}{ع_{٠}} \times ١٠٠ + \cdots + \frac{ع_{ن}}{ع_{٠}} \times ١٠٠}{ن}$$

$$= \frac{\sum \frac{ع_{١}}{ع_{٠}}}{ن} \times ١٠٠$$

مثال (٩-٨)

من البيانات التالية احسب متوسط المناسيب البسيط بأخذ سنة ١٣٩٠ هـ كأساس:

السنة (هـ) \ السلعة	أ	ب	جـ
١٣٩٠	١٠	٣٥	١١٠
١٣٩١	١٢	٣٩	١٢٥

الحـــل

منسوب السعر للسلعة أ $= \frac{\text{السعر في سنة ١٣٩١ هـ}}{\text{السعر في سنة ١٣٩٠}} \times ١٠٠$

$= \frac{١٢}{١٠} \times ١٠٠$

$= ١٢٠ \%$

منسوب السعر للسلعة ب $= \frac{٣٩}{٣٥} \times ١٠٠$

$= ١١١,٤٣ \%$

منسوب السعر للسلعة جـ = $\frac{١٢٥}{١١٠} \times ١٠٠$

= ١١٣,٦٤ ٪

وبهذا فإن :

متوسط المناسيب البسيط = $\frac{١٢٠ + ١١١,٤٣ + ١١٣,٦٤}{٣}$

= ١١٥,٠٢ ٪

تجدر الإشارة هنا إلى أن استخدام الوسط الحسابي ليس سوى إحدى الطرق الممكنة لحساب متوسط المناسيب البسيط. ذلك أنه من الممكن استخدام أي وسط آخر غير الوسط الحسابي مثل الوسط الهندسي أو الوسيط وما إلى ذلك.

كذلك يمكن أخذ وسط مرجح للمناسيب بدلاً من الوسط البسيط إذا كانت السلع تتفاوت في الأهمية.

الخلاصة

١ ـ الرقم القياسي هو رقم يقيس التغير الذي يطرأ على ظاهرة أو مجموعة مرتبطة من الظواهر بين فترتين زمنيتين أو مكانين جغرافيين ويأخذ عادة صورة نسبة مئوية.

٢ ـ منسوب السعر هو أبسط صور الأرقام القياسية، ويستخدم في حالة السلعة الواحدة. وتعريفه كالآتي:

$$\text{منسوب السعر} = \frac{ع_١}{ع_٠} \times ١٠٠$$

٣ ـ الرقم القياسي التجميعي البسيط يستخدم في حالة تعدد السلع التي لا تختلف من حيث الأهمية أو وحدة القياس، ويعرف كما يلي:

$$\text{الرقم القياسي التجميعي البسيط} = \frac{\sum ع_١}{\sum ع_٠} \times ١٠٠$$

حيث $\sum ع_١$، $\sum ع_٠$ هي مجموع الأسعار في سنة المقارنة والأساس على الترتيب.

٤ ـ الرقم القياسي التجميعي للأسعار المرجح بكميات الأساس يضع في الاعتبار أهمية السلع ويعرف كما يلي:

$$\text{الرقم القياسي التجميعي المرجح بكميات الأساس} = \frac{\sum ع_١ ك_٠}{\sum ع_٠ ك_٠} \times ١٠٠$$

حيث $\sum ع_١ ك_٠$ مجموع حواصل ضرب سعر كل سلعة في سنة المقارنة في كميتها في سنة الأساس، $\sum ع_٠ ك_٠$ مجموع حواصل ضرب سعر كل سلعة في سنة الأساس في كميتها في سنة الأساس.

٥ ـ متوسط مناسيب الأسعار البسيط يضع في الاعتبار وحدة القياس، وتعريفه:

$$\text{متوسط المناسيب البسيط} : \frac{\sum \frac{ع_١}{ع_٠} \times ١٠٠}{ن}$$

وهو عبارة عن الوسط الحسابي لمناسيب أسعار السلع المختلفة.

تمارين

[١] ما هو الغرض من استخدام الأرقام القياسية؟

[٢] اذكر خمسة مجالات يمكن استخدام الأرقام القياسية فيها.

[٣] اذكر بعض المشاكل التي تتوقع أن تواجهك حين تسعى لتركيب رقم قياسي في الحياة العملية.

[٤] البيانات التالية توضح أسعار صنف معين من أجهزة التليفزيون (بعشرات الريالات) في الفترة من ١٣٨٠ هـ إلى ١٣٨٦ هـ باستخدام سنة ١٣٨٠ هـ كاساس احسب مناسيب الأسعار للسنوات من ١٣٨١ هـ إلى ١٣٨٦ هـ.

