المملكة العربية السعودية
وزارة التربية والتعليم
التطوير التربوي

وزارة التربية والتعليم
MINISTRY OF EDUCATION

- قرّرت وزارة التربية والتعليم تدريس
- هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الرِّياضيَّات

للصف الثالث الثانوي

الفصل الدِّراسيُّ الثاني

قسم العُلوم الإداريّة والاجتماعية

(بنين)

تأليف
مجموعة من الخبراء

طبعة ١٤٢٨هـ - ١٤٢٩هـ
٢٠٠٧م - ٢٠٠٨م

ح وزارة التربية والتعليم، ١٤١٩هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
السعودية، وزارة التربية والتعليم
الرياضيات: للصف الثالث الثانوي: قسم العلوم الإدارية والاجتماعية - الفصل الدراسي الثاني- ط٥ - الرياض.
١٤٤ ص؛ ٢١ × ٢٣ سم
ردمك: ٣ ـ ٢٢٥ ـ ١٩ ـ ٩٩٦٠ (مجموعة)
× - ٢٢٧ - ١٩-٩٩٦٠ (ج٢)
١- الرياضيات - كتب دراسية ٢- التعليم الثانوي - السعودية - كتب دراسية.
أ- العنوان
ديوي ٥١٠،٧١٢ ٢١٨٥ / ١٩

رقم الإيداع: ٢١٨٥ / ١٩
ردمك: ٣ ـ ٢٢٥ ـ ١٩ ـ ٩٩٦٠ (مجموعة)
× - ٢٢٧ - ١٩-٩٩٦٠ (ج٢)

لهذا الكتاب قيمة مهمة وفائدة كبيرة فحافظ عليه واجعل نظافته تشهد على حسن سلوكك معه.....

إذا لم تحتفظ بهذا الكتاب في مكتبتك الخاصة في آخر العام للاستفادة فجعل مكتبة مدرستك تحتفظ به....

موقع الوزارة
www.moe.gov.sa
موقع الإدارة العامة للمناهج
www.moe.gov.sa/curriculum/index.htm
البريد الإلكتروني للإدارة العامة للمناهج
curriculum@moe.gov.sa

بسم الله الرحمن الرحيم

الفهـــــرس

رقم الصفحة

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة:

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد وآله وصحبه.

أما بعد، فهذا هو الجزء الثاني من كتاب الرياضيات للصف الثالث الثانوي تمَّ تأليفه لقسم العلوم الإدارية والاجتماعية.

يتألف الكتاب من أربعة أبواب:

الباب الرابع ويشمل: دراسة تغير الدوال.

الباب الخامس ويشمل: حساب التكامل.

الباب السادس ويشمل: مبادئ الاحتمالات.

الباب السابع ويشمل: التوزيعات الاحتمالية.

راعينا في تأليف هذا المقرر طبيعة القسم الذي أعد من أجله، وأملنا أن يكون هذا الكتاب عوناً للطالب على تفهم المادة، وللمدرس على أداء واجبه التربوي والتعليمي، سائلين المولى عز وجل أن يوفق الجميع إلى ما يحب ويرضى.

وآخر دعوانا أن الحمد للّه رب العالمين.

المؤلفون

الباب الرابع

دراسة تغير الدوال

تمهيد:

إن كثيراً من المسائل التطبيقية يتطلب تحليلاً واضحاً للدالة ومنحنيها وحساب التفاضل يعتبر وسيلة جيدة للحصول على معلومات هامة عن سلوك الدالة في مجال تعريفها. فالمشتقة تستطيع أن تحدد لنا فترات تزايد الدالة وفترات تناقصها. كذلك فإننا نستطيع عن طريق الاشتقاق إيجاد إحداثيات القيم العظمى والقيم الصغرى للدالة. وهذه أمور ذات أهمية بالغة في المسائل التطبيقية فمدير المصنع والتاجر والمزارع يسعون جميعاً لزيادة الربح وتقليل التكلفة، وسنرى في هذا الباب كيف يمكن للمشتقة أن تساعد في حل مثل هذه المسائل الهامة.

٤-١ الدالة التزايدية والدالة التناقصية:

تعريف (٤-١)

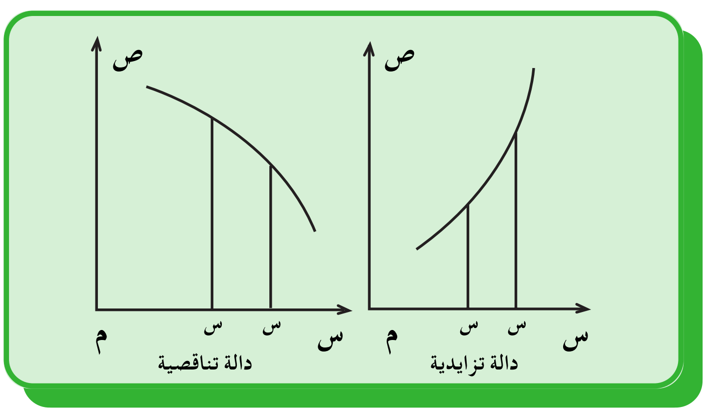
يقال إن الدالة د تزايدية في الفترة]أ، ب[إذا كان:

د(س$_{٢}$) > د(س$_{١}$) عندما يكون س$_{٢}$ > س$_{١}$ وذلك مهما كان س$_{١}$ ، س$_{٢}$ من]أ، ب[.

ويقال إن الدالة د تناقصية في الفترة]أ، ب[إذا كان:

د(س$_{٢}$) < د(س$_{١}$) عندما يكون س$_{٢}$ > س$_{١}$ وذلك مهما كان: س$_{١}$ و س$_{٢}$ من]أ، ب[.

انظر الشكل (٤-١)

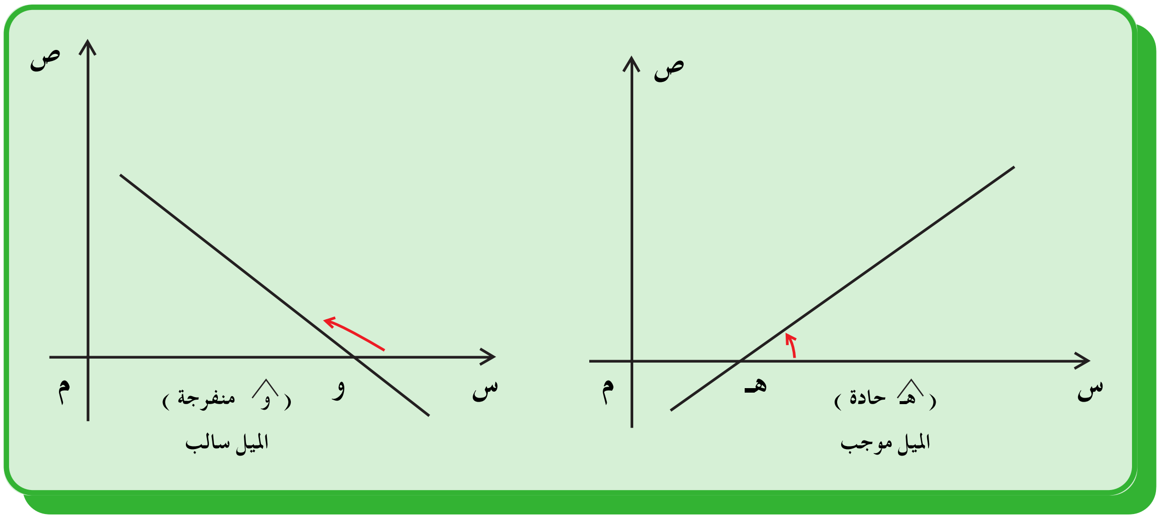


شكل (٤-١)

إن التعريف السابق يعني أن قيم الدالة التزايدية تكبر كلما كبرت قيم المتغير س وأن قيم الدالة التناقصية تصغر كلما كبرت قيم المتغير س.

كيف يمكننا تحديد فترات تزايد الدالة د وفترات تناقصها؟

يتضح من الشكل (٤-٢) أن دالة المستقيم تزايدية عندما يكون ميل المستقيم موجباً وأنها تناقصية عندما يكون ميله سالباً، لهذا السبب تكون دالة المستقيم تزايدية عندما تكون مشتقتها موجبة وتكون تناقصية عندما تكون مشتقتها سالبة. ومن المتوقع أن شيئاً مماثلاً يصبح بالنسبة للدوال القابلة للاشتقاق، وهذا ما تؤكده النظرية التالية:



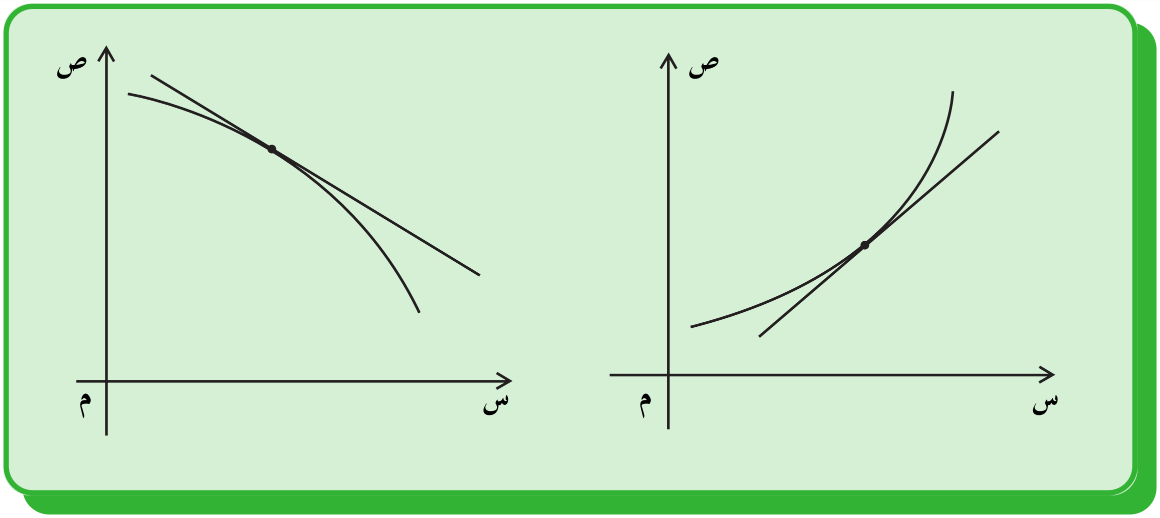
شكل (٤-٢)

نظرية (٤-١)

لتكن الدالة د قابلة للاشتقاق في الفترة]أ ، ب[

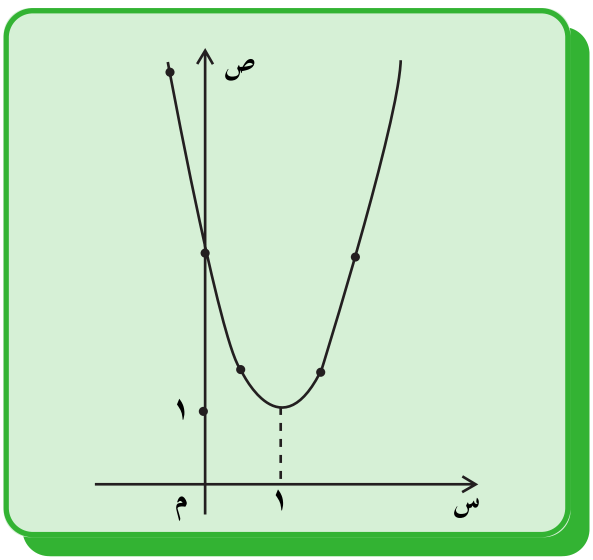
(١) إذا كان دَ (س) > ٠ في الفترة]أ ، ب[فإن الدالة د تكون تزايدية في تلك الفترة.

(٢) إذا كان دَ (س) < ٠ في الفترة]أ ، ب[فإن الدالة د تكون تناقصية في تلك الفترة.



شكل (٤-٣)

اشارة دَ	الدالة د
+	تزايدية
–	تناقصية



شكل (٤-٤)

مثال (٤-١):

لتكن الدالة د (س) = ٢ س^{٢} – ٤ س+٣

أوجد فترات تزايد وتناقص هذه الدالة .

الحـــل :

دَ (س) = ٤ س – ٤ = ٤ (س–١)

دَ (س) > ٠ إذا كان س > ١

دَ (س) < ٠ إذا كان س < ١

إذن الدالة د تزايدية في الفترة] ١ ، ∞ [وتناقصية في الفترة] – ∞ ، ١[

انظر الشكل (٤ – ٤)

مثال (٤-٢):

لتكن الدالة د (س) = س^{٣} –٣ س+٤

أوجد فترات تزايد وتناقص هذه الدالة

الحل:

$دَ(س) = ٣س^{٢} - ٣ = ٣(س^{٢}-١) = ٣(س+١)(س-١)$

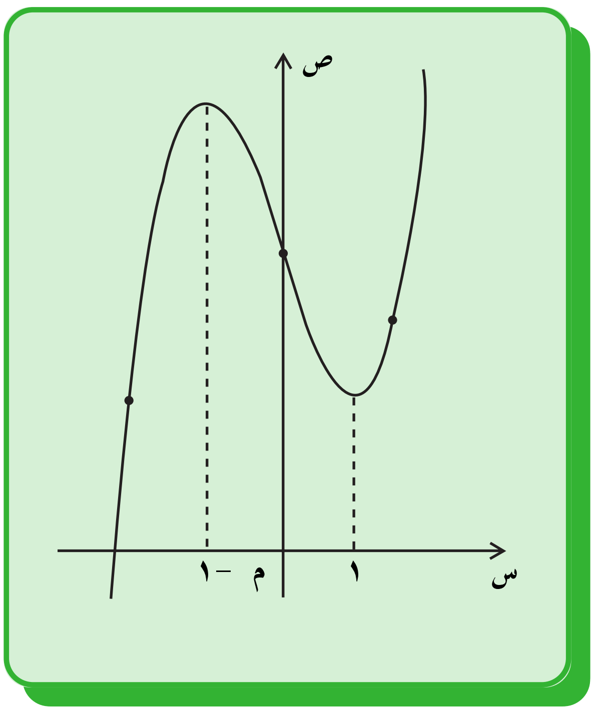
س	$+\infty$	١		١-	$-\infty$
س + ١	+		+	٠	−
س − ١	+	٠	−		−
اشارة دَ	+	٠	−	٠	+

إذن تكون الدالة د تزايدية في الفترة:

$]-\infty ، -١[\cup]١ ، \infty[$

وتكون تناقصية في الفترة:

$]-١ ، ١[$. انظر الشكل (٤ − ٥).



شكل (٤-٥)

مثال (٤-٣):

وجد مدير أحد المصانع أن التكلفة ت لصنع س قطعة تتم وفقاً للصيغة:

$ت(س) = ٥٠ + ٥٠ س$

وأن العائد ع يعطى وفقاً للصيغة:

$ع(س) = ١١٠ س - س^٢$

أوجد مستوى الإنتاج الذي يجعل دالة الربح تزايدية وحدّد المستوى الذي يجعل الربح تناقصياً.

الحـــــل:

دالة الربح $ر(س) = ع(س) - ت(س)$

$= ٦٠ س - س^٢ - ٥٠$

إذن $رَ(س) = ٦٠ - ٢س = ٢(٣٠ - س)$

$رَ(س) > ٠$ إذا كان $٣٠ > س$.

$رَ(س) < ٠$ إذا كان $س > ٣٠$.

أي أن دالة الربح تتزايد إلى أن يصل الإنتاج إلى ٣٠ قطعة ويتناقص الربح إذا زادت كمية الإنتاج عن ذلك.

تمـــــارين (٤-١)

في التمارين (١-١٢) حدد فترات تزايد وفترات تناقص كل من الدوال المذكورة:

١- $ص = \frac{١}{س}$ $\quad$ $س \neq ٠$

٢- $ص = \frac{١}{س^٢}$ $\quad$ $س \neq ٠$

٣- $ص = س^٣ - ٣ س + ٢$

٤- $ص = س^٣ - ٣ س^٢ + ٦$

٥- $ص = س + \frac{١}{س}$ $\quad$ $س \neq ٠$

٦- $ص = س (س + ١) (س + ٢)$

٧- $ص = |س - ٥|$

٨- $ص = \frac{١}{|س - ٢|}$ ، $س \neq ٢$

٩- $ص = \frac{س - ١}{س + ١}$ ، $س \neq -١$

١٠- $ص = \frac{س^٢ + ١}{س^٢ - ١}$ ، $س \not\ni \{-١ ، ١\}$

١١ - $ص = س^٢ - ٦س + ٥$

١٢ - $ص = - س^٢ + س + ٦$

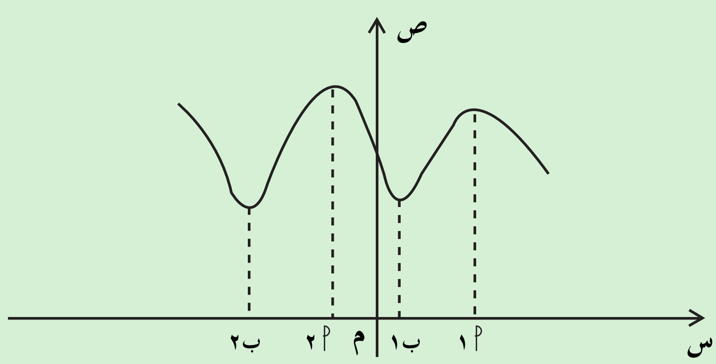
٤-٢ القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية:

تعريف (٤ - ٢)

يقال إن للدالة د قيمة عظمى محلية عند س= أ ، إذا وجدت فترة مفتوحة تحتوي أ بحيث أن د (أ) $\geqslant$ د (س) لكل س من هذه الفترة.

ويقال إن الدالة د قيمة صغرى محلية عند س = ب ، إذا وجدت فترة مفتوحة تحتوي ب بحيث أن د (ب) $\leqslant$ د (س) لكل س من هذه الفترة.

في الشكل (٤-٦) يوجد للدالة د قيمة عظمى محلية عند كلٍ من أ١ ، و أ٢ ويوجد لها قيمة صغرى محلية عند كل من ب١ ، وب٢ .



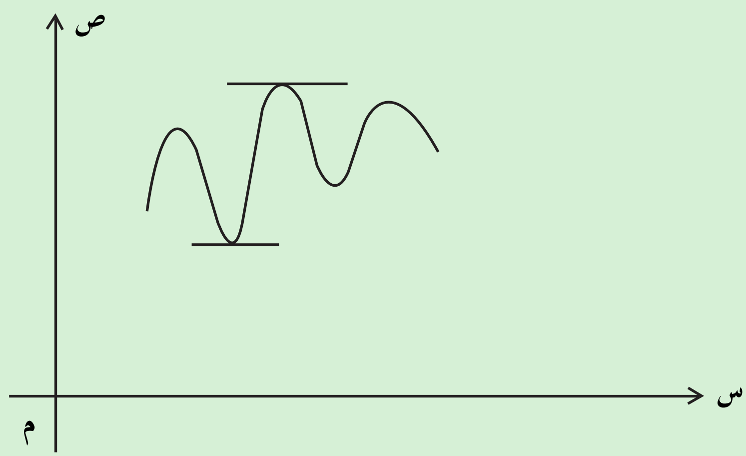
شكل (٤-٦)

تعريف (٤ - ٣)

القيم القصوى المحلية لدالة د هي القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية لتلك الدالة.

كيف يمكننا تحديد النقاط التي تكون للدالة د عندها قيم قصوى محلية:

إن الشكل (٤-٧) يبين أنه إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق فإن مماس منحني هذه الدالة، عند القيم القصوى المحلية يكون موازياً لمحور السينات مما يعني أن ميل المماس (وبالتالي مشتقة الدالة) عند هذه النقاط يساوي الصفر، وهذا ما تعبر عنه النظرية التالية.



شكل (٤-٧)

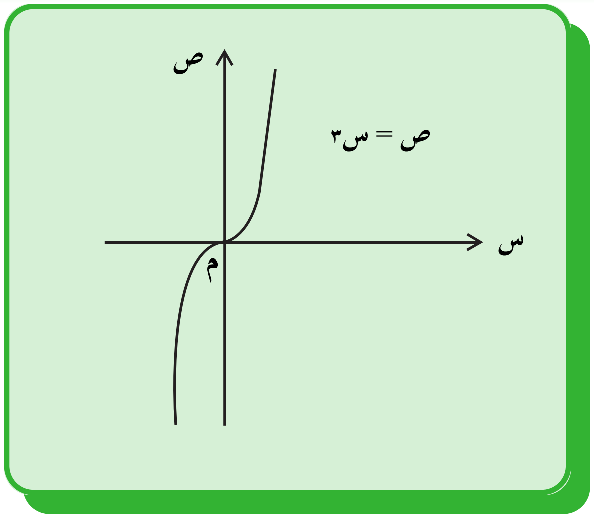
نظرية (٤-٢):

إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = حـ وكانت للدالة قيمة قصوى محلية عند س = حـ عندئذٍ يكون: دَ (حـ) = ٠

ملاحظة (٤-١)

إن عكس هذه النظرية ليس صحيحاً بالضرورة: (١) فقد تكون المشتقة مساوية للصفر عند نقطة من النقاط وبالرغم من ذلك فليس للدالة قيمة قصوى محلية عند هذه النقطة. فالدالة د(س) = س٣، على سبيل المثال، ليس لها قيمة قصوى محلية عند س=٠

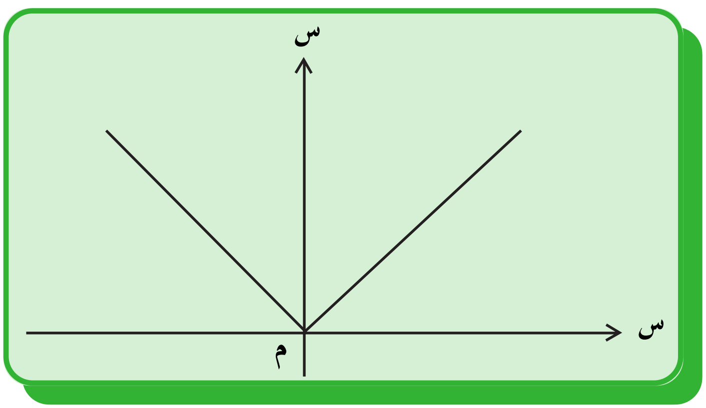
رغم أن دَ (٠) = ٠ انظر الشكل (٤-٨).