السنة (هـ)	١٣٨٠	١٣٨١	١٣٨٢	١٣٨٣	١٣٨٤	١٣٨٥	١٣٨٦
السعر	٦٢	٧٥	٧٦	٨٠	٨٣	٨٣	٩٢

[٥] في التمرين رقم ٤ احسب مناسيب الأسعار باستخدام سنة ١٣٨٣ هـ كأساس.

[٦] البيانات التالية توضح أسعار وكميات ٤ سلع (بالريالات) في سنتين بمنطقة ما:

السلعة	١٣٨٢ هـ		١٣٨٣ هـ	
	السعر	الكمية	السعر	الكمية
الخبز (بالقطعة)	١	٨٠٠,٠٠٠	١	١٠٠٠,٠٠٠
البن (بالرطل)	٣	٢٥٠,٠٠٠	٢	٣٠٠,٠٠٠
العطر (بالزجاجة)	١٠	٨,٠٠٠	١٥	٨,٥٠٠
الحرير (بالمتر)	٨٠	١,٠٠٠	١٥٠	١,٢٠٠

احسب الرقم التجميعي البسيط للأسعار باعتبار سنة ١٣٨٢ هـ سنة أساس.

[٧] من بيانات التمرين رقم (٦) وبأخذ ١٣٨٢ هـ كسنة أساس، احسب الرقم التجميعي المرجح بكميات الأساس وقارنه بالرقم التجميعي البسيط الذي حصلت عليه في الإجابة على التمرين ٦ .

[٨] إذا كان الغرض من الحصول على الرقم القياسي في التمرين رقم (٦) هو تقدير التغير في تكاليف المعيشة، فأيهما تفضل: الرقم التجميعي البسيط أم الرقم التجميعي المرجح بكميات الأساس؟ ولماذا ؟

[٩] ما هو الغرض من الترجيح في تركيب الأرقام القياسية؟

[١٠] فيما يلي أسعار ٤ سلع في سنتين :

السلعة	١٣٩٠ هـ	١٣٩٢ هـ
أ	١٠	١٥
ب	٣	٣
حـ	٧	١٠
د	١٥	١٨

باعتبار ١٣٩٠ هـ سنة أساس، احسب متوسط المناسيب بطريقة الوسط الحسابي.

[١١] اذكر طريقة أخرى غير الوسط الحسابي يمكن بها إيجاد متوسط المناسيب البسيط، واستخدمها لإيجاد متوسط المناسيب البسيط في التمرين رقم (١٠) علّق على النتيجة.

[١٢] كان عدد العاملين في شركة معينة في سنة ١٣٩٠ هـ هو ١٠,٠٠٠ عامل، وفي سنة ١٣٩٣ هـ أضافت الشركة ٥٠٠ عامل. احسب الرقم القياسي للعمالة في الشركة سنة ١٣٩٣ هـ باعتبار سنة ١٣٩٠ هـ سنة أساس.

[١٣] استنبط صيغة للرقم القياسي التجميعي للأسعار المرجح بكميات سنة المقارنة.

الباب العاشر

الإحصاءات الحيوية

١٠ ـ ١ مقدِّمة

١٠ ـ ٢ تعداد السكان

١٠ ـ ٣ إحصاءات المواليد

١٠ ـ ٤ إحصاءات الوفيات

١٠ ـ ٥ تقدير أعداد السكان

– الخلاصة

– تمارين

الباب العاشر

الإحصاءات الحيوية

١٠ ـ ١ مقـدمــة

يقصد بالإحصاءات الحيوية البيانات المتعلقة بأفراد مجتمع ما منذ ولادتهم وحتى وفاتهم، والتي تبين أعدادهم، وحركتهم من حيث المكان أو من حيث الزيادة والنقصان، بالإضافة إلى أي ظواهر أخرى تتعلق بحياتهم مثل الزواج والطلاق والصحة والمرض.

ومن أهم الإحصاءات الحيوية الإحصاءات الخاصة بعدد السكان، وإحصاءات المواليد والوفيات، وإحصاءات الهجرة، وإحصاءات الزواج والطلاق.

وفي هذا الباب سنتعرض بشيء من التفصيل لاحصاءات المواليد وإحصاءات الوفيات وتقدير أعداد السكان. كما سنتناول تعداد السكان والذي يمثل أهم مصادر الإحصاءات الحيوية.

١٠ ـ ٢ تعداد السكان

يقصد بتعداد السكان حصر أعدادهم ومعرفة خصائصهم المختلفة من عمر ومهنة وما إلى ذلك، في وقت معين. وكانت التعدادات في الماضي تقتصر على تحديد أعداد السكان، أما اليوم فهي تقدم بيانات متنوعة عن السكان تمكن من معرفة تركيبهم العمري والمهني وتوزيعهم الجغرافي، كما تصف حالتهم الزواجية والصحية والتعليمية وما إلى ذلك.

ورغم أن بعض الدول أجرت تعدادات في عصور مبكرة من التاريخ، إلا أن التعداد

الذي يستند إلى أساس علمي لم يعرف إلا حديثاً.

أسس إجراء التعداد :

يجري تعداد السكان عادة على أحد أساسين :

أ ــ الأساس النظري ؛ ويسمى التعداد حينئذ تعداداً نظرياً.

ب ــ الأساس الفعلي ؛ ويسمى التعداد حينئذ تعداداً فعلياً .

التعداد النظري :

التعداد النظري هو التعداد الذي يتم فيه حصر السكان حسب مكان إقامتهم العادية سواء تواجدوا فيه أو لم يتواجدوا وقت التعداد. فالشخص الذي لا ينتمي للأسرة ويتواجد معها وقت التعداد بالمصادفة لا يعد مع أفرادها، وإنما يعد في محل إقامته المعتاد، بينما المتغيبون من الأسرة يعدون من أفرادها.

ومن مزايا التعداد النظري، أنه يعطي صورة حقيقية عن السكان الذين يعيشون في المنطقة. وعيبه أنه صعب التطبيق، لأنه من الصعب تحديد المقصود «بمحل الإقامة المعتاد» للشخص العادي. ويتسبب هذا في كثير من الأحيان في حدوث أخطاء. وبناء على هذا لا يفضل إجراء هذا النوع من التعداد إلا في البلاد التي تتمتع بمستوى جيد من الوعي الإحصائي.

التعداد الفعلي:

وفيه يجري حصر السكان حسب مكان وجودهم وقت التعداد بغض النظر عما إذا كانوا يسكنون هذا المكان بصفة دائمة أم أنهم جاءوا إليه مصادفة للزيارة أو السياحة.. الخ..

فمثلاً إذا قام شخص يسكن مدينة الرياض بزيارة مدينة جدة، وتصادف أن أجري التعداد أثناء تواجده في جدة، فإنه سيعد ضمن سكان جدة وليس الرياض. ومن الدول التي تتبع هذا النوع من التعداد المملكة المتحدة وجمهورية مصر العربية.

ويمتاز التعداد الفعلي بالسهولة في التطبيق. كما أنه لا مجال فيه للأخطاء التي قد تحدث في التعداد النظري حين تجري المحاولة لرد الأشخاص الذين لا ينتمون إلى المنطقة التي وجدوا فيها وقت التعداد إلى مكان إقامتهم الأصلية بالحذف أو الإضافة.

غير أن التعداد الفعلي يعاني من عيب رئيسي وهو أنه لا يعطي في كثير من الأحيان صورة حقيقية عن عدد السكان في المنطقة، لأنه لا يميز بين السكان الذين يسكنون المنطقة بصفة دائمة والسكان العابرين من سياح ومسافرين. ولهذا يفضل إجراء هذا النوع من التعداد في المواسم التي تتميز بالاستقرار ويقل فيها تنقل السكان. فلا ينبغي إجراء التعداد الفعلي في مواسم العطلات والسياحة مثلا.

أغراض التعداد :

يهدف التعداد إلى توفير بيانات عن أعداد السكان في الدولة وتوزيعهم على مناطقها المختلفة. كما أنه يعطي صورة دقيقة عن توزيع السكان من حيث العمر والمهنة والتعليم والصحة والصناعات وما إلى ذلك من الظواهر الاجتماعية والاقتصادية.

ولا شك أن مثل هذه البيانات تساعد على معرفة خصائص التركيب السكاني في البلاد، وهو الأساس الذي يجب أن يقوم عليه أي تخطيط علمي سليم.

وفيما يلي بعض الأمثلة التي توضح أهمية التعداد :

١ ـ معرفة عدد السكان تساعد على تقدير كثافتهم بالنسبة للموارد المتوفرة، مما يساعد على تقدير الخدمات الضرورية من صحة ومواصلات وإسكان... الخ. فمثلاً معرفة متوسط عدد الأشخاص بالحجرة الواحدة، يعطي فكرة عن درجة التزاحم السكني، ويساعد في معرفة عدد وحجم المساكن المطلوبة عند تخطيط مشروعات الاسكان.

٢ ــ إن توفر البيانات عن أعداد السكان في تعدادين متتاليين يساعد على معرفة معدل نمو السكان في الدولة، ويمكننا من تقدير عدد السكان في أي وقت، مما يجعل عمليات التخطيط مبنية على أساس علمي سليم.