شكل (٤-٨)

(٢) ومن جهة أخرى قد تكون المشتقة دَ غير موجودة عند نقطة س = حـ ومع ذلك يمكن أن تكون للدالة د قيمة قصوى محلية عند تلك النقطة.

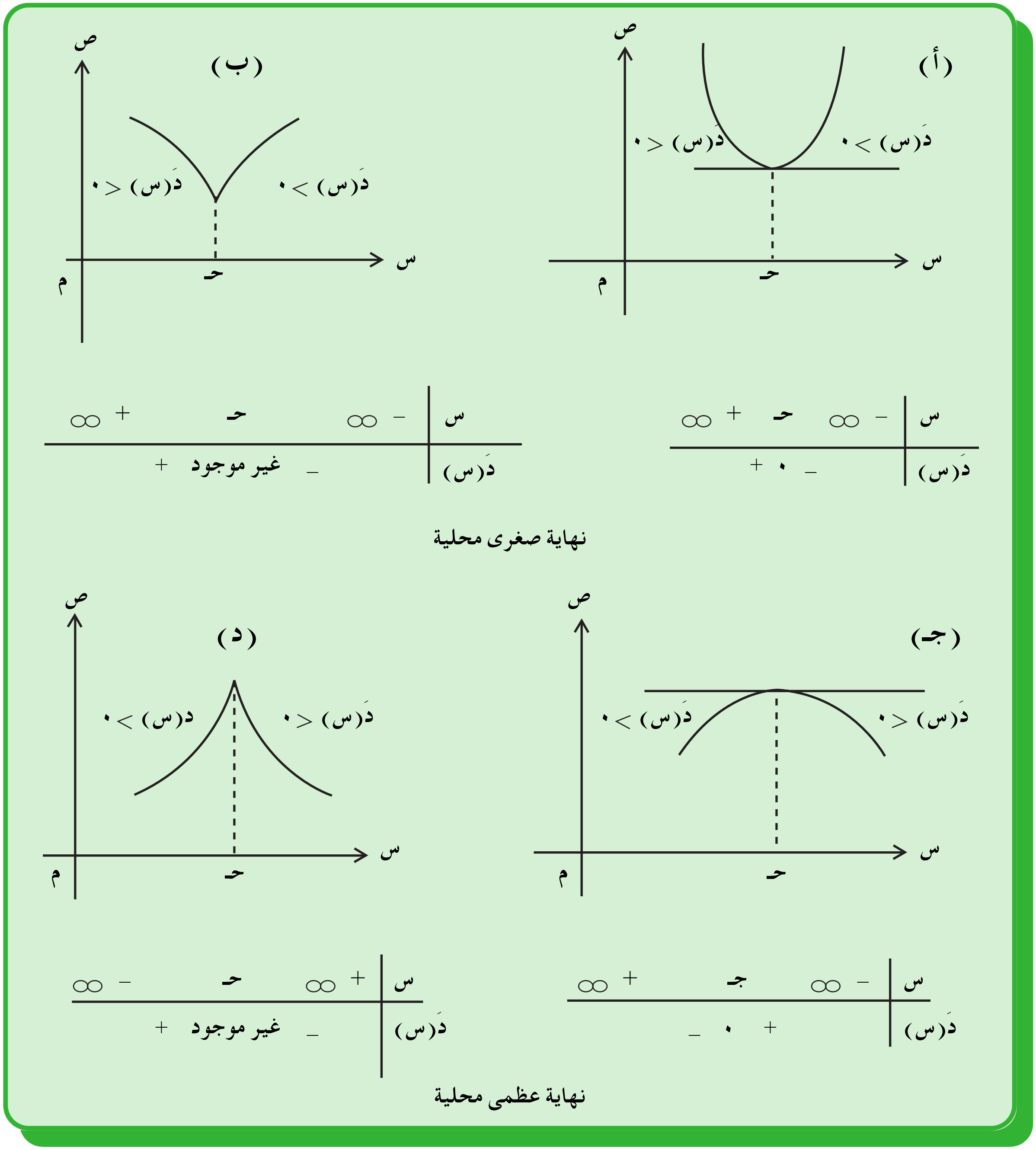
فللدالة د (س) = |س| قيمة صغرى محلية عند نقطة الأصل، بالرغم من أن مشتقتها غير موجودة عند تلك النقطة. انظر الشكل (٤-٩).



شكل (٤-٩)

٤-٣ اختبار المشتقة الأولى:

إن طريقة تعيين القيم الصغرى والعظمى يوضحها الشكل (٤-١٠).


(أ)
(ب)
(جـ)
(د)
ص
س
م
حـ
دَ(س) < ٠
دَ(س) > ٠
غير موجود
نهاية صغرى محلية
نهاية عظمى محلية

شكل (٤-١٠)

تعبر عما تضمنته الأشكال السابقة بالنظريتين التاليتين:

نظرية (٤-٣)
تبلغ الدالة د(س) القابلة للإشتقاق على الفترة]أ، ب[نهاية صغرى محلية عند س = حـ ∌]أ، ب[إذا وإذا فقط، كانت إشارة دَ (س) سالبة عن يسار حـ وموجبة عن يمينها.

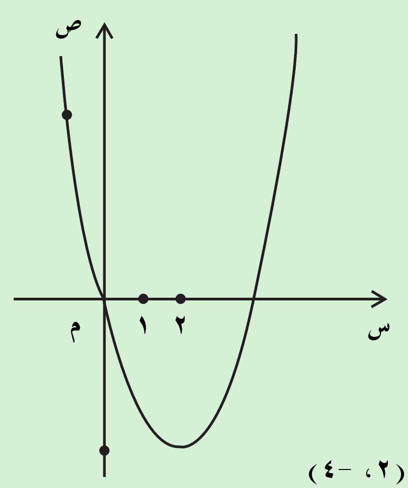
انظر الوضعين (أ) و (ب) من الشكل (٤-١٠)

نظرية (٤-٤)
تبلغ الدالة د(س) القابلة للإشتقاق على الفترة]أ، ب[نهاية عظمى محلية عند س = حـ ∋]أ، ب[إذا وإذا فقط، كانت إشارة دَ (س) موجبة عن يسار حـ وسالبة عن يمينها.

انظر الوضعين (حـ) و (ء) من الشكل (٤-١٠)

مثال (٤-٤):
أوجد القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية للدالة.
ص = س٢ - ٤ س

الحل:
إن صَ = ٢ س - ٤
صَ = ٠ ⟸ ٢س - ٤ = ٠ ⟸ س = ٢
إذا كانت س < ٢ فإن صَ < ٠
وإذا كانت س > ٢ فإن صَ > ٠
إذن توجد للدالة ص قيمة صغرى محلية عند س = ٢ حسب اختبار المشتقة الأولى.
انظر الشكل (٤-١١)



شكل (٤-١١)

مثال (٤-٥):

أوجد القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية للدالة.

ص = س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٩ س + ٢

الحـــــل:

إن صَ = ٣س^{٢} − ١٢ س + ٩ = ٣(س^{٢} −٤س + ٣)

صَ = ٠ ⟸ ٣(س^{٢}−٤س + ٣) = ٠

⟸ ٣(س−٣) (س−١) = ٠

⟸ س= ٣ أو س = ١

الجدول الآتي يبين اشارة صَ على جانبي كلٍ من هاتين النقطتين:

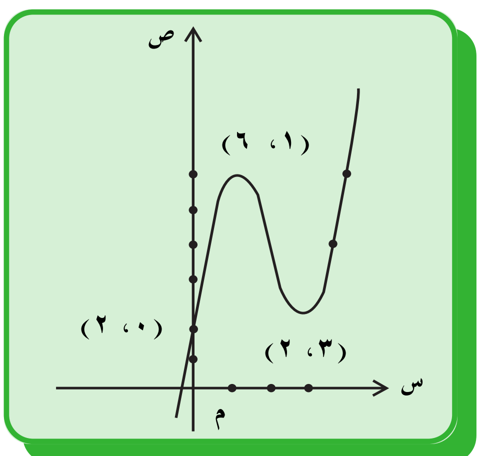
س	+ ∞	٣		١	− ∞
اشارة (س−٣)	+	٠	−		−
اشارة (س−١)	+		+	٠	−
اشارة صَ	+	٠	−	٠	+

نلاحظ أن إشارة صَ تتغير عند س=١ من موجب إلى سالب لذا توجد للدالة ص قيمة عظمى محلية عند س =١ قيمتها د (١) = ٦.

وأن إشارة صَ تتغير عند س = ٣ من سالب إلى موجب لذا توجد للدالة ص قيمة صغرى محلية عند س = ٣ قيمتها د (٣) =٢.

انظر الشكل (٤ − ١٢)

(كان بإمكاننا استنتاج إشارة ص بالاعتماد على النظرية (١−١) من الجزء الأول باعتبار صَ مقدار ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية).



شكل (٤−١٢)

٤-٤ القيم العظمى والقيم الصغرى:

هناك العديد من المسائل التطبيقية يكون الاهتمام فيها منصباً على أعظم قيمة للدالة د في الفترة المغلقة [٢ ، ب] وهي ما ندعوها القيمة العظمى للدالة د في تلك الفترة. بشكلٍ مشابه ندعو أصغر قيمة للدالة د في الفترة المغلقة [٢ ، ب] بالقيمة الصغرى.

تعريف (٤-٥) :

ندعو القيم العظمى والقيم الصغرى اختصاراً بالقيم القصوى.

من الواضح أنه:

إذا كانت الدالة د معرفة على [٢ ، ب] ومتصلة وقابلة للاشتقاق في الفترة [٢ ، ب] فإن القيمة القصوى للدالة د إما أن:

(١) تكون عند أحد طرفي الفترة [٢ ، ب]

أو:

(٢) تكون قيمة قصوى محلية.

مثال (٤-٦) :

أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة د (س) = س^{٣}-٣س^{٢} - ٢٤ س + ٢ في الفترة [-٦ ، ٥].

الحـــل :

دَ (س) = ٣ س^{٢} - ٦س - ٢٤ نبحث أولاً عن القيم التي تجعل دَ (س) = ٠

دَ (س) = ٣ (س^{٢} - ٢ س - ٨) = ٠

= ٣ س (س-٤) (س+٢) = ٠

⟸ س= ٤ أو س = -٢

لإيجاد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة د (س) في الفترة [-٦ ، ٥] لابد من حساب قيم الدالة عند س = ٤ ، س = -٢ .

وعند طرفي الفترة والمقارنة بين هذه القيم.

د (٤) = −٧٨

د (−٢) = ٣٠

د (−٦) = − ١٧٨

د (٥) = −٦٨

وعلى هذا فإن القيمة العظمى للدالة د هي عند :

س = −٢ أما القيمة الصغرى للدالة فهي عند طرف الفترة س = −٦

مثال (٤−٧) :

وجد أحد تجار السيارات أنه إذا باع س سيارة في الأسبوع فإن ربحه ر يكون :

ر (س) = ١٠٠٠ س − ٢٥س٢

كم عدد السيارات التي ينبغي أن يبيعها في الأسبوع كي يكون ربحه أعظم ما يمكن، علماً أنه لن يتمكن من بيع أكثر من ٣٠ سيارة أسبوعياً.

الحـل :

أن حل هذه المسألة يتطلب إيجاد القيم العظمى لدالة الربح ر في الفترة [٠ ، ٣٠].

نجد أولاً جذور المعادلة رَ (س) = ٠

(لاحظ أن الدالة ر هي كثيرة حدود لذا فإن مشتقتها موجودة عند جميع النقط).

رَ (س) = ١٠٠٠ − ٥٠ س = ٠

⇐ س = ٢٠

لإيجاد القيمة العظمى للدالة ر في الفترة [٠ ، ٣٠] نحسب قيم الدالة عند س= ٢٠ وعند طرفي هذه الفترة [٠ ، ٣٠] والجدول الآتي يبين تحولات ر عندما تتغير س من ٠ إلى ٣٠

س	٠		٢٠		٣٠
رَ (س)		+	٠	−	
ر (س)	٠		١٠٠٠٠		٧٥٠٠

إذن نوجد القيمة العظمى للدالة ر عند س = ٢٠ . أي ينبغي للتاجر أن يبيع ٢٠ سيارة أسبوعياً كي يكون ربحه أعظم ما يمكن.

تمارين (٢-٤)

في التمارين (١-١٠) عيِّن القيم العظمى والصغرى المحلية لكل من الدوال المذكورة:

١- $ص = س^{٣} - ٣ س + ٢$

٢ - $ص = س + \frac{١}{س}$

٣ - $ص = س (س+١) (س+٢)$

٤ - $ص = \frac{س + ١}{س - ١}$

٥ - $ص = س^{٢} - س - ١٢$

٦ - $ص = - س^{٢} + ٣س + ٤$

٧ - $ص = (١-س) (١+ س)^{٣}$

٨ - $ص = - س^{٣} + ٣ س^{٢}$

٩ - $ص = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ١$

١٠ - $ص = \frac{١}{س + ١} - \frac{١}{س + ٢}$ $\qquad$ $س \not\in \{-١ ، -٢\}$

١١ - $ص = س^{٤}$

١٢ - $ص = س^{٤} + \frac{١}{٢} س^{٢}$

في التمارين (١٣ - ١٩) عيَّن القيم العظمى والصغرى لكلٍ من الدوال المذكورة:

١٣ - $ص = س^{٢} - ٤ س + ١$ $\qquad$ $س \in [٠ ، ٣]$

١٤ - $ص = (س - ١) (س - ٢)$ $\qquad$ $س \in [٠ ، ٢]$

١٥ - $ص = ٢ س^{٢} + ٥ س - ١$ $\qquad$ $س \in [-٢ ، ٠]$

١٦ - $ص = \frac{١}{٣} س^{٣} - س^{٢} + ١٠$ $\qquad$ $س \in [-١ ، ٣]$

١٧ - $ص = س^٢ + \frac{١}{س}$ $\qquad$ $س \in [\frac{١}{١٠} ، ٢]$

١٨ - $ص = ٢س - ٤\sqrt{س}$ $\qquad$ $س \in [٠ ، ٤]$

١٩ - $ص = س^٤ - ٢س^٢ + ٣$ $\qquad$ $س \in [-١ ، ٢]$

٢٠- تبيع إحدى الشركات س تلفزيوناً شهرياً. إذا علمت أن دالة التكلفة معطاة بالصيغة الآتية:

وإن دالة العائد من البيع هي:

$$\begin{cases} ت(س) = ٧٢٠ + ٦\,س \\ ع(س) = ٢٠٠\,س - \frac{س^٢}{٣} \end{cases} \qquad ٦٠٠ \geqslant س \geqslant ٠$$

فأوجد قيم س التي تؤدي إلى:

(١) أقل تكلفة (٢) أكبر عائد (٣) أكبر ربح

٢١ - أوجد عددين موجبين مجموعهما يساوي ٤٠ بحيث يكون حاصل ضربهما أعظم ما يمكن.

٢٢- أوجد بعدي مستطيل محيطه ٣٢ سم بحيث تكون مساحته أعظم ما يمكن.

٤- ٥ تقعر المنحنيات:

لقد بينا أهمية المشتقة الأولى في الحصول على معلومات عن منحني الدالة إلا أن هذه المعلومات لا تعطينا صورة دقيقة عن هذا المنحني، لذا نود أن نستعين بالمشتقة الثانية للدالة علّنا نستطيع أن نحصل على معلومات أشمل.

تعريف (٤ - ٦):

تسمي مشتقة الدالة دَ بالمشتقة الثانية للدالة د ونرمز لها بالرموز الآتية:

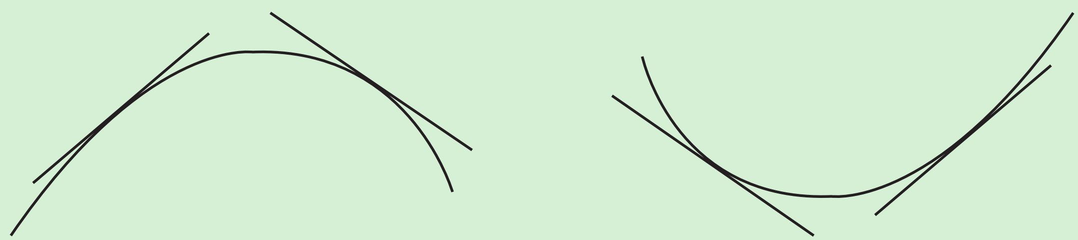
دً أو صً أو $\frac{ء^٢ص}{ء\,س^٢}$

تعريف (٤ - ٧):

لتكن الدالة د قابلة للاشتقاق في الفترة]أ ،ب[. نقول أن منحني الدالة د مقعر نحو الأعلى في تلك الفترة إذا وقع هذا المنحني في هذه الفترة فوق مماساته.

ونقول إن منحني الدالة د مقعّر نحو الأسفل إذا وقع منحني الدالة تحت مماساته في الفترة المذكورة.

انظر الشكل (٤ - ١٤)



شكل (٤ - ١٤)

هناك علاقة بين تقعُر منحني الدالة د من جهة وبين تزايد وتناقص المشتقة دَ من جهة أخرى، هذه العلاقة تنص عليها النظريتان الآتيتان:

نظرية (٤ - ٥)

إذا كان منحني الدالة د مقعُراً نحو الأعلى في الفترة] ٲ ، ب [فإن المشتقة دَ تكون تزايدية في تلك الفترة.

والعكس صحيح أي أنه:

إذا كانت المشتقة الأولى دَ تزايدية في الفترة] ٲ ، ب[فإن منحني الدالة د يكون مقعر نحو الأعلى.

انظر الشكل (٤ - ١٤) (ٲ)

بشكل آخر:

إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق مرتين وكانت دَ (س) > ٠ لكل س في الفترة] ٲ، ب[فإن ذلك يعني أن المشتقة الأولى دَ تزايدية مما يؤدي إلى أن منحنى الدالة د مقعراً نحو الأعلى في تلك الفترة.

نظرية (٤ – ٦)

إذا كان منحني الدالة د مقعَّراً نحو الأسفل في الفترة] ٲ ، ب [فإن المشتقة دَ تكون تناقصية في تلك الفترة.

والعكس صحيح أي أنه :

إذا كانت المشتقة الأولى دَ تناقصية في الفترة] ٲ ، ب[فإن منحني الدالة د يكون مقعراً نحو الأسفل.

انظر الشكل (٤ – ١٥) (ب)

وبشكل آخر :

إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق مرتين وكانت دً (س) < ٠ لكل من الفترة] ٲ ، ب [فإن منحني الدالة د يكون مقعر نحو الأسفل في تلك الفترة.

ونلخص ذلك بالجدول التالي :

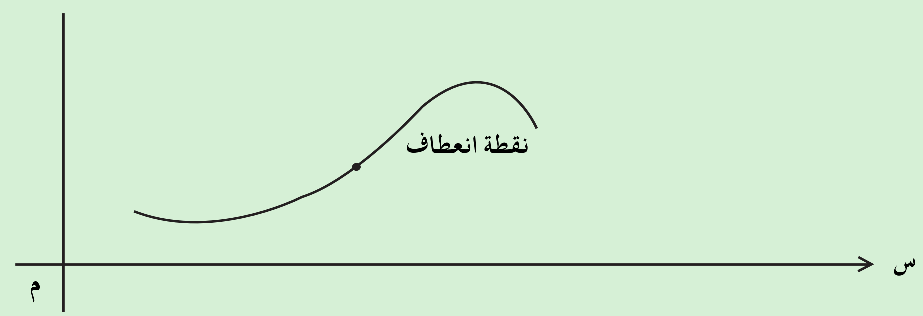
إشارة دً	دَ	منحني الدالة د
+	تزايدية	مقعر نحو الأعلى
–	تناقصية	مقعر نحو الأسفل

شكل (٤–١٥)

تعريف (٤-٨)

إن القطعة التي يتغير عندها اتجاه تقعر منحني الدالة تدعى نقطة انعطاف (انقلاب) .

انظر الشكل (٤-١٦)



شكل (٤ - ١٦)

يتبين لنا من التعريف (٤ - ٨) ومن الجدول السابق أنه إذا كانت ($س_١$ ، د ($س_١$)) نقطة انعطاف لمنحني الدالة ص = د(س) فإن إشارة دً (س) تتغير من موجب إلى سالب (أو من سالب إلى موجب) عندما يجتاز المتغيِّر س العدد س١ ، وعلى هذا يكون :

إمَّا دً ($س_١$) = ٠ أو دً ($س_١$) غير موجودة .

هذا يعني أنه :

للبحث عن نقط انعطاف منحني دالة د توجد دً ونبحث عن قيم س التي تكون عندها الدالة د معرفة وتغير دً إشارتها عند اجتياز هذه النقط .

مثال (٤-٨) :

عيِّن فترات تقعُّر منحنى الدالة د (س) = $س^٣$ - ٦ $س^٢$ + ٩س + ١ وعيّن نقط انعطاف منحنيها .

الحـــل :

إن دَ (س) = ٣ س٢ - ١٢ س + ٩

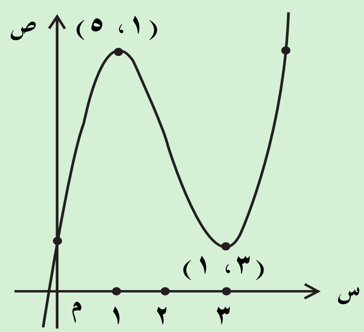
دً (س) = ٦ س - ١٢

إشارة دً	س
	$-\infty$ ٢ $+\infty$
إشارة دً	− ٠ +

يتبين من هذا الجدول أنه توجد للدالة نقطة انعطاف عند س =٢ وأن منحني الدالة مقعَّر نحو الأسفل في الفترة] $-\infty$ ، ٢[

ومقعَّر نحو الأعلى في الفترة] ٢ ، ∞ [

انظر الشكل (٤ − ١٧)



شكل (٤ − ١٧)

٤ - ٦ اختبار المشتقة الثانية:

للمشتقة الثانية فائدة أخرى في تعيين القيم العظمى والصغرى المحلية وخصوصاً حينما يصعب تطبيق اختبار المشتقة الأولى. فنحن نعلم أنه إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق وكان لهذه الدالة قيمة عظمى محلية (أو صغرى محلية) عند س = حـ فإن دَ (حـ) = ٠

وبدراسة المشتقة الثانية يتسنى لنا معرفة ما إذا كانت الدالة د تأخذ عند هذه النقطة قيمة عظمى محلية أم صغرى محلية.

إن اختبار المشتقة الثانية ينص على ما يلي:

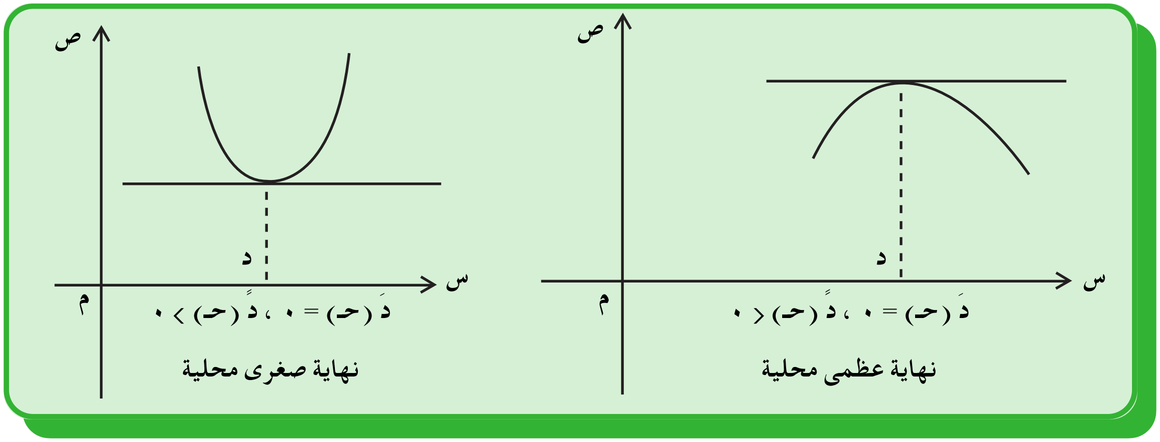
اختبار المشتقة الثانية:

لتكن حـ نقطة من مجال الدالة د القابلة للاشتقاق مرتين بحيث أن: دَ (حـ) = ٠

(١) إذا كان دً (حـ) > ٠ فإن للدّالة د قيمة صغرى محلية عند س = حـ

(٢) إذا كان دً (حـ) < ٠ فإن للدّالة د قيمة عظمى محلية عند س = حـ

انظر الشكل (٤ - ١٨)



شكل (٤ - ١٨)

مثال (٤ - ٩) :

أوجد باستخدام المشتقة الثانية القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة .

$$\text{د}\,(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٤\,\text{س}$$

الحـــل :

إن دَ (س) = $\text{س}^{٢}$ - ٤

دً (س) = ٢ س

نلاحظ أن دَ (س) = ٠ ⟺ س = ٢ أو س = -٢

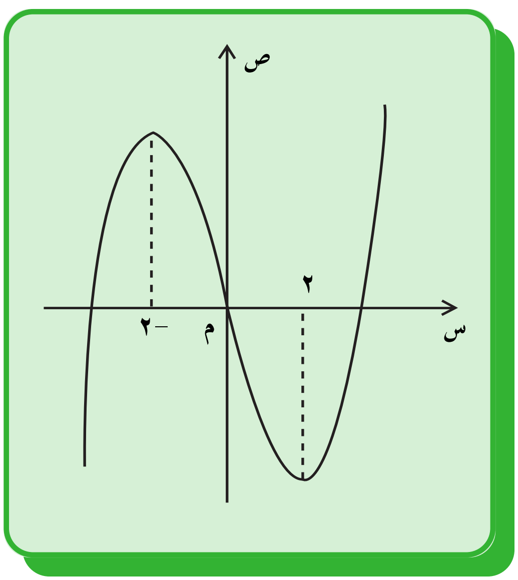
بما أن دً (-٢) = -٤ (عدد سالب)

إذن هناك قيمة عظمى محلية للدالة عند س = -٢

وبما أن دً (٢) = ٤ (عدد موجب)

إذن هناك قيمة صغرى محلية للدالة عند س = ٢

انظر الشكل (٤ - ١٩)



شكل (٤ - ١٩)

مثال (٤-١٠)

أوجد باستخدام المشتقة الثانية القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة :

د (س) = $س^٣$ − ٦ $س^٢$ + ٩ س + ١

الحــــل :

إن دَ (س) = ٣ س٢ − ١٢ س + ٩

= ٣ (س − ٣) (س − ١)

دَ (س) = ٠ ⟸ س = ١ ، س = ٣

ثم إن : دً (س) = ٦ س − ١٢

بما أن دً (١) = عدداً سالباً إذن هناك قيمة عظمى محلية للدالة عند س = ١

وبما أن دً (٣) = عدداً موجباً إذن هناك قيمة صغرى محلية للدالة عند س = ٣

الشكل مرسوم في المثال (٢-٨)

٤ - ٧ رسم المنحنيات:

سبق أن قمنا برسم بعض منحنيات الدوال الحقيقية في البند ١-٢ من الجزء الأول وذلك بالاعتماد على نقاط من كل منحنٍ، إلاَّ أن تلك الطريقة لم تكن كافية لتعطينا تصوراً كاملاً لشكل المنحني، وسوف نستفيد في هذا الباب من خواص كل من المشتقة الأولى واختبارها وخواص المشتقة الثانية واختبارها للحصول على رسم دقيق لمنحني الدالة وسنتبع في سبيل ذلك الخطوات التالية :

١- نعيِّن مجال الدالة د .

٢- نحسب كلاً من دَ ، دً .

٣- نعين القيم التي تجعل دَ = ٠ فينقسم بذلك مجال الدالة إلى فترات جزئية ، نعين إشارة دَ على كلٍ منها فتظهر بذلك لدينا فترات تناقص الدالة وفترات تزايدها .

٤- نعين القيم التي تجعل دً = ٠ ونحدد الفترات التي تكون عليها دً موجبة أو سالبة وبذلك يتبين لنا اتجاه التقعّر في كل فترة .

٥- نوجد القيم العظمى والصغرى المحلية .

٦- ندرس سلوك الدالة عند طرفي مجالها .

٧- نعين بعض نقاط الخط البياني وبصورة خاصة نقاط تقاطعه مع المحورين الإحداثيين .

٨- نلخص النتائج في جدول نستعين به لرسم الخط البياني وسنعتني فيما يلي بشكل خاص بالدوال كثيرات الحدود، والدوال كثيرات الحدود مجال كلٍ منها هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح (فهي معرفة ومتصلة على ح).

الدالة من الدرجة الأولى:

إنها كما تعلم من الشكل ص = ٩ س + ب ، ٩ ≠ ٠ .

مجالها ح والمنحني البياني مستقيم يكفي لرسمه أن نعيِّن نقطتين منه.

المشتقة صَ = ٩ مقدار ثابت

و نميز حالتين:

٩ > ٠ والدالة تزايدية مثل الدالة ص = $\frac{١}{٢}$ س + ١

٩ < ٠ والدالة تناقصية مثل الدالة ص = − $\frac{١}{٢}$ س + ١

المشتقة الثانية صً = ٠ (دوماً) فلا تقعُّر ولا انعطاف ولا ضرورة لحساب صَ في دالة الدرجة الأولى ما لم يطلب إليك ذلك.

بالحالة الخاصة ٩ = ٠ تصبح الدالة ص = ب وهي دالة ثابتة والمنحني البياني مستقيم يوازي محور السينات.

مثال (٤ - ١١)

ارسم منحني كلٍ من الدوال:

(١) ص = $\frac{١}{٢}$ س + ١ (٢) ص = − $\frac{١}{٢}$ س + ١ (٣) ص = ١

على الشكل نفسه.

الحــــل:

(١) ص = $\frac{١}{٢}$ س + ١ مجالها ح وهي دالة تزايدية (صَ = $\frac{١}{٢}$ > ٠)

وخطها البياني مستقيم يمر بالنقطتين (٠ ، ١)، (−٢ ، ٠)

(انظر الشكل (٤ - ٢٠))

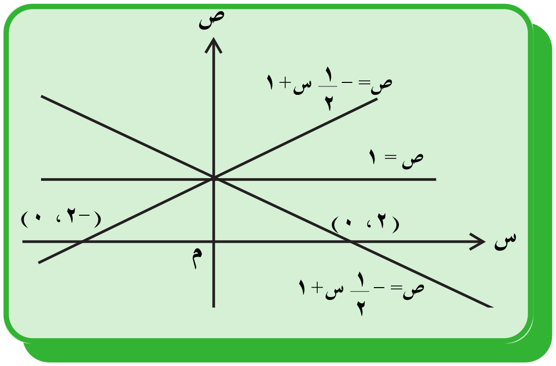
(٢) ص = − $\frac{١}{٢}$ س + ١ مجالها ح وهي تناقصية (صَ = − $\frac{١}{٢}$ < ٠)

وخطها البياني مستقيم يمر بالنقطتين (٠، ١)، (٢، ٠)

(انظر الشكل ٢ – ٢٠)

(٣) ص = ١ دالة ثابتة مجالها ح خطها البياني مستقيم يوازي محور السينات

(انظر الشكل ٢ – ٢٠)



شكل (٤ – ٢٠)

الدالة من الدرجة الثانية:

وقد سبق أن تعرفت عليها في البند (١ – ٢) من الجزء الأول.

فقاعدتها ص = ﺃ س٢ + ب س + حـ   ﺃ ≠ ٠

ومجالها ح ومنحنيها البياني يدعى قطعاً مكافئاً

صً = ٢ ﺃ س + ب

والمعادلة ٢ ﺃ س + ب = ٠ لها جذر وحيد هو س = − $\frac{ب}{٢ﺃ}$

صً = ٢ﺃ ثابت ونميز حالتين:

(١) ﺃ > ٠ والتقعُر نحو الأعلى والنقطة عند س = − $\frac{ب}{٢ﺃ}$ تمثل نقطة محلية صغرى

(٢) ﺃ < ٠ والتقعُّر نحو الأسفل والنقطة عند س = − $\frac{ب}{٢ﺃ}$ تمثل نقطة محلية عظمى

مثال (٤ – ١٢):

ارسم منحني الدالة ص = س٢ – ٤ س + ٣ مع تفصيل الخطوات

الحـــل:

١– الدالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية مجالها ح

٢– صَ = ٢ س – ٤ ، صً = ٢

٣– صَ = ٠ عند س = ٢ وعندها ص = −١

وحيث صً > ٠ فالتقعر دوماً نحو الأعلى والنقطة (٢ ، -١) نقطة محلية صغرى

٤- عندما س < ٢ ⟸ صَ < ٠ والدالة تناقصية .

وعندما س > ٢ ⟸ صَ > ٠ والدالة تزايدية .

٥- صً لا يغير إشارته ولا يوجد انعطاف .

٦- عندما س ⟵ ± ∞ فإن نهـــا ص = نهـــا سٰ٢ = ∞

س ⟵ ± ∞   س ⟵ ± ∞

٧- يقطع المنحني محور الصادات عند س = ٠ ⟸ ص = ٣ (النقطة (٠ ، ٣))

ويقطع محور السينات عند ص = ٠ أي أن س٢ - ٤ س + ٣ = ٠

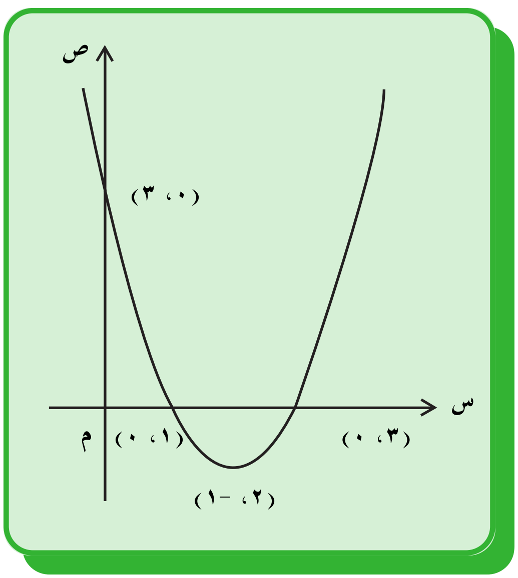
⟺ س = ١ أو س = ٣ ، يوجد نقطتان هما (١ ، ٠) ، (٣ ، ٠)

٨- الجدول الآتي يساعدنا على تصور المنحني البياني (كان بامكاننا وضع نقاط التقاطع فيه)

س	+ ∞	٢	- ∞
صَ	+	٠	-
ص	+ ∞ ↗	-١ ن ص	↘ + ∞

الرسم

انظر الشكل (٤- ٢١)



شكل (٤ - ٢١)

لاحظ في الجدول السابق :

أن السهم ↖ يعني أن الدالة تزايدية

والسهم ↙ يعني أن الدالة تناقصية .

مثال (٤ - ١٣)

ارسم منحني الدالة ص = ٤ س^{٢} - ٤ س + ١ مع تفصيل الخطوات .

الحـــــل :

- الدالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية مجالها ح
- صَ = ٨ س - ٤ صً = ٨
- صَ = ٠ عند س = $\frac{١}{٢}$ وعندها ص = ٠
- صً > ٠ والتقّعر يتجه نحو الأعلى ، والنقطة ($\frac{١}{٢}$ ، ٠) نقطة محلية صغرى .
- عندما س < $\frac{١}{٢}$ فإن صَ < ٠ والدالة تناقصية وعندما س > $\frac{١}{٢}$ فإن صَ > ٠ والدالة تزايدية .
- صً لا تتغيَّر إشارتها ولا يوجد انعطاف
- عندما س ⟵ ± ∞ فإن ص ⟵ + ∞ (لماذا؟)
- التقاطع مع صَ م ص : عندما س = ٠ ⟸ ص = ١ ، نقطة التقاطع (٠ ، ١)

  التقاطع مع سَ م س : عندما ص = ٠ ⟸ ٤ س^{٢} - ٤ س + ١ = ٠ (١)

  أو : (٢س -١)^{٢} = ٠ ⟸ س = $\frac{١}{٢}$

ولاحظ أنه لو حسبنا المميز ب^{٢} - ٤ أ حـ = ١٦ - ٤ × ٤ × ١ = ٠ فإن للمعادلة (١) جذراً واحداً «جذرين متساويين» س = - $\frac{ب}{٢أ}$ = $\frac{١}{٢}$ ، إن هذا الجذر يمثل جذراً مضاعفاً والمنحني في هذه الحالة يمس محور السينات في هذه النقطة) .

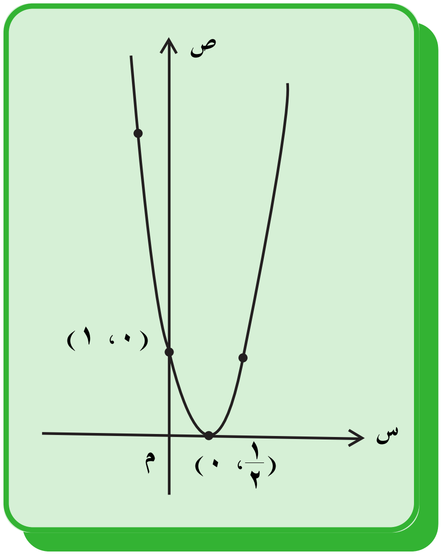
- الجدول الآتي يوضِّح كيف تتغير الدالة عندما تتغير فيه س على مجالها :

س	+ ∞	$\frac{١}{٢}$	- ∞
صَ	+	٠	-
ص	+ ∞ ↗	٠ ν ص	↘ + ∞

مثال (٤ - ١٤)

ارسم منحني الدالة ص = − س^{٢} + س − ١ مع تفصيل الخطوات

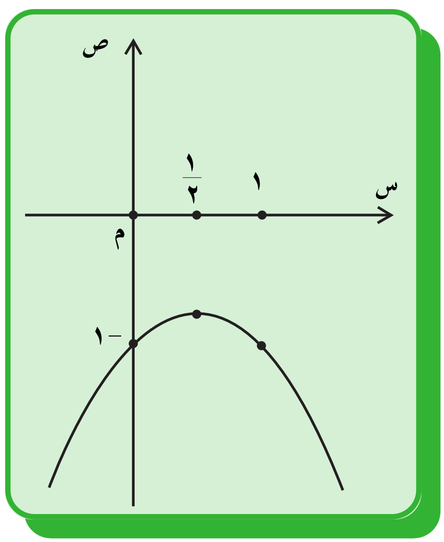
الحــــل:



شكل (٤ - ٢٢)

- الدالة كثيرة حدود من الدرجة الثاية مجالها ح.
- صَ = −٢ س + ١ صً = −٢
- صَ = ٠ عند س = $\frac{١}{٢}$ وعندها ص = − $\frac{٣}{٤}$
- صً < ٠ والتقعُّر يتجه نحو الأسفل، والنقطة ($\frac{١}{٢}$ ، − $\frac{٣}{٤}$) نقطة محلية عظمى.
- عندما س < $\frac{١}{٢}$ فإن صَ > ٠ والدالة تزايدية، وعند س > $\frac{١}{٢}$ فإن صَ < ٠ والدالة تناقصية.
- صَ لا يغير إشارته ولا يوجد انعطاف.
- عندما س ⟵ ± ∞ فإن ص ⟵ − ∞ (لماذا؟)
- يقطع المنحني صَ م ص عند س = ٠ حيث ص = −١ ونقطة التقاطع (٠ ، −١).

ولا يقطع المنحني حور السينات لأنه عند ص = ٠



شكل (٤ - ٢٣)

$-$ س^2 + س $-$ ١ = ٠ أو س٢ $-$ س + ١ = ٠

والمميز ب^2 $-$ ٤ أ حـ = $(-١)^2$ $-$ ٤ (١) (١) = $-$ ٣ < ٠

فالمعادلة ليس لها حل في ح.

■ الجدول الآتي يوضح كيف تتغير الدالة عندما تتغير س على مجالها :

س	$+\infty$		$\frac{١}{٢}$		$-\infty$
صَ		$-$	٠	+	
ص	$-\infty$	↘	$-\frac{٣}{٤}$ ن.ع	↗	$-\infty$

مثال (٤ $-$ ١٥) :

ارسم مع تفصيل الخطوات منحني الدالة :

د (س) = $\frac{١}{٣}$ س^3 $-$ س^2 $-$ ٣ س + ١

الحــــل :

■ من الواضح أن الدالة د معرَّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية ح (أي أن مجال الدالة : ح)

■ دَ (س) = س^2 $-$ ٢ س $-$ ٣

دً (س) = ٢ س $-$ ٢

■ دَ (س) = ٠ ⟺ س^2 $-$ ٢س $-$ ٣ = ٠

س = $-$ ١ ، س = ٣

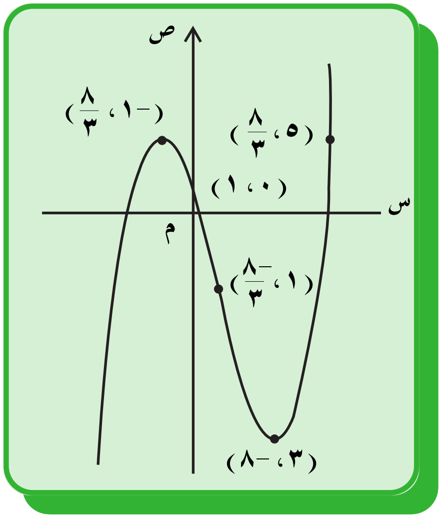
بما أن دً ($-$ ١) عدداً سالباً لذا توجد قيمة عظمى محلية للدالة د عند س = $-$ ١ حيث ص = $\frac{٨}{٣}$

وبما أن دً (٣) = عدداً موجباً لذا توجد قيمة صغرى للدالة د عند س = ٣ وعندها ص = $-$ ٨ .

■ حيث إن دَ من الدرجة الثانية والمعادلة دَ (س) = ٠ لها جذران هما $-$ ١ ، ٣ فإن إشارة دَ تتضح من خلال :

دَ (س) > ٠ لكل س ∈] $-\infty$ ، $-$ ١[U] ٣ ، ∞[والدالة تزايدية على هذه الفترة .