٣ ــ إن توزيع السكان العمري يتيح لنا ـ مثلاً ـ معرفة عدد الأطفال الذين سيبلغون سن الدراسة في الأعوام التالية. فنستطيع تحديد عدد المدارس التي ينبغي انشاؤها وعدد المقاعد فيها... الخ.

٤ ــ يساعد توزيع السكان بالنسبة للتعليم في إعطاء صورة تفصيلية عن الوضع التعليمي في البلاد مما يساهم في معرفة حجم الأمية وتقدير الاحتياجات من المدارس والمعاهد والجامعات، فيتسنى التخطيط في المجال التعليمي على ضوء هده المعرفة.

وبالإضافة إلى الأمثلة السابقة، فإن هناك فوائد أخرى كثيرة للتعدادات يضيق المجال عن ذكرها، ولكنها لا تقل أهمية عنها.

١٠ ـ ٣ إحصاءات المواليد

تستخدم احصاءات المواليد لمعرفة مدى تزايد السكان. ولهذا تهتم بها جميع الدول اهتماماً كبيراً، وتضع من التشريعات ما يجعل تسجيل المواليد في سجلات الحكومة خلال فترة محدودة من الولادة إجراء رسمياً. وتتولى وزارات الصحة في الدول عادة الإشراف على تسجيل المواليد وإعداد إحصاءات مفصلة عنهم توضح أعدادهم وتوزيعهم بالنسبة للمناطق، والموسم، والجنس، والجنسية، وما إلى ذلك.

والبيانات التي تسجل عن المولود بعد ولادته تختلف في تفاصيلها من دولة لأخرى. ولكنها غالباً تحتوي على البيانات الاتية:

١ ــ تاريخ الميلاد
٢ ــ اسم المولود
٣ ــ اسم الأب ومهنته
٤ ــ اسم الأم ومهنتها
٥ ــ النوع (ذكر أم انثى)
٦ ــ الديانة
٧ ــ الجنسية
٨ ــ محل الميلاد

وتستخدم إحصاءات المواليد في الحصول على عدد من المعدلات التي تؤخذ بدورها كمقاييس لبعض خصائص السكان. ونذكر فيما يلي ثلاثة من هذه المعدلات.

أ ـ معـدل المواليـد :

يعرّف معدل المواليد (أو معدل المواليد الخام كما يسمى أحياناً) لبلد ما في سنة ما كما يلي:

تعريف (١٠-١)

$$\text{معدل المواليد} = \frac{\text{عدد المواليد الذين ولدوا أحياء في البلد أثناء السنة}}{\text{عدد سكان البلد في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

مثال (١٠-١)

إذا كان عدد المواليد (الذين ولدوا أحياء) في سنة معينة في بلد ما ٤٥٦٠٠ وعدد السكان في منتصف نفس السنة ١٢٤٥٠٠٠. احسب معدل المواليـد.

الحـــل

$$\text{معدل المواليد} = \frac{٤٥٦٠٠}{١٢٤٥٠٠٠} \times ١٠٠٠$$

= ٣٦,٦٣ في الألف من السكان.

ويمكن استخدام معدل المواليد كمقياس تقريبي للمقدرة على التكاثر وللمقارنة بين البلاد المختلفة من حيث هذه القدرة إذا كانت هذه البلاد لا تختلف عن بعضها كثيراً من حيث نسب الإناث والذكور، أو من حيث التوزيع العمري.

ب ـ معدل الخصوبة :

لا يعتبر معدل المواليد مقياساً دقيقاً للخصوبة لأنه يقسم عدد المواليد أحياء على العدد

الكلي للسكان. وكما نعلم فليس كل السكان مخصبين. ولهذا ينبغي إذا أردنا مقياساً للخصوبة أن نأخذ في الاعتبار من هم في سن الاخصاب فقط. وقد جرت العادة على قسمة عدد المواليد أحياء على عدد الإناث اللاتي في سن الحمل فقط (وسن الحمل عادة بين ١٥ - ٤٩ سنة) وضرب الناتج في ١٠٠٠ ويسمى الرقم الناتج معدل الخصوبة:

تعريف (١٠-٢)

$$\text{معدل الخصوبة} = \frac{\text{عدد المواليد الذين ولدوا أحياء خلال السنة}}{\text{عدد الإناث اللاتي في سن الحمل}} \times ١٠٠٠$$

مثال (١٠-٢)

إذا كان عدد المواليد الذين ولدوا أحياء في بلد معين في سنة ما ٤٥٦٠٠، وعدد الإناث في سن الحمل ٦٢٣٠٠٠ احسب معدل الخصوبة.