د َ(س) < ٠ لكل س ∋]−١ ، ٣[
والدالة تناقصية على هذه الفترة



شكل (٤ − ٢٤)

■ د ً(س) = ٢ س − ٢ تنعدم عند س = ١ حيث ص = − $\frac{٨}{٣}$
عندما س < ١ فإن د ً < ٠
والتقعُّر نحو الأسفل لكل س ∋]−∞ ، ١[
عندما س > ١ فإن د ً > ٠
والتقعُّر نحو الأعلى لكل س ∋]١ ، ∞[
■ عندما س ⟵ ± ∞ فـإن :

نهـــا ـــــ د(س) = نهـــا ـــــ س^{٣} = ± ∞
س ⟵ ± ∞ س ⟵ ± ∞

■ يقطع المنحني محور الصادات عند س = ٠ ⟸ ص = ١ وحيث أن حل معادلة الدرجة الثالثة لم تتعرف عليه من قبل فبإمكاننا البحث عن بعض النقط الخاصة التي تساعدنا على الرسم الأكثر دقة مثل (٥ ، $\frac{٨}{٣}$).
■ الجدول الآتي يوضح كيف تتغير الدالة عندما تتغير س على مجالها :

س	+ ∞		٣		−١		− ∞
د َ(س)		+	٠	−	٠	+	
د (س)	+ ∞	↗	−٨ نہ ع	↘	$\frac{٨}{٣}$ نہ ص	↗	− ∞

تمارين (٤ - ٣)

ارسم منحنيات الدوال الآتية مع تفصيل الخطوات :

١- (أ) ص = س + ١ (ب) ص = −س − ٣

٢- (أ) ص = $س^٢$ (ب) ص = − $س^٢$ (حـ) ص = $(س - ٣)^٢$

٣- ص = ١ − $(س - ٢)^٢$

٤- ص = $س^٣$

٥ - ص = − $س^٣$ + س ابحث هل الدالة فردية ؟ وماذا نستفيد من ذلك للرسم البياني ؟

٦- ص = ٢ + $(س - ٤)^٢$

٧ - ص = $\frac{١}{٤}$($س^٣$ − $\frac{٣}{٢}$ $س^٢$ − ٦ س + ٢)

٨ - ص = $س^٢$ − ٥ س + ٤

٩ - ص = − $س^٢$ − س − ١

١٠- ص = $س^٢$ − ٤ س + ٤

١١- ص = $س^٢$ + ٥ ابحث هل الدالة زوجية ؟ وماذا تستفيد من ذلك للرسم البياني ؟

٤- ٨ الدالة الأسية:

سبق أن درسنا موضوع القوى وخواصها سواءً كانت هذه القوى ذات أسس تنتمي إلى مجموعة الأعداد الكلية أو الصحيحة أو كانت أعداداً حقيقية . وتعرَّفنا كذلك على الدالة الأسية :

$ق_أ$ (س) = $أ^س$ حيث أ ∈ $ح^+$ − {١} وَ س ∈ ح.

ورأينا أن هذه الدالة هي دالة تقابل من ح إلى $ح^+$. ودعونا العدد أ أساسها .

من بين هذه الدوال الأسية دالة ذات أهمية بالغة بالنسبة للتطبيقات أساسها عدد غير قياسي يرمز له بالرمز هـ وقيمته التقريبية هي ٢,٧١٨٢٨ ويُعرّف هذا العدد في المراحل المتقدمة على أنه النهاية الآتية :

$$هـ = \underset{س \to \infty}{نهـا} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س}$$

والجدول الآتي يبين أن هذه المتتابعة تقترب من العدد المذكور آنفاً :

$ن$	١	١٠	٢٠	١٠٠
$\left(١ + \frac{١}{ن}\right)^{ن}$	٢	٢,٥٩	٢,٦٥	٢,٧٠٥

مثال (٤ - ١٦) :

بلغ عدد سكان الهند في نهاية ١٩٦٦م خمسمائة مليون نسمة فإذا كان معدل النمو السكاني هو $\frac{٠,٠٢}{ك}$ في الفترة $\frac{١}{ك}$ من السنة فكم سيصبح عدد سكان الهند في نهاية ١٩٨٦م.

الحـــل :

عدد سكان الهند في نهاية الفترة $\frac{١}{ك}$ من عام ١٩٦٧م $= ٥٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٢}{ك}\right)$

عدد سكان الهند في نهاية الفترة $\frac{٢}{ك}$ من عام ١٩٦٧م $= ٥٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٢}{ك}\right)\left(١ + \frac{٠,٠٢}{ك}\right)$

$= ٥٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٢}{ك}\right)^{٢}$

عدد سكان الهند في نهاية عام ١٩٦٧م $= ٥٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٢}{ك}\right)^{ك}$

عدد سكان الهند في نهاية عام ١٩٦٨م $= ٥٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٢}{ك}\right)^{ك}\left(١ + \frac{٠,٠٢}{ك}\right)^{ك}$

$= ٥٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٢}{ك}\right)^{٢ك}$

عدد سكان الهند في نهاية عام (١٩٨٦م) (أي بعد عشرين عاماً) $= ٥٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٢}{ك}\right)^{٢٠ك}$

نرمز للمقدار $\frac{٠,٠٢}{ك}$ بـ س فيصبح عدد سكان الهند في نهاية ١٩٨٦م كما يلي :

$$٥٠٠ \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{٢٠ \times ٠,٠٢ \times س}$$

إذا جعلنا العدد ك يزداد فإن س سيتزايد مع تزايد ك إلا أن عدد سكان الهند في نهاية عام ١٩٨٦م لن يزيد، مع ذلك، عن النهاية الآتية:

$$\text{نهـــــا}_{\text{س} \to \infty} \ ٥٠٠ \left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{س} \times ٠,٠٢ \times ٢٠}$$

$$= ٥٠٠ \ \text{نهـــــا}_{\text{س} \to \infty} \left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{س} \times ٢٠ \times ٠,٠٢}$$

$$= ٥٠٠ \left[\text{نهـــــا}_{\text{س} \to \infty} \left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{س}}\right]^{٢٠ \times ٠,٠٢}$$

$$= ٥٠٠ \ \text{هـ}^{٢٠ \times ٠,٠٢} = ٥٠٠ \ \text{هـ}^{٠,٤} = ٧٤٦ \ \text{مليون نسمة}$$

ملاحظة (٤ – ٢):

يتبين من هذا المثال أنه إذا كان عدد السكان في بلدٍ ما هو س في هذا العام وكان المعدل السكاني للنمو هو ٢٪ في العام الواحد فإن عدد سكان هذا البلد بعد $ن$ من السنين لن يزيد عن:

$$\text{س} \times \text{هـ}^{٠,٠٢ ن} \qquad (٤ - ١)$$

يمكننا اعتبار هذا العدد قيمة تقريبية، لعدد السكان بعد $ن$ سنة.

٤ - ٩ الدالة اللوغاريتمية:

من المعلوم لديك أن للدالة الأسية ص $= \text{أ}^{\text{س}}$ حيث أ $\in$ ح$^{+}$ – {١} دالة عكسية تدعى الدالة اللوغاريتمية بالنسبة للأساس أ يرمز لها بالرمز $\text{لو}_{\text{أ}}$ ويكون:

$$\text{ص} = \text{أ}^{\text{س}} \Leftrightarrow \text{س} = \text{لو}_{\text{أ}} \text{ص}$$

فمثـــــلاً:

$$١٠٠ = ١٠^{٢} \Leftrightarrow ٢ \ \text{لو}_{١٠} \ ١٠٠$$

$$٣ = ٩^{\frac{١}{٢}} \Leftrightarrow \frac{١}{٢} = \text{لو}_{٩} \ ٣$$

$$١ = \text{أ}^{٠} \Leftrightarrow ٠ = \text{لو}_{\text{أ}} \ ١$$

$$\text{أ} = \text{أ}^{١} \Leftrightarrow ١ = \text{لو}_{\text{أ}} \ \text{أ}$$

وإنك لتعلم أن مجال الدالة اللوغاريتمية هو مجموعة الأعداد الموجبة وأن هذه الدالة تتمتع بالخواص الآتية:

$$لو_{م}(ب.حـ) = لو_{م}\,ب + لو_{م}\,حـ$$

$$لو_{م}\frac{ب}{حـ} = لو_{م}\,ب - لو_{م}\,حـ$$

$$لو_{م}\,س^{ن} = ن\,لو_{م}\,س \text{ حيث } ن \in ح$$

مثال (٤ - ١٧)

إذا كان معدل النمو السكاني في العالم هو ٢٪ سنوياً فبعد كم سنة يتضاعف عدد سكان العالم مرتين.

الحـــل:

ليكن س هو سكان العالم الآن و ز عدد السنوات اللازم كي يتضاعف هذا العدد مرتين. نعوِّض في الصيغة (٢-١) فنجد:

$$٢\,س = س\,هـ^{٠,٠٢\,ز}$$

$$\text{أي } ٢ = هـ^{٠,٠٢\,ز}$$

$$لو_{هـ}٢ = ٠,٠٢\,ز \times لو_{هـ}هـ$$

$$لو_{هـ}\,٢ = ٠,٠٢\,ز$$

$$ز = \frac{لو_{هـ}\,٢}{٠,٠٢} = \frac{٠,٦٩٣١}{٠,٠٢} = ٣٤,٦٥٥ \text{ سنه}$$

هذا يعني أن عدد سكان العالم سوف يتضاعف مرتين بعد ٣٥ سنة تقريباً.

٤ - ١٠ مشتقة الدالة اللوغاريتمية:

لاحظنا من الأمثلة السابقة أهمية الأساس هـ في كلٍ من الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية بالنسبة للمسائل التطبيقية.

لهذا السبب سوف نقصر اهتمامنا على مشتقة الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس هـ. وسوف ندعو اللوغاريتم الذي أساسه هـ باللوغاريتم الطبيعي ونرمز له اختصاراً بالرمز (لو).

نظرية (٤ – ٧)

إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \text{لو س}$ فإن $\text{د}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$ ، س > ٠

البرهان :

$$\text{د}(\text{س} + \text{ك}) - \text{د}(\text{س}) = \text{لو}(\text{س} + \text{ك}) - \text{لو س}$$

$$= \text{لو}\ \frac{\text{س} + \text{ك}}{\text{س}}$$

$$= \text{لو}\ (١ + \frac{\text{ك}}{\text{س}})$$

$$\frac{\text{د}(\text{س} + \text{ك}) - \text{د}(\text{س})}{\text{ك}} = \frac{١}{\text{ك}}\ \text{لو}\ (١ + \frac{\text{ك}}{\text{س}})$$

$$= \frac{١}{\text{س}}\ \frac{\text{س}}{\text{ك}}\ \text{لو}\ (١ + \frac{\text{ك}}{\text{س}})$$

$$= \frac{١}{\text{س}}\ \text{لو}\ (١ + \frac{\text{ك}}{\text{س}})^{\frac{\text{س}}{\text{ك}}}$$

لنفرض $\frac{\text{س}}{\text{ك}} = \text{ن}$ ، فيكون $\frac{\text{ك}}{\text{س}} = \frac{١}{\text{ن}}$ ، وبملاحظة أن $\text{ك} \to ٠ \Leftarrow \text{ن} \to \infty$

نجـــد :

$$\lim_{\text{ك} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{ك}) - \text{د}(\text{س})}{\text{ك}} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{١}{\text{س}}\ \text{لو}\ (١ + \frac{١}{\text{ن}})^{\text{ن}}$$

$$= \frac{١}{\text{س}}\ \lim_{\text{ن} \to \infty} \text{لو}(١ + \frac{١}{\text{ن}})^{\text{ن}}$$

$$= \frac{١}{\text{س}}\ \text{لو}\ [\lim_{\text{ن} \to \infty} (١ + \frac{١}{\text{ن}})^{\text{ن}}]$$

$$= \frac{١}{\text{س}}\ \text{لو هـ}$$

$$= \frac{١}{\text{س}} \quad \text{لان لو هـ} = ١$$

ملاحظة (٤ - ٣)

إذا كانت د دالة في س فإننا نجد إستناداً إلى قاعدة السلسلة أن :

$$[\text{لو د (س)}]' = \frac{\text{د}'\text{(س)}}{\text{د (س)}}$$

٤ - ١١ مشتقة الدالة الأسية:

نظرية (٤ - ٨)

إذا كان د (س) = $هـ^{س}$ فإن دَ (س) = $هـ^{س}$

البرهان :

إذا كان ص = $هـ^{س}$ فإن :

لو ص = س (من تعريف اللوغاريتم)

نشتق الطرفين بالاعتماد على الملاحظة (٢ - ٣)

$$\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = ١ \Leftrightarrow \text{ص}' = \text{ص}$$

أي أن :

ص = $هـ^{س}$ $\Leftarrow$ صَ = $هـ^{س}$

مثال (٤ - ١٨) :

احسب مشتقة الدالة د (س) = س . $هـ^{س}$

الحـــل :

دَ (س) = ١ × $هـ^{س}$ + س × $هـ^{س}$ = $هـ^{س}$ (١ + س)

مثال (٤ - ١٩) :

احسب مشتقة الدالة د (س) = $هـ^{-س^{٢} + ١}$

الحـــل :

بتطبيق قاعدة التسلسل نجد :

$د\َ(س) = هـ^{-س^٢ + ١} (-٢ س)$

مثال (٤ - ٢٠) :

احسب مشتقة الدالة : $د(س) = هـ^{\sqrt{٥ س}}$

الحـــل :

$$د\َ(س) = هـ^{\sqrt{٥ س}} \times \frac{٥}{٢\sqrt{٥س}}$$

مثال (٤ - ٢١) :

احسب مشتقة الدالة : $د(س) = لو(٥ س)$

الحـــل :

$$د\َ(س) = \frac{٥}{٥ س} = \frac{١}{س}$$

مثال (٤ - ٢٢) :

احسب مشتقة الدالة : $د(س) = \frac{س^٢}{لو س}$

الحـــل :

$$د\َ(س) = \frac{٢س لو س - س^٢ (\frac{١}{س})}{(لو س)^٢}$$

$$= \frac{٢ س لو س - س}{(لو س)^٢}$$

تمارين (٤ - ٤)

احسب $\frac{ءص}{ءس}$ لكل من الدوال الآتية :

١- $ص = لو(س^٢ + ١)$

٢- $ص = لو (س)^{٣}$

٣- $ص = لو س^{٤}$

٤- $ص = لو \frac{س^{٢}}{\sqrt{س + ١}}$

٥- $ص = لو \left[(س - ١)^{٢} \sqrt{س + ١} \right]$

٦- $ص = هـ^{٢س - ٣}$

٧- $ص = هـ^{-س^{٢}}$

٨- $ص = هـ^{س^{٢} - س}$

٩ - $ص = س - هـ^{س} لو س$

١٠ - $ص = \frac{١ + هـ^{-س}}{١ + س}$

١١ - $ص = \frac{هـ^{٢س}}{١ + س^{٢}}$

٤ - ١٢ مسائل القيم المفضلة:

مثال (٤ - ٢٣):

لنفترض أن ربح مصنع الثلاجات دالة تتعلق بعدد الثلاجات المباعة شهرياً على النحو التالي :

$ر(س) = - س^{٢} + ٢٠٠ س - ١٠٠٠$

ولنفترض أن كمية إنتاج المصنع لا يمكن أن تزيد عن ١٥٠ ثلاجة شهرياً وأن ثمن بيع الثلاجة يتغير حسب عدد القطع المباعة شهرياً وفق العلاقة الآتية :

$د(س) = ١٠٠٠ - س$

والمطلوب معرفة : مستوى البيع الذي يؤدي إلى أفضل ربح ، والربح الأعظمي ، وثمن بيع الثلاجة الواحدة حينئذٍ .

الحـــل :

للإجابة على هذه المسألة نحتاج لمعرفة القيمة العظمى للدالة ر(س) في الفترة [٠ ، ١٥٠] بما أن

المشتقة الأولى رَ (س) = −٢ س + ٢٠٠ تنعدم عند س$_{١}$ = ١٠٠ . وبما أن المشتقة الثانية سالبة إذن نجد القيمة العظمى للدالة ر (س) تقع عند س$_{١}$= ١٠٠

س	١	١٠٠	١٥٠
ر (س)	−١٠٠٠٠	٩٠٠٠	٦٥٠٠

يتبيَّن من هذا الجدول أن مستوى البيع الذي يؤدي إلى أفضل ربح هو ١٠٠ ثلاجة شهرياً ويكون الربح في هذه الحالة ٩٠٠٠ ريال شهرياً أما ثمن بيع الثلاجة فهو ١٠٠٠ − ١٠٠ = ٩٠٠ ريال.

٤ - ١٣ مراقبة المخزون من السلع:

من الأمور الهامة للتاجر تخزين كمية من البضاعة كي يلبي حاجة السوق لفترة من الزمن، ولكن ليس من المستحسن الاحتفاظ بكمية كبيرة منها في المستودعات نظراً للتكلفة التي تترتب على ذلك. فالتاجر اذن بين أمرين: إما أن يحتفظ بكمية كافية لحاجة السوق أو أنه يطلب البضاعة تباعاً على فترات متقطعة، فما هي الكمية التي ينبغي له أن يطلبها في كل مرة كي يجعل التكلفة (التي تتضمن تكلفة التخزين وتكلفة الطلبات) أقل ما يمكن.

مثال (٤ − ٢٤):

يتوقع أحد التجار أن يبيع ١٠٠٠ جهاز خلال العام الواحد، وإن تكلفة تخزين الجهاز الواحد تبلغ ١٠ ريالات في العام وتكلفة الطلب الواحد تبلغ ٥٠ ريالاً. فكم عدد الطلبات المتساوية بالعدد وماهي الكمية التي ينبغي له أن يطلبها في كل مرة كي يجعل التكلفة أقل ما يمكن، علماً أن وصول الطلب يتم عند نفاذ الطلب الذي سبقه وأن كل طلبية تباع بشكل منتظم.

الحـــل:

نفرض أن عدد أجهزة كل طلبية س، وبما أن الأجهزة المطلوبة تباع بصورة منتظمة لذا يمكن اعتبار أن متوسط المخزون يساوي دائماً نصف عدد أجهزة الطلبية أي $\frac{س}{٢}$ ونجد:

تكلفة التخزين : $د(س) = ١٠ \left(\frac{س}{٢}\right) = ٥ س$

عدد الطلبات : $\frac{١٠٠٠}{س}$

تكلفة الطلبات : $ر(س) = ٥٠ \times \frac{١٠٠٠}{س} = \frac{٥٠٠٠٠}{س}$

التكلفة : $ت(س) = د(س) + ر(س)$

$$= ٥ س + \frac{٥٠٠٠٠}{س}$$

$$تَ(س) = ٥ - \frac{٥٠٠٠٠}{س^٢}$$

إن س تتراوح بين ١ و ١٠٠٠ وتعود المسألة إلى تحديد القيمة الصغرى للدالة ت (س) في الفترة [١ ، ١٠٠٠] .

إن $تَ(س) = ٠ \Longleftarrow س^٢ = ١٠٠٠٠ \Longleftarrow س = ١٠٠$

س	١	١٠٠	١٠٠٠
ت (س)	٥٠٠٠٥	١٠٠٠	٥٠٥٠

وهكذا فإنه إذا طلب التاجر ١٠٠ جهاز كل مرة فإن التكلفة تصبح أقل ما يمكن وتبلغ حينئذٍ ١٠٠٠ ريال . أما عدد الطلبات فهو $\frac{١٠٠٠}{١٠٠} = ١٠$ طلبات .

مثال (٤ - ٢٥) :

تبيع إحدى الدول البترولية ميلون برميل يومياً بسعر ٣٠ دولاراً للبرميل الواحد ، وقد وجدت هذه الدولة أنه كلما زاد سعر البرميل دولاراً واحداً فإن عدد البراميل المباعة يقل ٢٥٠٠٠ برميل يومياً . كم يمكن لهذه الدولة أن تزيد على سعر البرميل كي تجعل عائدها اليومي أعظمياً .

الحـــل :

ليكن س عدد الدولارات المزادة للبرميل الواحد .

عدد البراميل المباعة بعد الزيادة = ١٠٠٠٠٠٠ - ٢٥٠٠٠س

العائد اليومي بعد الزيادة: ع (س) = (١٠٠٠٠٠٠ - ٢٥٠٠٠س) (٣٠ + س)

من الواضح أن س $\geqslant$ ٠ وأن س $\leqslant$ ٤٠ إذ لو زادت س عن ٤٠ ريالاً لأصبح العائد سالباً. والمسألة إذن هي في إيجاد القيمة العظمى للدالة ع (س) في الفترة [٠ ، ٤٠]

إن عَ (س) = ٢٥٠٠٠٠ - ٥٠٠٠٠س

عَ (س) = ٠ $\Longleftarrow$ س = ٥

ربما أن عً (س) = - ٥٠٠٠٠ < ٠ إذن تأخذ الدالة ع (س) قيمتها العظمى عندما يصبح سعر برميل البترول ٣٥ دولاراً ويكون العائد اليومي حينئذٍ: ع (٣٥) = ٣٠٦٢٥٠٠٠ دولار.

تمارين (٤-٥)

أوجد مشتقة كل من الدوال المعرفة بقاعدتها:

(١) ص = س^{٣} + لو س

(٢) ص = س^{٣} لو س

(٣) ص = (س + ٣) لو س

(٤) ص = لو س^{٥}

(٥) ص = لو (س^{٢} + ٥ س + ١)

(٦) ص = س^{٣} لو س^{٣}

(٧) ص = هـ^{٣س}

(٨) ص = هـ$^{س^{٢}}$

(٩) ص = س^{٢} هـ^{٢س}

(١٠) ص = (س^{٢} + ٣) هـ$^{س^{٢}}$

(١١) ص = $\frac{١}{٢}$ (هـ^{س} + هـ$^{-س}$)

(١٢) ص = $\frac{١}{٢}$ (هـ^{س} - هـ$^{-س}$)

(١٣) ص = $\frac{هـ^{س} - هـ^{-س}}{هـ^{س} + هـ^{-س}}$

(١٤) ص = $\frac{١}{هـ^{س} + هـ^{-س}}$

(١٥) إذا كانت ص = هـ$^{ن س}$ فأثبت أن صَ - ن ص = ٠

(١٦) إذا كانت دالة التكلفة اللازمة لإنتاج س قطعة معطاة بالصيغة الآتية:

ت (س) = ٢٥٠ س - ١٠ س^{٢} + $\frac{١}{١٠}$ س^{٣} س > ٠

فاحسب عدد القطع التي يجب أن ينتجها المصنع كي تكون التكلفة أقل ما يمكن.

(١٧) ينتج أحد المصانع س قطعة في الأسبوع ويبيعها بسعر القطعة:

$ع = ٢٠٠ - \frac{١}{١٠٠}$ س

ويتكلف المصنع لإنتاج هذه القطع مبلغاً معطى بالصيغة الآتية :

ت = ٥٠٠ س + ٢٠٠٠٠

كم عدد القطع التي يجب أن ينتجها المصنع كي يكون الربح أعظم ما يمكن علماً أن هذا العدد لا يزيد عن مليون قطعة في الأسبوع.

الخلاصة

درسنا في هذا الباب موضوعات متعددة هي :

تزايد وتناقص دالة والقيم العظمى والصغرى المحلية وتقعر المنحني ونقط الانعطاف ورسم المنحنيات.

وتعرَّفنا على اختبارين هامين في تمييز القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية ونعني بذلك اختبار المشتقة الأولى واختبار المشتقة الثانية.

وكان للمشتقة الأولى وللمشتقة الثانية دور رئيسي في معرفة فترات تزايد أو تناقص الدالة د وفي الحكم على تقعر المنحني نحو الأعلى أو نحو الأسفل كما يُظهر ذلك الجدولان الآتيان :

اشارة دَ	الدالة د
+	تزايدية
−	تناقصية

اشارة دً	منحني الدالة د
+	مقعَّر نحو الأعلى
−	مقعَّر نحو الأسفل

درسنا بعد ذلك دالتين هامتين هما الدالة الأسية : $هـ^{س}$ والدالة اللوغاريتمية $لو_{هـ}$ س التي رمزنا لها بالرمز لو س وحسبنا مشتقة كل من هاتين الدالتين :

$(هـ^{س})' = هـ^{س}$ $\qquad$ $(لو\ س)' = \frac{١}{س}$

وتخلَّل هذا الباب العديد من التطبيقات وخصوصاً فيما يتعلق بتحديد أقل تكلفة أو تحقيق أعظم ربح.

تمارين عامة

١- عيّن كلاً من ﻫ ، ب بحيث يكون للدالة ص = ﻫ $س^{-\frac{1}{2}}$ + ب $س^{\frac{1}{2}}$ قيمة صغرى عند كل من س = ٦ وس = ٩ .

٢- تبيّن لدى إحدى الشركات أن عدد القطع س المباعة شهرياً يرتبط بسعر القطعة الواحدة ك وفقاً للصيغة الآتية: س = ٦٠٠٠ - ٣٠ ك

كما تبين أن التكلفة ت لإنتاج س هي : ت= ٧٢٠٠٠ + ٦٠ س

(أ) احسب التكلفة ت كدالة في ك.

(ب) اكتب العائد ك من بيع س قطعة كدالة في ك.

(جـ) ارسم كلاً من هاتين الدالتين واستنتج من الرسم السعر ك الذي يحقق ربحاً للشركة.

(د) بكم يجب أن تباع القطعة الواحدة كي يتحقق الربح الأعظمي؟

ارسم كلاً من الدوال الآتية مستخدماً الآلة الحاسبة:

٣- ص = $٢^{س}$

٤- ص = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$

٥- ص = $هـ^{س}$

٦- ص = $هـ^{-س}$

٧ - ص = لو س

٨ - ص = ١ + لو س

٩ - ص = لو (س + ١)

الباب الخامس

حساب التكامل

تمهيد :

لقد كان الهدف الرئيس لوجود مفهومين أساسيين من مفاهيم التحليل الرياضي هدفاً هندسياً. فالأمر الذي أدى إلى مفهوم المشتقة هو إيجاد معادلة مماس لمنحني عرفت معادلته. سندرس هنا مفهوماً آخر من مفاهيم التحليل الرياضي هو التكامل الذي كان الهدف المباشر لوجوده هو التوصل إلى حساب مساحة منطقة من مستوٍ محاطة بمنحنيات عرفت معادلاتها.

سنقدم أولاً عملية معاكسة لعملية الإشتقاق ندعوها عملية إيجاد الدالة الأصلية ثم نتعرض بعد ذلك إلى مفهوم التكامل.

٥-١ الدالة الأصلية:

لقد درسنا بعض خواص الدوال كنتيجة لدراسة خواص مشتقات هذه الدوال وسيكون هدفنا في هذا البند معرفة دالة عرفت مشتقها.

لو فرضنا أن دالة د معرفة بالعلاقة:

$$د(س) = ٥ س^{٤} \qquad (١)$$

فإننا نلاحظ بسهولة أن الدالة ق المعرفة بالعلاقة.

$$ق\,(س) = س^{٥}$$

هي دالة مشتقتها الدالة د.

تعريف (٥ - ١)

نقول عن الدالة ق إنها دالة أصلية للدالة د إذا تحقق ما يلي:

$$\frac{ء ق\,(س)}{ء\,س} = د\,(س)$$

ونكتب ذلك بالشكل:

$$ق\,(س) = \int د(س)\,.ءس$$

$$(٥ - ١)$$

نلاحظ أنه إذا كان : ق (س) = د (س)

فإنه يكون أيضاً :

[ق(س) + ث]َ = د(س) حيث ث عدد ثابت . لذا نقول :

إذا كانت ق دالة أصلية للدالة د فإن ق+ ث ، حيث ث عدد ثابت ، دالة أصليـة للدالة د وهذا يعني أنه يوجد لكل دالة د عدد غير منتهٍ من الدوال الأصلية تختلف كل واحدة منها عن الأخرى بعدد ثابت .

يمكننا أن نكتب من أجل الدالة (١) : $\int$ ٥ س^{٤} . ى س = س^{٥} + ث

حيث يمكن للعدد ث أن يأخذ أي قيمة فهو ثابت اختياري ندعوه ثابت الدالة الأصلية .

يسمي بعضهم الرمز : $\int$ د (س) ى س تكاملاً غير محدَّد ،

كما يسمى حساب الدالة الأصلية ق (س) بحساب التكامل غير المحدَّد .

نتائج (٥ – ١)

ينتج عن تعريف الدالة الأصلية وعن خواص اشتقاق دالة مايلي :

١– إذا كانت ق دالة أصلية للدالة د فإننا نجد

ى ق(س) = ق(س) . ى س = د(س) . ى (س)

أي

$\int$ د(س) . ى (س) = ق(س) $\Longleftrightarrow$ ى ق (س) = د(س) ى س

٢– إذا كان :

$\int$ د (س) ى س = ق(س) + ث$_{١}$ ، $\int$ حـ(س) ى س = ك (س) + ث$_{٢}$

حيث كل من ث$_{١}$ ، ث$_{٢}$ عدد اختياري فإن :

$\int$ [د (س) + حـ(س)] ى س = ق (س) + ك (س) + ث

حيث ث عدد ثابت اختياري وذلك لأن :

[ق(س) + ك (س) + ث]َ = ق(س) + ك (س)

= د (س) + حـ(س)

تمثَّل هذه الخاصة بالشكل :

$\int [د(س) + هـ(س)] ء س = \int د(س) . ء س + \int هـ(س) . ء س$ ونذكر ذلك بقولنا :

الدالة الأصلية لمجموع دالتين تساوي مجموع الدالتين الأصليتين لهاتين الدالتين .

٣- إذا كان :

$$\int د(س) ء س = ه(س) + ث$$

فإن $\int أ . د(س) ء س = أ ه(س) + ث_١$

حيث ث و $ث_١$ ثابتان اختياريان .

نكتب هذه الخاصة كما يلي :

$$\int أ . د(س) ء س = أ \int د(س) . ء س$$

٤- إذا كان ن $\neq$ -١ فإن :

$$ص = \int س^ن . ء س = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث \quad \text{حيث ن} \in ح$$

وذلك لأن :

$$\frac{ء ص}{ء س} = س^ن$$

٥- إذا كان ن = -١ فإننا نجد ، بفرض س > ٠

$$ص = \int \frac{ء س}{س} = لو س + ث$$

وذلك لأن :

$$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{س}$$

أما إذا كان س < ٠ فإن :

$$ص = \int \frac{ء س}{س} = لو |س| + ث$$

لأنه (في هذه الحالة) |س| = - س حيث - س > ٠

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \left(\text{لو}\,(-\text{س}) + \text{ت} \right)$$

$$= \frac{\text{١}}{-\text{س}} \times -\text{١} = \frac{\text{١}}{\text{س}}$$

إذن سواء أكانت س > ٠ أو س < ٠ فإن:

$$\text{ص} = \int \frac{\text{ءس}}{\text{س}} = \text{لو س} + \text{ث}$$

٦- نتيجة لمعرفة مشتقة الدالة الأسية:

$$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \Longrightarrow \text{ص}' = \text{هـ}^{\text{س}}$$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}} \,.\, \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$$

أمثلة (٥ - ١):

(١) $\int \text{٥} \,.\, \text{ءس} = \text{٥س} + \text{ث}$

(٢) $\int \text{٣س}^{\text{٣}} \,.\, \text{ءس} = \frac{\text{٣س}^{\text{٤}}}{\text{٤}} + \text{ث}$

(٣) $\int \text{٥}\sqrt{\text{س}} \,.\, \text{ءس} = \int \text{٥س}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} \,.\, \text{ءس} = \frac{\text{٥س}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}}{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} + \text{ث} = \frac{\text{٢} \times \text{٥}}{\text{٣}} \text{س}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} + \text{ث}$

(٤) $\int \text{١١س}^{-\text{٧}} \,.\, \text{ءس} = \text{١١} \frac{\text{س}^{-\text{٦}}}{-\text{٦}} + \text{ث} = -\frac{\text{١١}}{\text{٦}} \text{س}^{-\text{٦}} + \text{ث}$

(٥) $\int (\text{س}^{\frac{\text{٢}}{\text{٥}}} + \frac{\text{٢}}{\text{٣}} \text{هـ}^{\text{س}} - \frac{\text{٣}}{\text{س}}) \,.\, \text{ءس} = \int \text{س}^{\frac{\text{٢}}{\text{٥}}} \,\text{ءس} + \int \frac{\text{٢}}{\text{٣}} \text{هـ}^{\text{س}} \,.\, \text{ءس} - \int \frac{\text{٣}}{\text{س}} \,\text{ءس}$

$$= \frac{\text{س}^{\frac{\text{٧}}{\text{٥}}}}{\frac{\text{٧}}{\text{٥}}} + \frac{\text{٢}}{\text{٣}} \text{هـ}^{\text{س}} - \text{٣ لو}\,|\text{س}| + \text{ث}$$

$$= \frac{\text{٥}}{\text{٧}} \text{س}^{\frac{\text{٧}}{\text{٥}}} + \frac{\text{٢}}{\text{٣}} \text{هـ}^{\text{س}} - \text{٣ لو}\,|\text{س}| + \text{ث}$$

(٦) $\int (\frac{\text{٣}}{\sqrt{\text{س}}} + \frac{\text{٥}}{\text{س}^{\text{٣}}}) \,.\, \text{ءس} = \text{٣} \int \text{س}^{-\frac{\text{١}}{\text{٢}}} \,.\, \text{ءس} + \text{٥} \int \text{س}^{-\text{٣}} \,.\, \text{ءس}$

$$= \frac{٣ س^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ٥ \frac{س^{-٢}}{-٢} + ث$$

$$= ٦ س^{\frac{١}{٢}} - \frac{٥}{٢} \frac{١}{س^{٢}} + ث$$

تمارين (٥ - ١)

احسب الدالة الأصلية في كل ما يلي :

١- $١١ \, ى س$

٢ - $س^{٣} \, . \, ى س$

٣- $س^{٩} \, . \, ى س$

٤ - $س^{\frac{١}{٥}} \, . \, ى س$

٥- $س^{\frac{٢}{٣}} \, . \, ى س$

٦- $\frac{٧}{س^{٣}} \, . \, ى س$

٧- $٥ \, . \, هـ^{س} \, . \, ى س$

٨- $\frac{١١}{س} \, . \, ى س$

٩ - $٣ \sqrt{س} \, . \, ى س$

١٠- $\frac{٣}{٣ \sqrt{س}} \, . \, ى س$

١١- $(٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ١١ \, س - ٧) \, . \, ى س$

١٢- $\frac{س^{٢} - ٣س - ٣}{س^{٢}} \, . \, ى س$

١٣- $(٢ \sqrt{س} + \frac{١}{٣س} - ٥ \, س) \, . \, ى س$

١٤ - $(٥ \, س^{٤} - ١١ \, س^{\frac{٧}{٣}} + \frac{٦}{٥ \, س^{٤}}) \, . ى س$

٥- ٢ طرائق حساب التكامل غير المحدَّد

هناك طرائق عديدة تقيد في حساب التكامل غير المحدّد لدوال فيها شيء من التعقيد ، سنكتفي هنا باعطاء طريقة تدعى طريقة تبديل المتغير (طريقة التعويض) .

المكاملة بطريقة تبديل المتغير :

لقد رأينا في (١ - ٧) أنه إذا كان :

ص = د (ع) و ع = ت (س)

فـــإنه :

$$ص' = د(ع) . ت'(س) \Longleftarrow ء ص = \frac{ء ص}{ء ع} . \frac{ء ع}{ء س} . ء س$$

أي :

$$ء ص = \frac{ء ص}{ء ع} ء ع$$

فإن كانت ص دالة في ع وكانت ع دالة في س فإنه يكون أيضاً

$$ء ص = ص'(ع) \ ء ع$$

إن ما سبق يعني أن تفاضل الدالة المعرفة بالعلاقة ص = د (ع) يساوي د' (ع) . ء ع وذلك سواء أكان ع هو المتغير المستقل أو دالة في المتغير المستقل .

فلو كان مثلاً :

$$ص = (٢ س^{٢} + ٥)^{٣}$$

وفرضنا

$$ع = ٢ س^{٢} + ٥ \Longleftarrow ء ع = ٤ س . ء س$$

فـــإن :

$$ص = ع^{٣} \Longleftarrow ء ص = ٣ ع^{٢} ء ع$$

$$ء ص = ٣ (٢ س^{٢} + ٥)^{٢} \times ٤ س . ء س = ١٢ س (٢ س^{٢} + ٥)^{٢} . ء س$$

تدريب (٥ - ١) :

فك القوسين في تعريف ص واحسب ء ص مباشرة فتلاحظ حصولك على القيمة الواردة أعلاه للتفاضل ء ص .

ينتج عما تقدم أنه إذا كان :

ق (ع) دالة أصلية للدالة د (ع) باعتبار ع هو متغير هذه الدالة فإنه يكون :

$$\int د(ع) . ء ع = ق (ع) + ث$$

نذكر ما سبق بقولنا : إن قواعد التكامل غير المحدَّد لا تتغير عندما نبدل فيه المتغير .

ينتج عما سبق أنه إذا أمكن وضع التكامل $\int د(س) . ء س$ على الشكل :

$\int$ ت (ص) . صَ (س) . ء س فبإعتبار ص متغيراً جديداً، يأخذ التكامل المفروض الشكل:

$\int$ ت (ص) . ء ص.

وقد يكون حساب التكامل الأخير أسهل من حساب التكامل المفروض كما يتضح من الأمثلة التالية:

مثال (٥ – ٢):

لحساب

$$\int (٢ س + ٣)^{٥} ء س$$

يمكننا فك القوس ومكاملة كثيرة الحدود الناتجة حداً فحداً كما يمكننا أن نفرض:

ص = ٢ س + ٣ فيكون. ء ص = ٢ ء س $\Leftarrow$ ء س = $\frac{١}{٢}$ ء ص

ويأخذ التكامل المفروض الشكل:

$$\int ص^{٥} . \frac{١}{٢} ء ص = \frac{١}{٢} \int ص^{٥} ء ص = \frac{١}{٢} \frac{ص^{٦}}{٦} + ث$$

أي:

$$\int (٢س + ٣)^{٥} ء س = \frac{١}{١٢} (٢س + ٣)^{٦} + ث$$

مثال (٥ – ٣):

احسب التكامل غير المحدد:

$$ع = \int هـ^{٢س^{٣}} . س^{٢} ء س$$

الحـــل:

نفرض

$$ص = هـ^{-٢س^{٣}} \Leftarrow ء ص = -٦ س^{٢} . هـ^{-٢ س^{٣}} . ء س$$

$$\Leftarrow س^{٢} ء س = \frac{ء ص}{-٦ ص}$$

بالتعويض في التكامل المفروض نجد:

$$ع = \int ص . \frac{ء ص}{-٦ ص} = -\frac{١}{٦} \int ء ص = \frac{١}{٦} ص + ث$$

إذن :

$$\text{ع} = \int \text{هـ}^{-٢\text{س}^٣} \,.\, \text{س}^٢ \text{ىس} = -\frac{١}{٦} \text{هـ}^{٢\text{س}^٣} \,.\, + \text{ث}$$

ملاحظة (٥-١) :

يمكننا في المثال السابق أن نفرض :

$$\text{ع} = -٢\,\text{س}^٣ \text{ ، } \text{ىع} = -٦\,\text{س}^٢ \,\text{ىس} \Leftarrow \text{س}^٢ \,\text{ىس} = -\frac{١}{٦} \,\text{ىع}$$

بالتعويض في التكامل المفروض نجد :

$$\int \text{هـ}^{\text{ع}} \times -\frac{١}{٦} \,\text{ىع} = -\frac{١}{٦} \int \text{هـ}^{\text{ع}} \,.\, \text{ىع} = -\frac{١}{٦} \text{هـ}^{\text{ع}} + \text{ث}$$

أي :

$$\int \text{هـ}^{-٢\text{س}^٣} \text{س}^٢ \,\text{ىس} = -\frac{١}{٦} \text{هـ}^{-٢\text{س}^٣} + \text{ث}$$

٥-٣ جدول ببعض الدوال الأصلية:

يمكننا أن نستنتج من تعريف الدالة الأصلية والقواعد التي قد مناها في بحث المشتقة الجدول التالي الذي يحوي الدوال الأصلية لبعض الدوال البسيطة والشهيرة ، نعتبر في هذا الجدول س رمزاً للمتغير المستقل :

أما ع و ص فيرمزان لدالتين في س .

$$\int \text{ىس} = \text{س} + \text{ث}$$

$$\int \text{ىع} = \text{ع} + \text{ث}$$

$$\int \frac{\text{ىس}}{\sqrt{\text{س}}} = ٢\sqrt{\text{س}} + \text{ث} \text{ ، } \qquad \int \frac{\text{ىس}}{\text{س}} = \text{لو}\,|\text{س}| + \text{ث}$$

$$\int \frac{\text{ىع}}{\sqrt{\text{ع}}} = ٢\sqrt{\text{ع}} + \text{ث} \text{ ، } \qquad \int \frac{\text{ىع}}{\text{ع}} = \text{لو}\,|\text{ع}| + \text{ث}$$

$$\int \text{س}^{\text{ن}} \,\text{ىس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{ث} \qquad \text{ن} \in \text{ح} \text{ ، } \text{ن} \neq -١$$

$$\int \text{ب}\,\text{ع}^{\text{ن}}\,\text{دع} = \text{ب}\,\frac{\text{ع}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{ث} \qquad \text{ن} \neq -١ \text{ . ع دالة في س}$$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}} \,.\, \text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث} \qquad \int \text{هـ}^{\text{ع}} \,.\, \text{دع} = \text{هـ}^{\text{ع}} + \text{ث}$$

تمارين (٥ - ٢)

احسب كلا من التكاملات التالية :

١- $\int ٢(١+\text{س})^{٣} \,.\, \text{دس}$

٢- $\int \frac{\text{دس}}{٢\text{س} + ١١}$

٣- $\int (\text{هـ}^{٢\text{س}} - \text{هـ}^{-٢\text{س}} + ٣) \,.\, \text{دس}$

٤- $\int \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٧}{\text{س}^{-١}} \,.\, \text{دس}$

٥- $\int (\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}})^{٢} \,.\, \text{دس}$

٦- $\int \frac{\text{هـ}^{-\frac{١}{\text{س}}}}{\text{س}^{٢}} \,.\, \text{دس}$

٧- $\int \frac{\text{لو س}}{\text{س}} \,.\, \text{دس}$

٨- $\int (\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٩)^{٢}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} \,.\, \text{دس}$

٩- $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١} \,.\, \text{دس}$

١٠- $\int \text{س}\sqrt{٢\text{س}^{٢} + ١١} \,.\, \text{دس}$

١١- $\int \frac{٢\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ١)^{٣}} \,.\, \text{دس}$

١٢- $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١} \,.\, \text{دس}$

١٣- $\int \frac{١}{٢ - \text{س}} \,.\, \text{دس}$

١٤- $\int \frac{٢\text{س}^{٢}}{\sqrt{\text{س}^{٣} + ١٣}} \,.\, \text{دس}$

١٥- $\int \frac{٣\text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٣} + ٧)^{٥}} \,.\, \text{دس}$

١٦- $\int \text{س}(٣ - \text{س}^{٢})^{١١} \,.\, \text{دس}$

٥ - ٤ التكامل المحدد والمساحة تحت منحنى الدالة

تعريف (٥ - ٢)

إذا كانت الدالة د(س) معرفة على الفترة [أ ، ب] ولها الدالة الأصلية ق(س) فنسمي الفرق ق(ب) - ق (أ) بالتكامل المحدد للدالة د (س) من أ إلى ب ونرمز له بالرمز :

$\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس .

أي $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس = ق(ب) - ق(أ) .

لاحظ من التعريف أن التكامل المحدد هو قيمة عددية معينة تساوي ق (ب) - ق(أ) ولا يحوي أي متغير س ولا ثوابت اختيارية كما هو الحال في التكامل غير المحدد .