الحــــل

$$\text{معدل الخصوبة} = \frac{٤٥٦٠٠}{٦٢٣٠٠٠} \times ١٠٠٠$$

= ٧٣,١٩ في الألف.

جـ ـ معدل التوالــد:

عند استخدام معدل الخصوبة للمقارنة بين البلاد التي تختلف من حيث نسبة الزواج، يفضل أن نعـدله بحيث نقسم عدد المواليد أحياء على عدد الإناث المتزوجات في سن الحمل ونضرب الناتج في١٠٠٠. ويسمى هذا الرقم معدل التوالــد.

تعريف (١٠-٣)

$$\text{معدل التوالد} = \frac{\text{عدد المواليد الذين ولدوا أحياء في البلد أثناء السنة}}{\text{عدد الإناث المتزوجات في سن الحمل}} \times ١٠٠٠$$

ولا شك أن معدل التوالد أكثر دقة من معدل المواليد ومعدل الخصوبة لأنه يضع في الاعتبار التفاوت في نسب الزواج بين البلاد المختلفة، كما يأخذ في الاعتبار التفاوت في نسب الإناث في سن الإخصاب.

١٠ ـ ٤ إحصــــاءات الوفيـات

بجانب اهتمامها بإحصاءات المواليد، تهتم الدول أيضاً بإحصاءات الوفيات. وتسن من القوانين ما يضمن تسجيل الوفيات في سجلات الدولة خلال فترة محدودة من وقت الوفاة. وتتولى الجهة المسئولة عن الإحصاءات في الدولة عادة مهمة إعداد الإحصاءات المتعلقة بالوفيات وتصنيفها. وترجع أهمية إحصاءات الوفيات لأسباب عدة من بينها قياس التغير في عدد السكان، ومعرفة معدلات الوفاة من الأمراض المختلفة.

وتؤخذ إحصاءات الوفيات من البيانات التي تسجل عند حدوث الوفاة. وتختلف هذه البيانات من بلد لآخر، ولكنها لا تخلو في العادة من الآتي:

١ ــ اسم المتوفى ولقبه
٢ ــ العمر
٣ ــ الجنس (ذكر أم أنثى)
٤ ــ محل الإقامة الدائم
٥ ــ الحالة الاجتماعية
٦ ــ المهنة
٧ ــ تاريخ الوفاة
٨ ــ مكان الوفاة
٩ ــ سبب الوفاة.

ومن هذه البيانات يتم حساب معدلات مختلفة تستخدم بدورها في إلقاء الضوء على خصائص السكان في الدولة وسنتناول فيما يلي اثنين من هذه المعدلات:

أ ـ معـدل الوفيـات:

ويسمى أحياناً معدل الوفيات الخام، وأهميته تنبع من أنه يعطي مقياساً تقريبياً للحالة الصحية في البلد. ويحسب بقسمة عدد الوفيات أثناء السنة على عدد السكان في منتصف السنة مع ضرب الناتج في١٠٠٠.

تعريف (١٠-٤)

$$\text{معدل الوفيات} = \frac{\text{عدد الوفيات في البلد أثناء السنة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

مثال (١٠-٣)

إذا كان عدد الوفيات في بلد ما في سنة ما هو ٥٠٠ وعدد السكان في منتصف نفس السنة ٦٠٠٠٠ فاحسب معدل الوفيات.

الحل

$$\text{معدل الوفيات} = \frac{٥٠٠}{٦٠٠٠٠} \times ١٠٠٠$$

= ٨,٣٣ في الألف

غير أن معدل الوفيات لا يمكن استخدامه للمقارنة بين معدلات الوفيات في بلدين مختلفين من حيث توزيع أعمار السكان فيهما. فإذا تساوت معدلات الوفيات بين البلدين أ، ب فإننا قد نستنتج - مثلاً - أن الحالة الصحية في البلدين متساوية، حتى ولو كان معظم سكان البلد (أ) من الشيوخ والأطفال ومعظم سكان البلد (ب) من الشباب الذين هم أقل عرضة للوفاة. وواضح في هذه الحالة أن استنتاجنا ليس سليمًا، لأن الحالة الصحية في (أ) تبدو أفضل منها في (ب)، وذلك لأن معظم سكان البلد (أ) من الشيوخ والأطفال الذين هم عادة أكثر عرضة للوفاة.

ب - المعدل النوعي للوفيات :

ويمثل هذا المعدل محاولة لتفادي عيب معدل الوفيات الذي ذكرناه.

وهنا نحسب معدل الوفيات الذكور في كل فئة من فئات العمر على حدة. ونحسب

معدل الوفيات للإناث أيضاً في كل فئة من فئات العمر على حدة. ويسمى معدل الوفيات للذكور أو الإناث في فئة عمر معينة بالمعدل النوعي للوفيات. وفيما يلي نقدم تعريفاً لمثالين للمعدلات النوعية للوفيـات.

تعريف (١٠-٥)

المعدل النوعي للوفيات الذكور في بلد ما في فئة العمر (١٠ ـ ١٥)

$$= \frac{\text{عدد الوفيات من الذكور في البلد خلال السنة في فئة العمر (١٠ ـ ١٥)}}{\text{عدد السكان الذكور في البلد في منتصف السنة في فئة العمر (١٠ ـ ١٥)}} \times ١٠٠٠$$

تعريف (١٠-٦)

المعدل النوعي للوفيات الإناث في فئة العمر (٤٥ ـ ٥٠)

$$= \frac{\text{عدد الوفيات من الإناث في البلد خلال السنة في فئة العمر (٤٥ ـ ٥٠)}}{\text{عدد السكان الإناث في البلد في منتصف السنة في فئة العمر (٤٥ ـ ٥٠)}} \times ١٠٠٠$$

مثال (١٠-٤)

إذا كان عدد الأشخاص الذكور الذين تقع أعمارهم بين ٢٠ ـ ٣٠ سنة في مدينة ما ٥٠,٠٠٠ في منتصف سنة معينة. وقد توفي منهم خلال تلك السنة ١٠٠ شخص. احسب المعدل النوعي للوفيات الذكور في تلك المدينة في فئة العمر ٢٠ ـ ٣٠.

الحـــل

المعدل النوعي للوفيات الذكور في فئة العمر (٢٠ ـ ٣٠)

$$= \frac{١٠٠}{٥٠٠٠٠} \times ١٠٠٠$$

=٢ في الألف.

وبحساب المعدل النوعي للوفيات نستطيع أن نجري مقارنات بين البلاد التي تختلف من حيث التركيب العمري، كما نستطيع أن نتبين أي الفئات العمرية تتعرض للوفاة أكثر من غيرها.

ومن الواضح أن هـذه ليست سوى أمثلة للمعـدلات التي يمكن أن نحسبها من احصاءات الوفيات. فهناك معدلات أخرى يمكن حسابها لتلقي الضوء على جوانب أخرى من خصائص السكان. فمثلاً لمعرفة معدل الوفاة من مرض ما يمكن حساب ما يسمى بمعدل الفنائية، وهو عبارة عن قسمة عدد الوفيات من بين المصابين بهذا المرض على جملة المصابين به وضرب الناتج في ١٠٠٠.

كذلك هناك معدل وفيات الأطفال الرضع، والذي يحسب بقسمة عدد وفيات الأطفال الرضع على عدد المواليد أحياء وضرب الناتج في ١٠٠٠، وما إلى ذلك من المعدلات.

١٠ ـ ٥ تقديـر أعـداد السكـان

أهمية تقدير السكان :

تهتم كثير من الدول بالحصول على تقديرات لأعداد سكانها في عدد من السنوات القادمة. ومما لا شك فيه أن مثل هذه التقديرات، خاصة إذا كانت مصنفة حسب السن والمهنة والحالة الاجتماعية، تساعد الدولة على وضع الخطط التي تفي بتطلعاتها نحو الرخاء والتقدم، وتستغل مواردها المتاحة أمثل استغلال.

فتقدير أعداد السكان الذين سيكونون في سن العمل في المستقبل يتيح للدولة معرفة الحجم المتوقع للقوة العاملة مما يساعدها على تخطيط مشروعاتها الصناعية والزراعية بشكل يضمن الاستفادة القصوى من طاقتها البشرية.

كما أن معرفة أعداد السكان المتوقعة تساعد الدولة على توفير الخدمات التي يحتاجونها في المستقبل سواء كانت خدمات صحية أو اجتماعية أو ترفيهية.

كذلك ، تقدير أعداد الأطفال الذين سيكونون في سن التعليم في المستقبل يساعد الدولة في إعداد المدارس الكافية في وقت مبكر.

طرق تقـديـر أعداد السكان :

لتقدير أعداد السكان في أي سنة من السنوات ينبغي أولاً أن تتوفر لدينا بيانات تمثل أعداد السكان في تعدادين متتاليين. ويمكن تقدير أعداد السكان بعدة طرق من أهمها طريقة المقدار الثابت.

طريقة المقـــدار الـثابــت :

وتستخدم هذه الطريقة في الحالة التي يزيد فيها عدد السكان بمقدار ثابت من سنة لأخرى.

ولتوضيح هذه الطريقة نفرض أن عدد السكان في سنة التعداد يساوي س. وأن الزيادة السنوية في السكان ثابتة وتساوي ق.