مثال (٥ - ٤) :

احسب $\int_{٢}^{٥}$ (س + ٤) ءس

الحل :

نعلم أن د(س) = س + ٤ لها الدالة الأصلية ق(س) = $\frac{س^{٢}}{٢}$ + ٤ س لذلك من التعريف فإن :

$\int_{٢}^{٥}$ (س + ٤) ءس = ق(٥) - ق(٢) = ($\frac{٢٥}{٢}$ + ٢٠) - (٢ + ٨) = $\frac{٤٥}{٢}$.

هناك علاقة وثيقة بين التكامل المحدّد والمساحات، ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال التالي :

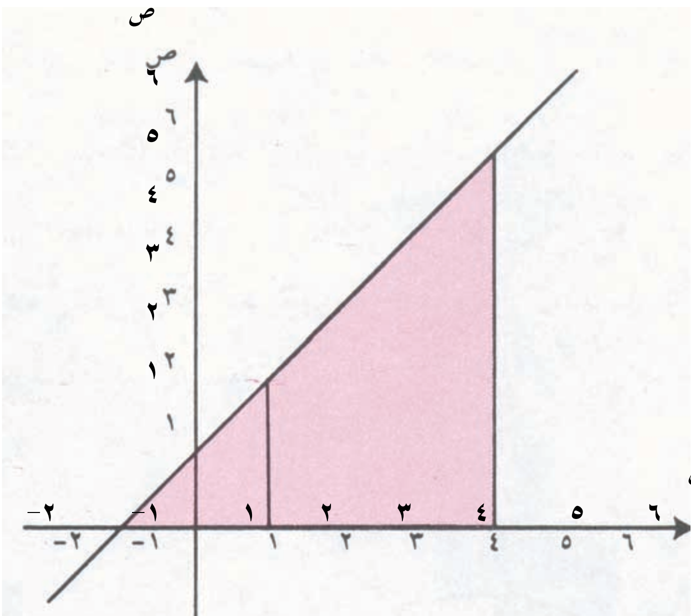
مثال (٥-٥) :

ارسم دالة الخط المستقيم د(س) = س + ١ ثم احسب مساحة المنطقة المحيطة بهذا المستقيم ومحور السينات والمستقيمين الرأسيين س = ١ ، س = ٤ وقارن الناتج مع ناتج $\int_{١}^{٤}$ د(س) ءس.

الحـــل :

نرسم الدالة كما في الشكل (٥-١) فنلاحظ أن المنطقة المطلوب حساب مساحتها (المظللة بالشكل) عبارة عن شبه منحرف طولا قاعدتيه د(٤) = ٥ ، د(١) = ٢ على التوالي أما ارتفاعه فهو ٤ - ١ = ٣ لذلك فمساحته هي :

$$\frac{(٥ + ٢)}{٢} \times ٣ = \frac{٢١}{٢}$$



الشكل (٥-١)

وبالمقابل فإن د(س) لها الدالة الأصلية ٯ(س) = $\frac{س^{٢}}{٢}$ + س لذلك فإن :

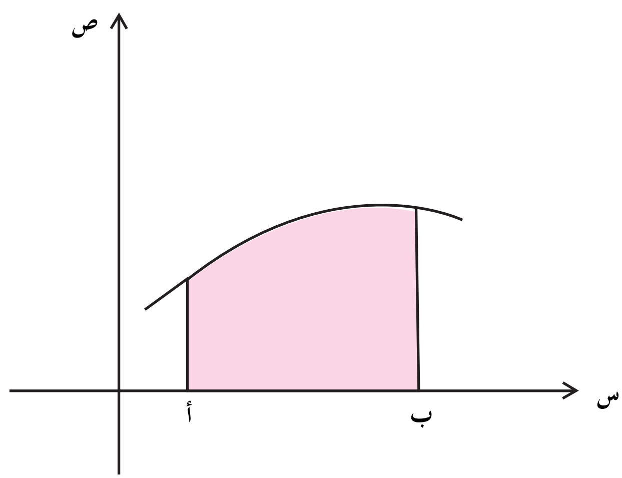
$$\int_{١}^{٤} د(س)\, ءس = ٯ(٤) - ٯ(١) = (٨ + ٤) - (\frac{١}{٢} + ١) = \frac{٢١}{٢}$$

وبمقارنة الناتجين نجد أنهما متساويان أي أن $\int_{1}^{4}$ د(س) ءس هو مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى الدالة د(س) وأعلى محور السينات ومحدودة من اليسار واليمين بالمستقيمين الرأسيين س = ١ ، س = ٤ .

في الواقع يمكن تعميم فكرة المثال السابق في النظرية التالية :

نظرية (المساحة تحت منحنى الدالة):

لتكن د(س) معرفة على الفترة [أ ، ب] وغير سالبة ولتكن ق (س) دالة أصلية للدالة د(س) عندئذٍ فإن مساحة المنطقة المحددة من أعلى بمنحنى هذه الدالة ومن أسفل بمحور السينات ومن اليمين بالمستقيم س = ب ومن اليسار بالمستقيم س = أ كما في الشكل (٥ - ٢) هذه المساحة تساوي التكامل المحدد $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس أي العدد ق (ب) - ق (أ) .



الشكل (٥-٢)

ملحوظات :

(١) عادة للاختصار فبدلاً من كتابة الدالة الأصلية ق (س) مقدماً قبل حساب التكامل المحدد نكتبها ضمن عملية حساب التكامل على الصورة :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \left[\text{ق}(\text{س})\right]_{\text{أ}}^{\text{ب}} = \text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(\text{أ})$$

فمثلاً $\int_{٣}^{٥} \text{س}\,\text{ءس} = \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢}\right]_{٣}^{٥} = \frac{٢٥}{٢} - \frac{٩}{٢} = ٨$

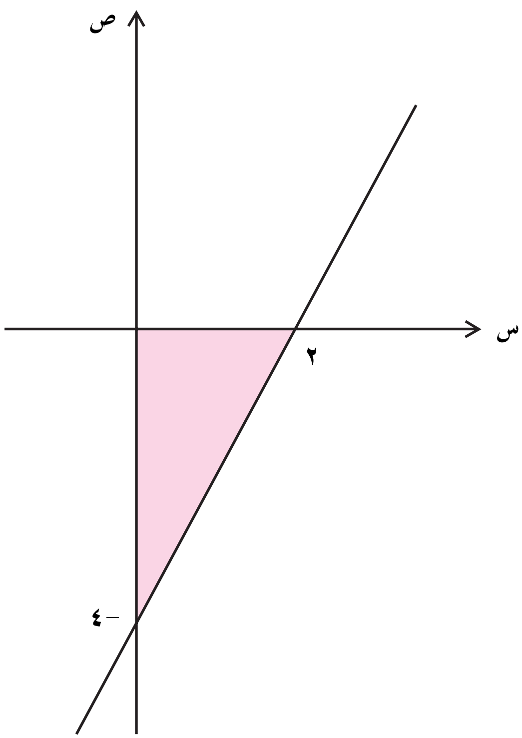
(٢) يمكن تطبيق النظرية حتى في الحالة التي يكون فيها د (س) سالبة على الفترة [أ، ب] مع مراعاة أن المساحة في هذه الحالة هي $-\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$ أي ق(أ) − ق(ب) .

مثال (٥ − ٦) :

ارسم الدالة د (س) = ٢ س − ٤ ثم أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين محور السينات ومنحنى هذه الدالة ومحور الصادات ثم تحقق من أنها تساوي $-\int_{٠}^{٢} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$.

الحـــل :

إن الدالة د (س) = ٢ س − ٤ تمثل مستقيماً يقطع محور السينات في النقطة (٢ ، ٠) ومحور الصادات في النقطة (٠ ، −٤) كما في الشكل (٥ − ٣) والمنطقة المطلوب حساب مساحتها هي المظللة في الشكل أي مساحة مثلث قائم طول قاعدته ٤ وارتفاعه ٢ فتكون المساحة المطلوبة هي $\frac{١}{٢} \times ٤ \times ٢ = ٤$ وحدة مساحة وفي المقابل لدينا :



الشكل (٥ − ٣)

$$-\int_{٠}^{٢} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = -\int_{٠}^{٢} (٢\,\text{س} - ٤)\,\text{ءس}$$

$$= -\left[\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س}\right]_{٠}^{٢} = (-٤ - ٠)$$

= ٤ = المساحة المطلوبة .

خواص التكامل :

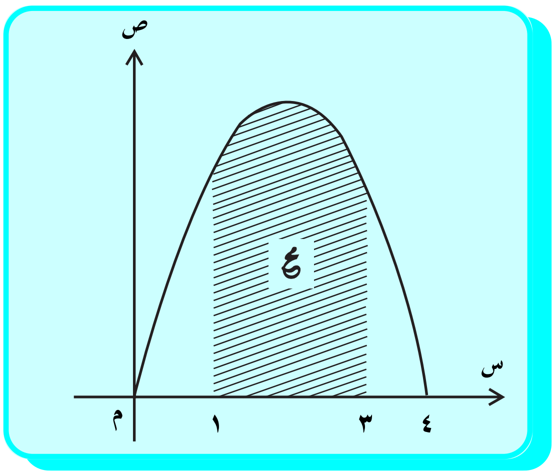
نستنتج من خواص التكامل غير المحدَّد الخواص التالية للتكامل المحدد :

١- $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د}(\text{س}) + \text{ت}(\text{س})] \, \text{ء س} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س}) \, \text{ء س} + \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ت}(\text{س}) \, \text{ء س}$

٢- $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د}(\text{س}) - \text{ت}(\text{س})] \, \text{ء س} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س}) \, \text{ء س} - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ت}(\text{س}) \, \text{ء س}$

٣- $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{حـ} \cdot \text{د}(\text{س}) \, \text{ء س} = \text{حـ} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س}) \, \text{ء س}$

حيث حـ عدد ثابت .



الشكل (٥ - ٤)

أمثلة (٥-٧) :

(١) احسب مساحة المنطقة المحدودة بالمنحني $\text{ص} = ٤\,\text{س} - \text{س}^{٢}$ **ومحور السينات والمستقيمين** $\text{س} = ١$ ، $\text{س} = ٣$.

الحـــل :

المنطقة التي يطلب حساب مساحتها ظاهرة في الشكل (٣-٦) وقد رمزنا لهذه المساحة بـ ع .

$$\text{ع} = \int_{١}^{٣} (٤\,\text{س} - \text{س}^{٢}) \, \text{ء س}$$

$$\text{ع} = \left[\frac{٤\,\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣}\right]_{١}^{٣} = \left(\frac{٤ \times ٩}{٢} - \frac{٢٧}{٣}\right) - \left(\frac{٤ \times ١}{٢} - \frac{١}{٣}\right)$$

$$\text{ع} = ١٨ - ٩ - ٢ + \frac{١}{٣} = ٧\frac{١}{٣} \text{ وحدة مساحة}$$

(٢) احسب التكامل :

$$\int_{١}^{٤} \frac{١}{\text{س}} \, \text{ء س}$$

الحـــل :

باستخدام الفقرة (٥) من النتائج (٥-١) نجد :

$$\int_{١}^{٤} \frac{١}{س} \, ء س = \left[لو \, س \right]_{١}^{٤} = لو \, ٤ - لو \, ١ = لو \, ٤ - ٠ = لو \, ٤$$

(٣) احسب التكامل

$$م = \int_{٠}^{٢} س^{٢} \sqrt{س^{٣} + ١} \, . \, ء س$$

الحـــل :

نحسب أولاً التكامل غير المحدَّد :

$$\int س^{٢} \sqrt{س^{٣} + ١} \, . \, ء س$$

وذلك بطريقة تبديل المتغير . لنفرض :

$$ع = \sqrt{س^{٣} + ١} \Leftarrow ء ع = \frac{٣ س^{٢}}{٢ \sqrt{س^{٣} + ١}} \, ء س$$

$$\Leftarrow ء ع = \frac{٣}{٢ ع} \, . \, س^{٢} . \, ء س \Leftarrow س^{٢} . \, ء س = \frac{٢}{٣} ع \, . \, ء ع$$

أي :

$$\int س^{٢} \sqrt{س^{٣} + ١} \, . \, ء س = \int \frac{٢}{٣} ع^{٢} \, . \, ء ع = \frac{٢}{٩} ع^{٣} + ث$$

$$= \frac{٢}{٩} (س^{٣} + ١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$$

$$م = \int_{٠}^{٢} س^{٢} \sqrt{س^{٣} + ١} \, . \, ء س = \left[\frac{٢}{٩} (س^{٣} + ١)^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{٢} = \frac{٢}{٩} \times ٢٧ - \frac{٢}{٩} \times ١ = \frac{٥٢}{٩}$$

تمارين (٥-٤)

احسب ما يلي :

١- $\int_{-١}^{٥} ٢ س^{٣} \, . \, ء س$.

٢ - $\int_{٣}^{١١} ٥ س^{-\frac{١}{٢}} \, ء س$.

٣- $\int_{-١}^{٢} (س - س^{٣}) \, . ء س$ (ج : $-٢ \frac{١}{٤}$)

٤- $\int_{٢}^{٤} (س + ٢ س^{٢}) \, . ء س$

٥ - $\int_{-١}^{١} (س^{٢} - ١) \, . \, ء س$ (ج : $-١ \frac{١}{٣}$)

٦ - $\int_{-١}^{٤} س^{٤} \, . \, ء س$ (ج : ٢٠٥)

٧- $\int_{\frac{١}{٢}}^{٢} \frac{١}{\text{س}^{٢}} \, \text{ءس}$ (ج : $\frac{٣}{٢}$).

٨ - $\int_{١}^{٧} \sqrt{٢\text{س} + ٢} \, \text{ءس}$ (ج: $\frac{٥٦}{٣}$).

٩- $\int_{٠}^{\sqrt{٢}} \frac{\text{س}}{١ + \text{س}^{٢}} \, \text{ءس}$ (ج : $\frac{١}{٢}$ لو ٩).

١٠- $\int_{٠}^{٢} \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{ءس}$ (ج: $\text{هـ}^{٢} - ١$).

١١- $\int_{١}^{٣} \frac{\text{ءس}}{\text{س}^{٢}}$ (ج: $\frac{٢}{٣}$).

١٢ - $\int_{٠}^{٤} \text{س} \sqrt{\text{س}^{٢} + ٤} \, \text{ءس}$ (ج: $\frac{٢٠^{\frac{٢}{٣}} - ٨}{٣}$).

١٣- $\int_{٠}^{٢} \text{س}^{٢} \sqrt{\text{س}^{٣} + ١} \, \text{ءس}$، (ج: $\frac{٥٢}{٩}$).

١٤ - $\int_{-١}^{٢} \text{س} (١ + \text{س}^{٣}) \, \text{ءس}$ (ج: $\frac{٨١}{١٠}$).

١٥ - $\int_{٤}^{٩} ٢\text{ع} \sqrt{\text{ع}} \, \text{ءع}$ (ج: $\frac{٨٤٤}{٥}$).

١٦ - $\int_{٠}^{١} \frac{\text{ءع}}{\sqrt{٣\text{ع} + ١}}$ (ج: $\frac{٢}{٣}$)

١٧ - $\int_{-١}^{١} \frac{\text{س}^{٢} \, \text{ءس}}{\sqrt{\text{س}^{٣} + ٩}}$ (ج: $\frac{٢}{٣}(\sqrt{١٠} - ٢\sqrt{٢})$)

١٨ - $\int_{-١}^{٨} (\text{ع} - \frac{١}{٣} + ٢\text{ع}^{٣}) \, \text{ءع}$ (ج: ٢٠٧٦)

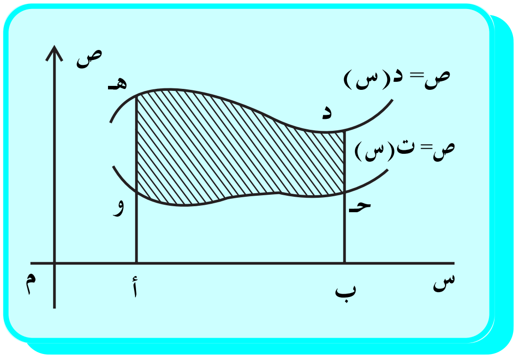
٥ - ٥ تطبيقات التكامل:

لقد استخدمنا في [٣ - ٥] التكامل من أجل حساب مساحة منطقة محدودة بمنحنٍ وبمحور السينات وبمستقيمين موازيين لمحور الصادات. وللتكامل تطبيقات كثيرة وهو يساعد في حل العديد من المسائل المعقدة. سنكتفي هنا بذكر بعض من تطبيقاته السهلة.

حساب مساحة منطقة محدودة بالخطين البيانيين لدالتين.

لنفرض أن الدالتين د ، ت غير سالبتين على الفترة [٢ ، ب] وأنَّه على هذه الفترة،

د (س) $\geqslant$ ت (س) . لحساب مساحة المنطقة المحصورة بين الخطين البيانيين لهاتين الدالتين والمستقيمين س = أ ، س = ب وهي المخططة على الشكل (٥ – ٥) فإننا نلاحظ ما يلي :



شكل (٥ – ٥)

$$\text{مساحة أ ب ى هـ} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)} \cdot \text{ى س}$$

$$\text{مساحة أ ب حـ و} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ت(س)} \cdot \text{ى س}$$

$$\text{مساحة و حـ ى هـ} = \text{مساحة أ ب ى هـ} - \text{مساحة أ ب حـ و}$$

أي مساحة و حـ ى هـ

$$= \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)} \cdot \text{ى س} - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ت (س)} \cdot \text{ى س}$$

$$= \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د (س)} - \text{ت (س)}] \cdot \text{ى س}$$

إذا رمزنا لمساحة المنطقة و حـ ى هـ بالرمز ع فإن :

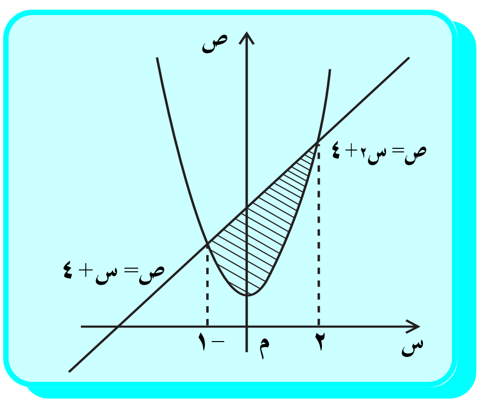
$$\text{ع} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\ \text{د(س)} - \text{ت (س)}\ ] \cdot \text{ى س} \qquad (٥ - ٨)$$

مثال (٥ – ٨)

احسب مساحة المنطقة المخططة في الشكل (٥ – ٦) والمصورة بين المنحنى ص = س^{٢} + ٢ والمستقيم ص = س + ٤ .

الحـل :

يتقاطع المنحني ص = س^{٢} + ٢ والمستقيم ص= س + ٤ في النقطتين (–١ ، ٣) ، (٢ ، ٦) بتطبيق القانون (٥–٨) نجد :



شكل (٥ – ٦)

$$\text{ع} = \int_{-١}^{٢} [\ (\text{س} + ٤) - (\text{س}^{٢} + ٢)\ ] \cdot \text{ى س}$$

$$= \int_{-١}^{٢} (\ -\text{س}^{٢} + \text{س} + ٢)\ \text{ى س}$$

$$\text{ع} = \left[\ \frac{-\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٢\text{س}\right]_{-١}^{٢}$$

$$= \left(\frac{-٨}{٣} + \frac{٤}{٢} + ٤\right) - \left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} - ٢\right) = \frac{٩}{٢}$$

وحدة مربعة.

مثال (٥ – ٩)

احسب مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنيات ص = ١ – س٢، س = ٠ ، س =٢ ، ص = ٠ المخططة في الشكل (٥ – ٧) .

الحل :

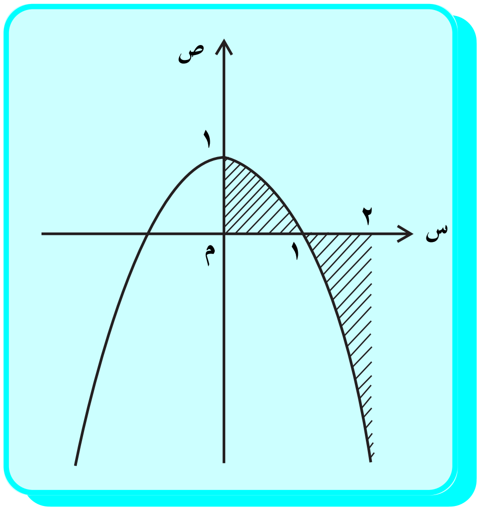
استناداً إلى ما قدمناه سابقاً نجد :

$$\text{م} = \int_{0}^{1} (1 - \text{س}^2)\, \text{ءس} - \int_{1}^{2} (1 - \text{س}^2)\, \text{ءس}$$

$$= \left[\text{س} - \frac{\text{س}^3}{3}\right]_{0}^{1} - \left[\text{س} - \frac{\text{س}^3}{3}\right]_{1}^{2}$$

$$\text{م} = \left[1 - \frac{1}{3}\right] - \left[\left(2 - \frac{8}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right]$$

= ٢ وحدة مربعة.



شكل (٥ – ٧)

٥ - ٦ تغير قيمة دالة

لقد رأينا أنه إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] وكانت ق دالة أصلية للدالة د فإن :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)} \,.\, \text{ءس} = \text{ق(ب)} - \text{ق(أ)}$$

يمكن كتابة العلاقة السابقة بالشكل :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{قَ(س)} \,.\, \text{ءس} = \text{ق(ب)} - \text{ق(أ)}$$

نسمي المقدار ق(ب) – ق(أ) تغيُّر الدالة ق عندما يتحول المتغَّير س من القيمة أ إلى القيمة ب

نذكر ما سبق بقولنا :

إذا كان المعدل الآني دَ (س) لتغيُّر دالة د. دالة متصلة على الفترة [أ ، ب] فإن التكامل :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{دَ(س)} \,.\, \text{ءس}$$

هو تغيُّر الدالة د عندما يتحول المتغيِّر س من القيمة أ إلى القيمة ب .

مثال (٥ - ١٠)

وجد مصنع لصناعة أجهزة (الراديو) أن المعدَّل الآني للربح يُعطي بالمعادلة:

$ر َ(س) = ٣ س^٢ - ٢ س$

وأن كل جهاز يُصنع يباع فوراً وأن الربح يكون مساوياً الصفر إذا لم يبع المصنع أي جهاز (الربح مقدر بالريال وس تمثل هذه الأجهزة التي أنتجها المصنع).

١- احسب ربح المصنع عندما يصل مستوى إنتاجه إلى ٢٠ جهازاً.

٢- احسب تغير ربحه عندما يتغير إنتاجه من ٣٠ إلى ٦٠ جهازاً.

الحـــل:

١- عندما يتغير إنتاج المصنع من الصفر إلى ٢٠ جهازاً فإن تغير ربحه هو:

$$\int_{٠}^{٢٠} ر َ(س) . ء س = \int_{٠}^{٢٠} (٣س^٢ - ٢س) . ء س$$

$$ر(٢٠) - ر(٠) = [س^٣ - س^٢]_{٠}^{٢٠} = ٢٠^٣ - ٢٠^٢ = ٨٠٠٠ - ٤٠٠ = ٧٦٠٠ \text{ ريال}.$$

٢- إذا تغير إنتاج المصنع من ٣٠ إلى ٦٠ جهازاً فإن تغير ربحه:

$$ر(٦٠) - ر(٣٠) = \int_{٣٠}^{٦٠} (٣ س^٢ - ٢ س) ء س$$

$$= [س^٣ - س^٢]_{٣٠}^{٦٠} = (٦٠^٣ - ٦٠^٢) - (٣٠^٣ - ٣٠^٢)$$

$$= ٢١٢٤٠٠ - ٢٦١٠٠ = ١٨٦٣٠٠ \text{ ريال}$$

مثال (٥-١١):

وجد معمل يصنع أجهزة هاتف أن المعدّل الآني للتكلفة والمعدّل الآني للدخل يعطيان بالمعادلتين:

$ت َ(س) = ٦٠٠ - ٠,٤ س$

$د َ(س) = ٢٠٠ + ٠,٢ س$

حيث س يمثّل عدد الأجهزة التي يصنعها المعمل في اليوم، نفرض أن كل جهاز يُصنع يباع فوراً وأن التكلفة والدخل مقدّران بالريال.

١- أوجد تغير التكلفة عندما يتغير مستوى الإنتاج اليومي من ٥٠ إلى ٨٠ جهازاً.

٢- أوجد تغير الدخل عندما يتغير مستوى الإنتاج اليومي من ٥٠ إلى ٨٠ جهازاً.

٣- أوجد التغير في الربح عندما يتغير مستوى الإنتاج اليومي من ٥٠ إلى ٨٠ جهازاً.

الحـــل :

١- تغير التكلفة :

ت (٨٠) − ت (٥٠) = ∫ من ٥٠ إلى ٨٠ (٦٠٠ − ٠,٤ س) ء س

= [٦٠٠ س − ٠,٢ س٢] من ٥٠ إلى ٨٠

= (٦٠٠ × ٨٠ − ٠,٢ × ٨٠٢) − (٦٠٠ × ٥٠ − ٠,٢ × ٥٠٢)

ت (٨٠) − ت (٥٠) = (٤٨٠٠٠ − ١٢٨٠) − (٣٠٠٠٠ − ٥٠٠) = ١٧٢٢٠ ريالاً.

٢- تغير الدخل :

د (٨٠) − د (٥٠) = ∫ من ٥٠ إلى ٨٠ (٢٠٠ + ٠,٢ س) ء س = [٢٠٠ س + س٢ / ١٠] من ٥٠ إلى ٨٠

= ١٦٦٤٠ − ١٠٢٥٠ = ٦٣٩٠ ريال.

٣- تغيير الربح :

ر (٨٠) − ر (٥٠) = ∫ من ٥٠ إلى ٨٠ [(٢٠٠ + ٠,٢ س) − (٦٠٠ − ٠,٤ س)] ء س

= ∫ من ٥٠ إلى ٨٠ (٠,٦ س − ٤٠٠) ء س = [٠,٣ س٢ − ٤٠٠ س] من ٥٠ إلى ٨٠ = − ١٠٨٣٠ ريالاً.

أي أن الربح يتناقص بمقدار ١٠٨٣٠ ريالاً عندما يزداد الإنتاج من ٥٠ إلى ٨٠ جهازاً في اليوم.

مثال : (٥-١٢) :

قذفت كرة إلى الأعلى من نقطة واقعة على ارتفاع ٨ أمتار عن سطح الأرض فإلى أي ارتفاع عن سطح الأرض تصل هذه الكرة إذا علمت أن سرعتها الابتدائية هي ٤٩ م/ ث وأن تسارع هذه الحركة ثابت ويساوي ٩,٨م/ ث٢.

الحـــل :

إذا رمز بالحرف ت للتسارع وبـ (ع) للسرعة فإن :

ع = ∫ − ت . ء ن

حيث $ن$ يمثل الزمن اعتباراً من بدء الحركة وهو مقدَّر بالثانية.

بإجراء التكامل نجد:

$ع = -ت ن + ث$

ولكن ث هو قيمة السرعة عندما $ن = ٠$. فإن رمزنا للسرعة الابتدائية بالرمز $ع_٠$ فإنه يكون:

$ع = -ت ن + ع_٠ = -٩,٨ن + ٤٩$

أما ارتفاع الكرة فإنه يعطى بالتكامل

$ف = \int ع \, ءن = \int (-ت ن + ع_٠) \cdot ءن$

$ف = -\frac{١}{٢} ت ن^٢ + ع_٠ . ن + ث .$

إن الثابت ث هو بعد الكرة من بدء الحركة ($ن = ٠$) عن الأرض فإذا رمزنا لهذا البعد بالرمز ف. فإننا نجد:

$ف = -\frac{١}{٢} ت ن^٢ + ع_٠ . ن + ف .$

تتوقف الكرة عن الارتفاع عندما تصبح سرعتها صفراً أي:

$-٩,٨ ن + ٤٩ = ٠ \Longleftrightarrow ن = \frac{٤٩}{٩,٨} = ٥$ ثانية

ويكون عندئذٍ ارتفاع الكرة:

$ف = -\frac{١}{٢} \times ٩,٨ \times ٥^٢ + ٤٩ \times ٥ + ٨ = ١٣٠,٥$م

تمارين (٥ - ٥)

في كل من التمارين (١ - ٩) احسب مساحة المنطقة الواقعة بين الخطوط البيانية للمعادلات المعطاة:

١- $ص = س^٢ - س ، ص = س + ٣ ، س = -٢ ، س = ٣$ (ج: ١٣)

٢- $ص = \frac{١}{س} ، ص = س ، س = هـ$ (ج: $\frac{١}{٢} هـ^٢ - \frac{٣}{٢}$)

حيث هـ أساس اللوغاريتم الطبيعي

٣ - $ص = ٢ س^٢ ، ص = ٢ س$ (ج: $\frac{١}{٣}$)

٤ - $ص = س^٢ + ١ ، ص^٥ = س + ٣$ (ج: $\frac{٩}{٢}$)

٥ – ص = ٨ – س^{٢} ، ص = س^{٢}

٦– ص = هـ^{س}، ص = ٥ ، س = –٢ ، س = ١ (ج: ١٥– هـ + هـ^{٢})

٧– ص = ٢ – ٢ س^{٢} ، ص = ٩ – ٩ س^{٢} (ج: $\frac{٢٨}{٣}$)

٨– ص = س^{٢} + ٢ ، ص = ٢ س + ٢ (ج: $\frac{٤}{٣}$)

٩– أخذ مريض دواءً يؤثر في مستوى حرارته فإذا علمت أن معدل تغير حرارة هذا المريض يعطي بالعلاقة.

رَ (ن) = ٠,٠٦ ن^{٢} + ٠,٠٢ن

حيث ن عدد الساعات التي مرت بعد أخذ الدواء فأوجد تغير حرارة المريض خلال الفترة التي تبدأ ببدء الساعة الثالثة (ن = ٢) وتنتهي ببدء الساعة السادسة (ن = ٥).

١٠– تتحرك نقطة على مستقيم بسرعة مقدرة بالعلاقة:

ع = ٤ $\sqrt{\text{ن}}$

حيث ن مقدرة بالثانية و ع بالمتر في الثانية.

ما هي المسافة التي قطعتها النقطة خلال ٦٤ ثانية من بدء الحركة (ن = ٠)؟

ما هي المسافة التي قطعتها النقطة من بدء الثانية الرابعة إلى بدء الثانية التاسعة؟

١١– إذا كان معدل ربح بيع س أداة تسخين يعطى بالعلاقة:

رَ(س) = ١٠٠ – ٠,٠٢ س

حيث رَ(س) مقدر بالريال

أوجد دالة الربح ر(س) والربح الناتج عن بيع أداة واحدة.

الخـــلاصة

لقد عرفنا في هذا الباب الدالة الأصلية لدالة معينة د على أنها دالة ت مشتقتها الدالة د

أي: $\frac{\text{ء ت (س)}}{\text{ء س}}$ = د (س) $\Longleftrightarrow$ ∫ د(س). ء س = ت (س) + ث

وقدمنا الخواص المختلفة للدالة الأصلية.

درسنا طريقة واحدة من طرائق حساب التكامل وهي طريقة التكامل بالتعويض والتي نذكرها كما يلي:

$$\int \text{ت (ص) صَ (س) . ءس} = \int \text{ت (ص) . ءص} = \text{د(ص)} + \text{ث}$$

حيث د (ص) دالة أصلية للدالة ت (ص) التي متغيرها ص.

أعطينا بعد ذلك النظرية الأساسية في حساب التكامل التي تربط بين قيمة تكامل دالة وقيمتي دالته الأصلية عند طرفي فترة التكامل:

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د (س) . ءس} = \text{ك (ب)} - \text{ك (أ)}$$

حيث ك دالة أصلية للدالة د وهي دالة أصلية اختيارية.

بعد كل ما تقدم أعطينا تطبيقات مختلفة للتكامل غير المحدّد في المجالات الهندسية والحركية والفيزيائية وغير ذلك من المجالات.

تمـارين عـامـة

احسب الدوال الأصلية لكل من الدوال التالية المعرفة بقاعدتها في التمارين (١ – ١٠)

١ – $ص = ٩ س^{٣}$

٢ – $ص = \frac{٣}{٢} س$

٣ – $ص = \frac{٦}{٥} س^{٢}$

٤ – $ص = \frac{٤}{س^{٣}}$

٥ – $ص = ٤ س^{٣} - ١١ س^{٢}$

٦ – $ص = ٣ س^{٢} - ٢س + ٣$

٧ – $ص = (س^{٢} + ٢)(س^{٢} - ٣)$

٨ – $ص = س^{٣} + \frac{٣}{س^{٣}}$

٩ – $ص = \frac{س^{٢} - ٣ س + ١}{\sqrt{س}}$

١٠ – $ص = (س + ٣)^{٥}$

احسب في التمارين (١١ – ١٨) التكامل غير المحدد :

١١ – $\int \frac{٢ س}{\sqrt{١ - س^{٢}}} \, ى س$

١٢ – $\int \frac{س^{٢} \, ى س}{\sqrt{س^{٣} + ٥}}$

١٣ – $\int \sqrt[٣]{س^{٢} + ١} \, . \, س \, . \, ى س$

١٤ – $\int \frac{ى س}{(٢س + ١)^{٢}}$

١٥ – $\int \sqrt{٨ - ٦ س} \, . \, ى س$

١٦ – $\int \frac{ى س}{\sqrt{٥ س - ١}}$

١٧ – $\int \frac{٣ (س - ١) \, ى س}{\sqrt{س^{٢} - ٢ س + ٣}}$

١٨ – $\int \frac{س \, . \, ى س}{\sqrt{٢٥ - س^{٢}}}$

في التمارين (١٩ – ٢٨) احسب التكامل :

١٩ – $\int_{-٢}^{٤} \frac{٣}{٢} س^{٢} \, ى س$

٢٠ – $\int_{-١}^{٣} (٢س - ٣) \, ى س$

٢١ – $\int_{-١}^{٢} (٣ س^{٢} + ٢س) \, . \, ى س$

٢٢ – $\int_{-٣}^{-١} (س^{٢} + ٤س - ١١) \, . \, ى س$

٢٣ – $\int_{٠}^{٤} (٤س^{٣} - ١١ س^{٢} + ٣س) \, . \, ى س$

٢٤ – $\int_{-١}^{٣} (٣س^{٢} - ٢س + ١١) \, . \, ى س$

٢٥ – $\int_{٠}^{٦} (س + ٢)(٣س + ٢) \, . \, ى س$

٢٦ – $\int_{-٢}^{٠} (٢س - ٣)(٣ س + ١) \, ى س$

٢٧- $\int_{٠}^{٢} \frac{٢\,س + ١}{\sqrt{س^{٢} + س + ١}}\ ءس$ ‏ ‏ ‏ ‏ ٢٨- $\int_{٢}^{٣} \sqrt{٢\,س - ٣}\ ءس$

في كل من التمارين (٢٩ – ٣٦) احسب مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنيات الواردة فيه :

٢٩ – $ص = س^{٢}$ ، $ص = ٠$ ، $س = ٠$ ، $س = ٣$. ‏ ‏ ‏ (ج : ٩)

٣٠- $ص = س^{٣} - ٦\,س^{٢} + ٨\,س$ ، $ص = ٠$. ‏ ‏ ‏ (ج : ٨)

٣١ – $ص = ٨ - س^{٢}$ ، $ص = س^{٢}$ ، $س = ٠$ ، $س = ١$ ‏ ‏ ‏ (ج : $٧\frac{١}{٣}$)

٣٢ – $ص = ٤ - س^{٢}$ ، $ص = -٣\,س$ ‏ ‏ ‏ (ج : $٢٠\frac{٥}{٦}$)

٣٣ – $ص = ٢\,س + ٣$ ، $س = -١$ ، $س = ٣$ ‏ ‏ ‏ (ج : ١٨)

٣٤ – $ص = ٣\,س^{٢}$ ، $س = ٢$ ، $س = ٦$ ‏ ‏ ‏ (ج : ٨)

٣٥ – $ص = -س^{٣}$ ، $س = -٤$ ، $س = ٢$ ‏ ‏ ‏ (ج : ٦٨)

٣٦ – $ص = ٢ - س^{٢}$ ، $ص = -س$ ‏ ‏ ‏ (ج : $\frac{٩}{٢}$)

٣٧ – أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين :

$ص = س^{٢}$ ، $س = ٤$

إذا علمت أن المستقيم $ص = أ$ يقسم المنطقة المـــذكورة إلى منطقتين متساويتين في المساحة ، فعين قيـمة العدد أ ‏ ‏ ‏ (ج : $أ = \sqrt[٣]{١٦}$)

في كل التمارين التاليـة أوجد دالة المسافة لحركة نقطة على مستقيم إذا علمت أن دالة السرعة ع معطاة بدلالة الزمن ں :

٣٨ – $ع = ٢ + ٣\,ں$ ، حيث $ف = ٠$ عند $ں = ٠$

٣٩ – $ع = ں^{٢} + ٤\,ں - ٥$ ، حيث $ف = ٤$ عند $ں = ١$

٤٠ – تتحرك نقطة على مستقيم بحركة تسارعها $ت = ٦\,ں - ٤$ أوجد قانون السرعة وقانون المسافة إذا علمت أن سرعتها بعد ٣ ثوان من بدء الحركة تساوي ٢١ متراً / ثانية وأن مسافتها عن موضعها في بدء الحركة تساوي ٢٧ متراً.

٤١ - يقدر المعدّل الآني لإنتاج منجمٍ للذهب بالعلاقة :

$$د'(س) = ٤٠ - ٤ س \qquad ١٠ \geqslant س \geqslant ٠$$

حيث س مقدر بالسنين والإنتاج مقدر بآلاف الأونصات. إذا كان د (س) هو الكمية الكلية لإنتاج المنجم خلال س سنة اعتباراً من بدء العمل في هذا المنجم فما هي كمية الذهب المنتجة خلال سنتين من بدء عمل المنجم وما هي كمية الذهب المنتجة خلال السنتين التاليتين.

الباب السادس

مبادئ الاحتمالات

٦-١ مقدمة

٦-٢ التجربة العشوائية

٦-٣ فراغ العينة - الحادثة

٦-٤ العمليات على الحوادث العشوائية

٦-٥ مسلمات نظرية الاحتمالات

٦-٦ الاحتمالات المشروطة

٦-٧ الاحتمالات المستقلة

- الخلاصة

- التمارين

٦ - ١ مقدمة:

تلعب الاحتمالات دوراً خاصاً في حياتنا اليومية لأننا نستخدمها في قياس عدم التأكد. فكثيراً ما نقابل عملية اتخاذ القرارات بناء على معلومات غير كاملة، فنعتمد على الاحتمالات لتساعدنا على الاختيار. فمثلاً قد نلغي رحلة خارجية رتبنا لها، وذلك لأن احتمال أن يكون الجو رديئاً احتمال كبير وكثيراً ما نتحدث عن احتمال ارتفاع درجة الحرارة في اليوم التالي، واحتمال فوز فريق كرة قدم معين على فريق آخر. وأحياناً نجد أننا نعبر عن هذه الاحتمالات بتقدير عددي، كأن نقول إن احتمال سقوط الأمطار غداً ٢٠٪، واحتمال نجاح التلميذ محمد ٩٠٪ وهكذا.

وهذه التقديرات العددية للاحتمالات لا تستند إلى أساس رياضي، ولكن قد تعتمد على أحداث وخبرات سابقة عن الطقس، وعن تتبع الحالة التعليمية للتلميذ محمد وهكذا.

ولنظرية الاحتمالات تطبيقات كثيرة وهامة في مجال التخطيط للتنمية الاجتماعية والاقتصادية والتصنيع والبحث العلمي، كما أن لها أهمية خاصة في اتخاذ القرارات في كثير من ميادين العمل اليومي.

٦ - ٢ التجربة العشوائية:

الاحتمالات أحد فروع الرياضيات الذي يهتم بدراسة نتائج التجارب أو المحاولات

العشوائية والتجربة هي أي إجراء يمكن وصفه وصفاً دقيقاً وملاحظة ما ينتج عنه، وتسمى التجربة أو المحاولة عشوائية إذا كنا نعلم مسبقاً جميع نواتجها الممكنة دون أن نتمكن من التنبوء أي هذه النواتج سيتحقق فعلاً، فمثلاً إذا ألقيت قطعة من النقود فإننا نعلم مسبقاً نواتج هذه التجربة وهي (صورة، كتابة) ولكننا لا نستطيع أن نتنبأ ما إذا كان السطح العلوي لها سيكون صورة أو كتابة. إذاً إلقاء قطعة النقود تجربة عشوائية. كذلك إذا كانت هناك حالة ولادة فإننا نعلم مسبقاً نواتج هذه التجربة وهو (ذكر، أنثى) ولكننا لا نستطيع التنبؤ عما إذا كان المولود ذكراً أو أنثى، وعليه فحالة الولادة تجربة عشوائية.

تعريف (٦ - ١):

التجربة العشوائية هي كل إجراء نعلم مسبقاً جميع النواتج الممكنة له، وإن كنا لا نستطيع أن نتنبأ أي هذه النواتج سيتحقق فعلاً.

٦ - ٣ فراغ العينة - الحادثة

يلاحظ في تجربة إلقاء قطعة النقود مرة واحدة، أن جميع النتائج الممكنة لها هي صورة أو كتابة. فإذا رمزنا للصورة بالرمز ص وللكتابة بالرمز ك فإن مجموعة النواتج لهذه التجربة هي:

ش = {ص ، ك}

أما في حالة الولادة فإن مجموعة النتائج الممكنة هي:

ش = {ولد ، بنت}

مثال (٦ - ١):

إذا ألقيت قطعتا نقود مرة واحدة فإن مجموعة النواتج الممكنة لهذه التجربة هي:

ش= {(ص، ص) ، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

وكل زوج مرتب من هذه المجموعة يمثل أحد نواتج هذه التجربة، فمثلاً الزوج

(ص، ص) يمثل ظهور الصورة عل الوجه الأعلى للقطعتين.

تسمى مجموعة النواتج الممكنة للتجربة العشوائية بفراغ العينة.

تعريف (٦ - ٢):

فراغ العينة لتجربة ما هو مجموعة جميع النواتج الممكنة لهذه التجربة.

مثال (٦ - ٢):

إذا ألقي حجر نرد (زهرة نرد) مرة واحدة، فإن فراغ العينة لهذه التجربة هو:

ش = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

وكل عنصر من هذه المجموعة يمثل أحد النواتج الممكنة لتجربة إلقاء حجر النرد.

مثال (٦ - ٣):

إذا ألقي حجرا نرد (زهرتا نرد) متمايزان مرة واحدة، فإن فراغ العينة ش هو مجموعة الأزواج المرتبة الآتية:

(١، ١)	(١، ٢)	(١، ٣)	(١، ٤)	(١، ٥)	(١، ٦)
(٢، ١)	(٢، ٢)	(٢، ٣)	(٢، ٤)	(٢، ٥)	(٢، ٦)
(٣، ١)	(٣، ٢)	(٣، ٣)	(٣، ٤)	(٣، ٥)	(٣، ٦)
(٤، ١)	(٤، ٢)	(٤، ٣)	(٤، ٤)	(٤، ٥)	(٤، ٦)
(٥، ١)	(٥، ٢)	(٥، ٣)	(٥، ٤)	(٥، ٥)	(٥، ٦)
(٦، ١)	(٦، ٢)	(٦، ٣)	(٦، ٤)	(٦، ٥)	(٦، ٦)

وكل زوج مرتب من هذه المجموعة يمثل أحد نواتج هذه التجربة. فمثلاً العنصر (٣، ٤) ظهور العدد ٣ على الزهرة الأولى والعدد ٤ على الزهرة الثانية.