من ذلك يتضح أن :

عدد السكان بعد سنة من سنة التعداد = س. + ق

عدد السكان بعد سنتين من التعـداد = س. + ٢ق

وبصفة عامـــة :

عدد السكان بعد ن من السنين من التعداد = س. + ن ق

وعليه، فإننا إذا عرفنا قيمة س.، ق نستطيع تقدير عدد السكان بعد عدد ن من السنوات باستخدام القانون:

$$س_{ن} = س_{.} + ن\, ق$$

تعريف (١٠-٧)

إذا كان عدد السكان في التعداد $س_٠$ ومقدار الزيادة السنوية في السكان ق فإن عدد السكان بعد ن من السنوات هو $س_ن$ حيث:

$$س_ن = س_٠ + ن\,ق$$

وإذا توفرت لدينا بيانات من تعدادين متتاليين فيمكننا تقدير الزيادة السنوية ق باستخدام الصيغة التالية:

$$ق = \frac{\text{عدد السكان في التعداد الثاني} - \text{عدد السكان في التعداد الأول}}{\text{عدد السنوات بين التعدادين}}$$

مثال (١٠-٥)

إذا كان عدد السكان في بلد ما في رجب ١٣٧٥ هـ يساوي ٢٠,٥ مليون نسمة. وفي رجب ١٣٩٠ هـ يساوي ٢٨ مليون نسمة. أوجد عدد السكان التقديري في رجب ١٤٠٠ هـ باستخدام طريقة المقدار الثابت.

الحــل

أولاً : نحسب مقدار الزيادة السنوية ق.

$$\because ق = \frac{\text{عدد السكان في التعداد الثاني} - \text{العدد في التعداد الأول}}{\text{عدد السنوات بين التعدادين}}$$

$$\therefore ق = \frac{٢٨ - ٢٠,٥}{١٣٩٠ - ١٣٧٥}$$

$$= \frac{٧,٥}{١٥}$$

= ٠.٥ مليون نسمة

أي أن الزيادة السنوية في السكان تساوي ٥٠٠ ألف نسمة.

ثانياً : نوجد قيمة ن من القانون:

ن = الفترة المراد تقدير السكان فيها - فترة التعداد الأول

= ١٤٠٠ - ١٣٧٥

= ٢٥ سنة.

فإذا وضعنا عدد السكان في التعداد الأول = س. = ٢٠,٥

فإن :

العدد التقديري للسكان في رجب ١٤٠٠ هـ = س. + ن ق

= ٢٠,٥ + ٢٥ × ٠,٥

= ٢٠,٥ + ١٢,٥

= ٣٣ مليون نسمة.

الخلاصة

١ ـ الإحصاءات الحيوية هي مجموعة البيانات المتعلقة بالأفراد منذ ولادتهم وحتى وفاتهم.

٢ ـ تعداد السكان يقوم على أحد أساسين:

أ) الأساس النظري : وفيه يجري حصر السكان حسب مكان إقامتهم العادية.

ب) الأساس الفعلي: وفيه يجري حصر السكان حسب مكان وجودهم وقت التعداد.

٣ ـ إحصاءات المواليد:

من أهم المعدلات التي تحسب من إحصاءات المواليد:

$$\text{معدل المواليد} = \frac{\text{عدد المواليد الذين ولدوا أحياء في البلد أثناء السنة}}{\text{عدد السكان في البلد في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

$$\text{معدل الخصوبة} = \frac{\text{عدد المواليد الذين ولدوا أحياء خلال السنة}}{\text{عدد الإناث اللاتي في سن الحمل}} \times ١٠٠٠$$

$$\text{معدل التوالد} = \frac{\text{عدد المواليد الذين ولدوا أحياء في البلد خلال السنة}}{\text{عدد الإناث المتزوجات في سن الحمل}} \times ١٠٠٠$$

٤ ـ إحصاءات الوفيات :

من أهم المعدلات التي تحسب من إحصاءات الوفيات:

$$\text{معدل الوفيات} = \frac{\text{عدد الوفيات أثناء السنة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

المعدل النوعي للوفيات من جنس معين في فئة عمرية معينة في سنة ما هو

$$= \frac{\text{عدد الوفيات من ذلك الجنس في تلك الفئة من العمر}}{\text{عدد السكان من ذلك الجنس وفي تلك الفئة من العمر في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

٥ ـ تقدير أعداد السكان:

من أهم طرق تقدير أعداد السكان طريقة المقدار الثابت ونستخدم فيها القانون:

$$س_{ن} = س_{.} + ن\ ق$$

حيث ق مقدار الزيادة السنوية في السكان، $س_{.}$ عدد السكان في التعداد الأول، $س_{ن}$ عدد السكان بعد ن من السنوات.

تماريـن

[١] عرّف الإحصاءات الحيوية.

[٢] ما هي في رأيك أهمية الإحصاءات الآتية:

ـ إحصاءات الهجرة

ـ إحصاءات البطالة

ـ إحصاءات الزواج والطلاق.

[٣] وضح الفـرق بيـن التعداد النظري والتعداد الفعلـي وبيـن محاسن وعيـوب كـل مـن النوعيـن.

[٤] لماذا تشتمل البيانات التي تسجل عن المتوفى على سبب الوفاة؟

[٥] توفرت البيانات التالية عن سكان إحدى الدول في سنة ١٣٨٣ هـ:

عدد المواليد الذين ولدوا أحياء (بالألف)	عدد النساء في سن الحمل (بالألف)	عدد النساء المتزوجات في سن الحمل (بالألف)	عدد السكان في منتصف السنة (بالألف)
١٠٠٢	٦٢٠٤	٤٣١٢	٢٢١٧٦

أ ـ معدل المواليد

ب ـ معدل الخصوبة

جـ ـ معدل التوالد.

[٦] معدل المواليد في القطر « أ » يساوي ٧٠ في الألف. ومعدل المواليد في القطر « ب » يساوي ٧٠ في الألف أيضاً. فإذا كان عدد الإناث المتزوجات في سن الحمل في « أ » أكثر منه في « ب ». ففي أي القطرين يوجد معدل خصوبة أعلى؟؟

[٧] في إحدى الدول كان عدد المواليد في سنة ما يساوي ٣٠٥٠٠ من بينهم ١٠٠٠ ولدوا أمواتاً. فإذا كان عدد الإناث في سن الحمل ٥٦٢٤٠٠ من بينهن ١١٢٣٠٠ غير متزوجات، أحسب معدل التوالد.

[٨] معدل الخصوبة في قطر ما في سنة معينة ٨٠ في الألف. فإذا علمت أن عدد الإناث اللائي في سن الحمل في تلك السنة ٧٠٢٠٠٠ فكم عدد المواليد الذين ولدوا أحياء ؟

[٩] معدلا الوفيات في قطرين « أ »، « ب » متساويان. فإذا كان معظم سكان القطر « أ » من الشيوخ والأطفال، بينما معظم سكان القطر « ب » من الشباب. هل الحالة الصحية للسكان أفضل في القطر « أ » أو في القطر « ب »؟ لماذا ؟

[١٠] البيانات التالية لسكان قطر معين في سنة معينة:

عدد الوفيات	عدد الوفيات من الذكور خلال السنة في فئة العمر ٢٠ فما فوق	عدد الذكور في منتصف السنة لفئة العمر ٢٠ فما فوق	عدد الوفيات من الذكور خلال السنة	عدد الذكور في منتصف السنة	عدد السكان في منتصف السنة
٢٠٨٠٠	٦١١٢	٣٠٢٠٠	١٠٢٠٠	١٠٢٠٠	٨٠٤٠٠٠

احسب معدل الوفيات.

[١١] من البيانات الموجودة في التمرين رقم (١٠) احسب المعدل النوعي للوفيات للذكور في فئة العمر ٢٠ سنة فما فوق.

[١٢] من بيانات التمرين رقم (١٠) احسب المعدل النوعي للوفيات للذكور الذين تقل أعمارهم عن ٢٠ سنة.

[١٣] في قطر معين أصيب ٤٠٠٠٠ شخص بمرض معين في سنة ما، ومات منهم٢٠٠٠. احسب معدل الفنائية لذلك المرض في ذلك القطر.

[١٤] اذكر أهمية تقديرات أعداد السكان في تخطيط سياسة الدولة.

[١٥] عدد السكان في قطر معين في صفر ١٣٨٠ هـ يساوي ٤٠ مليون نسمة، وفي صفر ١٣٨٥ هـ أصبح ٥٠ مليون نسمة. احسب مقدار الزيادة السنوية في السكان.

[١٦] مستخدماً بيانات التمرين رقم (١٥) احسب العدد التقديري للسكان في صفر ١٤٠٠ هـ مستخدماً طريقة المقدار الثابت.

[١٧] كان عدد السكان في قطر ما في محرم ١٣٧٥ هـ يساوي ٣٠ مليون نسمة. وفي محرم ١٣٨٢ هـ يساوي ٤٢ مليون نسمة. أوجد تقديراً لعدد السكان في محرم ١٣٩٥ هـ مستخدماً طريقة المقدار الثابت.

شركة المطابع الأهلية للأوفست المحدودة
National Offset Printing Press Ltd. Co.
الرياض - المملكة العربية السعودية