يلاحظ الطالب أن التجربة العشوائية لا تتحدد تماماً إلا بتحديد فراغ العينة المرتبط

بها، وفراغ العينة قد يكون منتهياً وقد يكون غير منته، وجميع الأمثلة السابقة تمثل فراغ عينة منتهياً.

وسوف نقصر معالجتنا للاحتمالات في إطار فراغ العينة المنتهي.

أحياناً يكون اهتمامنا منصباً على بعض نتائج التجربة العشوائية، وفي هذه الحالة سوف ينحصر اهتمامنا على العناصر المناظرة لهذه النتائج. وهذه العناصر تكون مجموعة جزئية من فراغ العينة، وكل مجموعة جزئية من فراغ العينة تسمى حادثة.

تعريف (٦ – ٣):

الحادثة هي أي مجموعة جزئية من فراغ العينة، وإذا كانت هذه المجموعة الجزئية تحتوي عنصراً واحداً فقط فإنها تسمى حادثة بسيطة.

مثال (٦ – ٤):

وبالرجوع إلى المثال (٦ – ١)، وجدنا أن فراغ العينة المتعلق بتجربة إلقاء قطعتي النقود مرة واحدة هو:

ش = { (ص، ص) ، (ص، ك) ، (ك، ص) ، (ك، ك) }

نأخذ المجموعات الجزئية التالية ونعبر عنها لفظياً:

أ$_{١}$ = { (ص، ص) } حادثة بسيطة تمثل ظهور صورتين لأعلى.

أ$_{٢}$ = { (ص، ص) ، (ك، ك) } حادثة ظهور وجهين متشابهين لأعلى.

أ$_{٣}$ = { (ص، ص) ، (ك، ص) ، (ص، ك) } حادثة ظهور صورة واحدة على الأقل.

الحادثة المستحيلة : $\varnothing$

ϕ هي الحادثة المستحيلة لأنها تمثل الحالة التي لا يكون للتجربة فيها نواتج، كأن نقول مثلاً ما هي حادثة ظهور ثلاث صور عند رمي قطعتي نقود.

الحادثة المؤكدة $ش$:

$ش$ هي الحادثة المؤكدة، فمن المؤكد -مثلاً- أن يظهر وجهان إلى أعلى عند رمي قطعتي نقود، أي لابد أن يظهر أحد نواتج المجموعة $ش$.

مثال (٦ – ٥):

بالرجوع إلى المثال (٦ – ٢) وجدنا أن:

$ش$ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

ومن هذا نجد أن كلاً من المجموعات الجزئية التالية تمثل حادثة:

$أ_١$ = { ٣ } حادثة بسيطة تمثل ظهور العدد ٣ إلى أعلى.

$أ_٢$ = { ٢ ، ٤ ، ٦ } حادثة ظهور عدد زوجي.

$أ_٣$ = { ١ ، ٣ ، ٥ } حادثة ظهور عدد فردي.

$أ_٤$ = { ٥ ، ٦ } حادثة ظهور عدد أكبر من ٤ .

$ش$ حادثة مؤكدة وهي حادثة ظهور عدد على الوجه العلوي.

ϕ حادثة مستحيلة كأن نقول مثلاً حادثة ظهور العدد ٧ .

ملاحظة (٦ - ١):

نقول إن الحادثة قد وقعت إذا ظهر أحد عناصرها عند إجراء التجربة.

مثال (٦– ٦):

في مثال (٦ – ٢) اكتب كلاً من الحوادث الآتية:

$أ_١$ أن يكون مجموع النقط على وجهي الحجرين ٨ .

$أ_٢$ أن تتساوى النقط على كل من الوجهين الظاهرين.

$أ_٣$ أن يكون العدد على الحجر الأول زوجياً وعلى الثاني ٥ .

الحـــل :

$أ_1$ = {(٢، ٦) ، (٣، ٥)، (٤، ٤)، (٥، ٣) ، (٦، ٢)}

$أ_2$ = {(١، ١) ، (٢، ٢) ، (٣، ٣) ، (٤، ٤) ، (٥، ٥)، (٦، ٦)}

$أ_3$ = {(٢، ٥) ، (٤، ٥) ، (٦ ، ٥)}

مثال (٦ - ٧) :

قام عبدالرحمن برحلة من الظهران إلى جدة على ثلاث مراحل : الظهران - الرياض، الرياض، - المدينة، المدينة - جدة.

فإذا كانت وسيلة المواصلات في كل مرحلة هي إما طائرة أو سيارة، اكتب فراغ العينة لهذه الرحلة، وكذلك كل حادثة من الحوادث التالية :

$أ_1$ يركب عبدالرحمن الطائرة في جميع مراحل الرحلة.

$أ_2$ يركب السيارة في رحلة واحدة فقط.

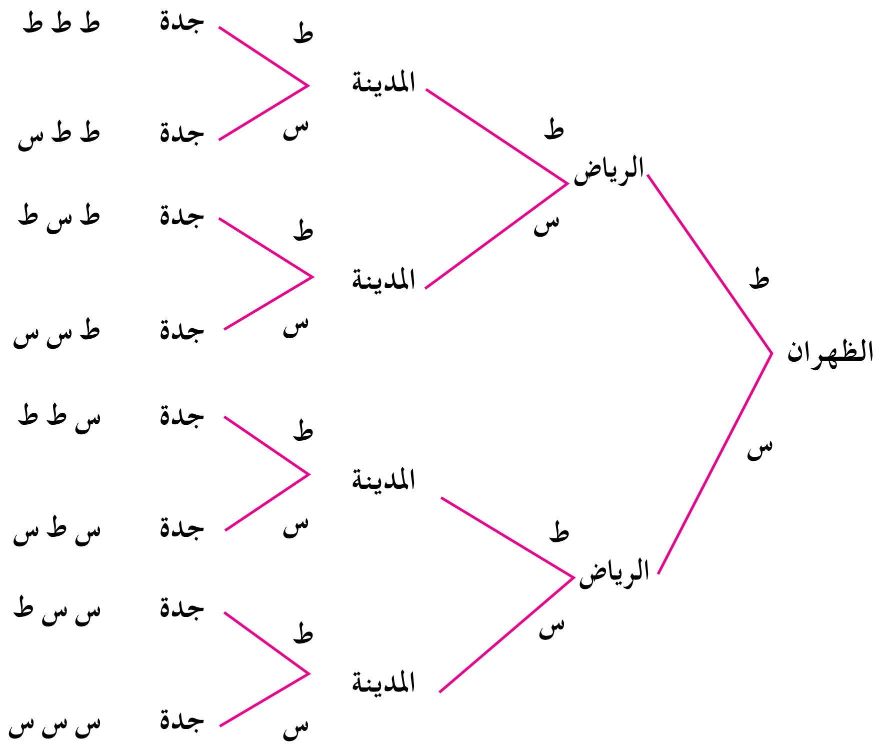
$أ_3$ يركب الطائرة في رحلة واحدة على الأقل.

الحـــل :

في كل مرحلة من مراحل الرحلة يوجد اختياران لوسيلة المواصلات هما الطائرة أو السيارة، فإذا رمزنا لفراغ العينة بالرمز ش وللطائرة بالرمز ط وللسيارة بالرمز س فإن :

ش = {(ط، ط، ط) ، (ط، ط، س)، (ط، س، ط)، (س، ط، ط)، (ط، س، س) ، (س، ط، س)، (س، س، ط) ، (س، س، س)}

ويمكن التعبير عن هذه الرحلة بما يسمى المخطط الشجري أو شجرة النواتج.



شكل رقم (١)

واضح من الرسم أن كل فرع من فروع المخطط الشجري ابتداءً من الظهران وانتهاءً بجدة يحدد ناتجاً من نواتج الرحلة الممكنة . فمثلاً الفرع الأعلى يحدد الناتج ط ط ط . أما الفرع الأدنى فيحدد الناتج س س س . وهكذا نحصل على جميع عناصر فراغ العينة وهي ثمانية يناظر كل منها فرعاً من فروع الشجرة ، وبكتابة ط س ط لتعبر عن (ط ، س ، ط) ، للاختصار فإن :

شـ = { ط ط ط ، ط ط س ، ط س ط ، س ط ط ، س س ط ، س ط س ، ط س س ، س س س }

ويكون :

أ١ = { ط ط ط }

$أ_٢$ = { ط ط س ، ط س ط ، س ط ط }

$أ_٣$ = { ط ط ط ، ط ط س ، ط س ط ، س ط ط ، ط س س ، س ط س ، س س ط }

٦ - ٤ العمليات على الحوادث العشوائية

عرفنا الحادثة على أنها مجموعة جزئية لفراغ العينة ، فإذا كان لدينا فراغ عينة يحتوي على م من العناصر ، أي أن :

شـ = { $ل_١$ ، $ل_٢$ ، $ل_٣$ ، . . . ، $ل_م$ }

فإن عدد المجموعات الجزئية لفراغ العينة شـ هو $٢^م$، ومن ثم فإن عدد الحوادث المعرفة على شـ هو $٢^م$ حادثة أيضاً ، وهناك بعض العمليات التي تجرى على الحوادث العشوائية نذكر منها ما يلي :

أولاً : إذا كانت أ حادثة في شـ ، فإن :

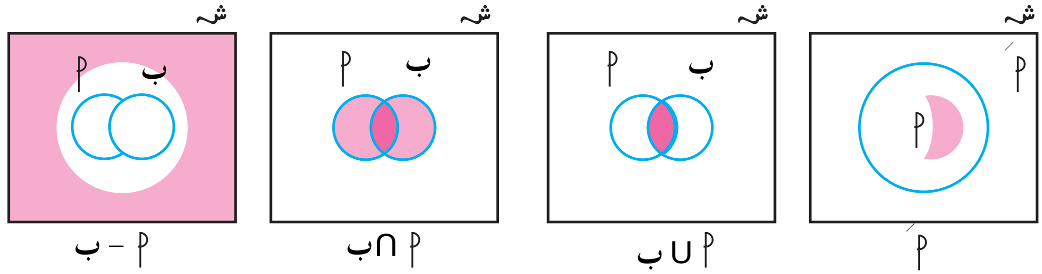
$\bar{أ}$ هي : الحادثة التي تتكون من عناصر شـ والتي لا تنتمي إلى أ وترمز إلى عدم وقوع الحادثة أ ، وتسمى متممة الحادثة أ .

ثانياً : إذا كانت أ ، ب حادثتين في شـ فإن :

١- أ $\cup$ ب هي الحادثة التي تتكون من عناصر أ أو ب أو كليهما وترمز لوقوع أ أو ب أو كليهما . أو بمعنى آخر ترمز لوقوع إحدى الحادثتين أ أو ب على الأقل .

٢- أ $\cap$ ب هي الحادثة التي تتكون من العناصر المشتركة بين أ ، ب وترمز لوقوع الحادثتين أ ، ب معاً .

٣- أ - ب = أ $\cap$ $\bar{ب}$ هي الحادثة التي تتكون من عناصر أ والتي لا تنتمي إلى ب ، وترمز لوقوع أ وعدم وقوع ب .



مما سبق نستنتج أن :

$أ \cap \phi = \phi$ ، $أ \cap ش = أ$ ، $أ \cap أ = أ$ ،

$أ \cup \phi = \phi$ ، $أ \cup ش = ش$ ، $أ \cup أ = أ$.

ثالثاً : إذا كانت هناك ن حادثة $أ_1$ ، $أ_2$ ، .... $أ_ن$ فإن :

١- $أ_1 \cup أ_2 \cup أ_3 \cup \dots \cup أ_ن$ هي الحادثة التي تتكون من عناصر واحدة على الأقل من الحوادث $أ_1$ ، $أ_2$ ، ...... ، $أ_ن$

ونرمز لوقوع حادثة واحدة على الأقل من هذه الحوادث .

٢- $أ_1 \cap أ_2 \cap أ_3 \cap \dots\dots \cap أ_ن$ هي الحادثة التي تتكون من العناصر المشتركة بين الحوادث $أ_1$ ، $أ_2$ ، ...... ، $أ_ن$ وترمز لوقوع جميع هذه الحوادث معاً .

مثال (٦ - ٨) :

إذا ألقي حجر نرد مرة واحدة فإن :

ش = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ويكون :

$أ_1$ = {٢ ، ٤ ، ٦} هي حادثة ظهور عدد زوجي .

$أ_2$ = { ١ ، ٣ ، ٥} هي حادثة ظهور عدد فردي .

$أ_3$ = {٥ ، ٦} هي حادثة ظهور عدد أكبر من ٤ .

$أ_4$ ={ ٣ ، ٦ } هي حادثة ظهور عدد يقبل القسمة على ٣ .

والآن نكون الحوادث الآتية :

$\bar{أ}_4$ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} حادثة ظهور عدد لا يقبل القسمة على ٣ .

$أ_1 \cap أ_4$ = {٦} حادثة ظهور عدد زوجي يقبل القسمة على ٣ .

$أ_2 \cap أ_3$ = {٥} حادثة ظهور عدد فردي أكبر من ٤ .

$أ_2 \cup أ_3$ = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٦} حادثة ظهور عدد فردي أو عدد أكبر من ٤ .

$أ_1 \cup أ_2$ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} = ش حادثة ظهور عدد فرد أو عدد زوجي .

تعريف (٦ - ٤) :

يقال إن أ ، ب حادثتان متنافيتان أو متمانعتان إذا كان وقوع إحداهما يمنع وقوع الأخرى ، أي أن :

$$أ \cap ب = \phi$$

وفي المثال (٦ - ٨) $أ_1$ ، $أ_2$ حادثتان متنافيتان لأن ظهور عدد زوجي يمنع ظهور عدد فردي .

٦ - ٥: مسلمات نظرية الاحتمالات:

إذا كان ش فراغ عينة لتجربة عشوائية ، وكانت ق (ش) مجموعة جميع الحوادث

المعرفة على ش فإنه يرافق كل حادثة أ $\in$ ق (ش) عدد معين ح (أ) $\in$ [٠ ، ١] ويسمى احتمال الحادثة أ ، ويتمتع بالخواص التالية والتي تسمى مسلمات نظرية الاحتمالات :

(١) إذا كانت أ $\subset$ شـ فإن ح (أ) $\geqslant$ صفر

(٢) ح (شـ) = ١

(٣) إذا كانت أ ، ب حادثتين متنافيتين فإن :

ح (أ $\cup$ ب) = ح (أ) + ح (ب)

ومن هذه المسلمات يمكن إثبات النظريات الآتية :

نظريات (٦ – ١) :

إذا كانت $\bar{\text{أ}}$ هي الحادثة المكملة للحادثة أ فإن :

ح ($\bar{\text{أ}}$) = ١ – ح (أ)

البرهان :

$\because$ شـ = أ $\cup$ $\bar{\text{أ}}$

$\therefore$ ح (شـ) = ح (أ $\cup$ $\bar{\text{أ}}$)

وحيث أن أ $\cap$ $\bar{\text{أ}}$ = ϕ

$\therefore$ ح (شـ) = ح (أ) + ح ($\bar{\text{أ}}$) مسلمة (٣)

$\therefore$ ١ = ح (أ) + ح ($\bar{\text{أ}}$) مسلمة (٢)

$\therefore$ ح ($\bar{\text{أ}}$) = ١ – ح (أ)

نتيجة (٦ – ١) :

ح (ϕ) = صفر

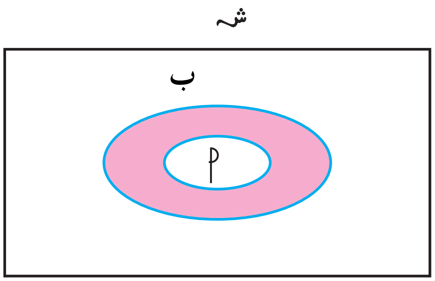
البرهان :

$\bar{\text{شـ}}$ = ϕ

ولكن ح (شـ̄) ١ − ح (شـ) نظرية (١)

∴ ح (φ) = ١ − ١

= صفر مسلمة (٢)



نظرية (٦ − ٢):

إذا كانت أ ⊂ ب فإن:

ح (أ) ≤ ح (ب)

البرهان:

∵ أ ⊂ ب

∴ ب = أ ∪ (ب − أ)

إذاً ح (ب) = ح {أ ∪ (ب − أ)}

وحيث أن:

أ ∩ (ب − أ) = φ

∴ ح (ب) = ح (أ) + ح (ب − أ) مسلمة (٣)

ولكن ح (ب − أ) ≥ صفر مسلمة (١)

∴ ح (ب) ≥ ح (أ)

نتيجة (٦ − ٢):

ح (أ) ≤ ١ حيث أ أي حادثة في شـ

البرهان:

أ ⊂ شـ

∴ ح (أ) ≤ ح (ش)   نظرية (٦ - ٢)

∴ ح (أ) ≤ ١   مسلمة (٢)

ملاحظة (٦-٢):

من المسلمة (١) والنتيجة السابقة نستنتج أنه لأي حادثة أ فإن :

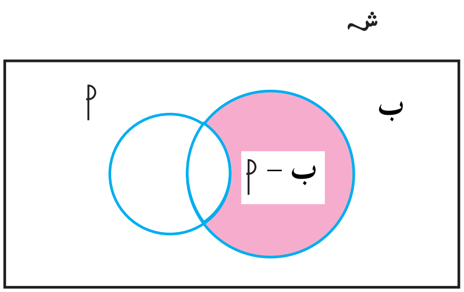
٠ ≤ ح (أ) ≤ ١

نظرية (٦- ٣) :

إذا كانت أ ، ب أي حادثتين، يكون :

ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) − ح (أ ∩ ب)

البرهان :



من الشكل يلاحظ أن :

أ ∪ ب = أ ∪ (ب − أ)

كما أن :

أ ∩ (ب − أ) = Φ

∴ ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب − أ) .... (١)

ولكن ب = (أ ∩ ب) ∪ (ب − أ)

، (أ ∩ ب) ∩ (ب − أ) = Φ

∴ ح (ب) = ح (أ ∩ ب) + ح (ب − أ) أي أن :

ح (ب − أ) = ح (ب) − ح (أ ∩ ب) .... (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن :

ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) − ح (أ ∩ ب) .

احتمال العنصر واحتمال الحادثة:

عرفنا فراغ العينة ش على أنه مجموعة جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية، وأن الحادثة هي مجموعة من فراغ العينة.

ويمكن تحديد احتمال أي حادثة إذا أمكننا تحديد احتمالات العناصر المكونة لفراغ العينة، واحتمالات العناصر يمكن تحديدها من التعريف الآتي:

تعريف (٦-٥):

إذا كانت ش فراغ عينة تحتوي على ن عنصر، فإنه يمكن تخصيص أو تعيين عدد حقيقي ح ($ل_م$) للعنصر $ل_م$ ويسمى احتمال العنصر $ل_م$ على أن يحقق الشرطين:

(١) ٠ $\leqslant$ ح ($ل_م$) $\leqslant$ ١

(٢) $\sum_{م=١}^{ن}$ ح ($ل_م$) = ١

مثال (٦ - ٩):

إذا ألقيت قطعة نقود مرة واحدة فإن فراغ العينة هو:

ش = $\{$ص، ك$\}$

عناصر هذا الفراغ هي ص ، ك واحتمالات هذه العناصر قد تكون أي قيمتين غير سالبتين ومجموعهما واحد صحيح:

فمثلاً كل من الحالات الآتية مقبولة:

١- ح (ص) = $\frac{١}{٢}$ ، ح (ك) = $\frac{١}{٢}$

٢- ح (ص) = $\frac{١}{٤}$ ، ح (ك) = $\frac{٣}{٤}$

٣- ح (ص) = $\frac{٢٣}{٣}$ ، ح (ك) = $\frac{١}{٣}$

٤- ح (ص) = ١ ، ح (ك) = صفر

مثال (٦ - ١٠):

قطعة نقود صممت بحيث أن احتمال ظهور الصورة ضعف احتمال ظهور الكتابة ألقيت مرة واحدة.

اكتب فراغ العينة وأوجد احتمالات الحوادث البسيطة.

الحـــل:

ش = {ص ، ك}

ونفرض أن ح (ص) = ٢ س

∴ ح (ك) = س

ولكن ٢ س + س = ١

∴ ٣ س = ١

أي أن: س = $\frac{١}{٣}$ وعلى ذلك فإن:

ح (ص) = $\frac{٢}{٣}$ ، ح (ك) = $\frac{١}{٣}$

تعريف (٦ - ٦):

يعرّف احتمال أي حادثة أ بأنه مجموع احتمالات العناصر المكونة لها.

مثال (٦ - ١١):

ألقيت زهرة نرد مثقلة بحيث أن احتمال ظهور أي عدد يتناسب مع ظهور هذا العدد. والمطلوب:

١- كتابة فراغ العينة .

٢- تحديد احتمالات الحوادث البسيطة .

٣- حساب احتمال ظهور عدد زوجي .

٤- حساب احتمال ظهور عدد أكبر من ٤ .

الحـــل :

١- شـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

٢- بما أن احتمال ظهور العدد يتناسب مع هذا العدد لذلك فإن :

ح (١) = س ، ح (٢) = ٢ س ، ح (٣) = ٣ س ،

ح (٤) = ٤ س ، ح (٥) = ٥ س ، ح (٦) = ٦ س

باالجمع ينتج أن : ٢١ س = ١

$\therefore$ س = $\frac{١}{٢١}$

$\therefore$ ح (١) = $\frac{١}{٢١}$ ، ح (٢) = $\frac{٢}{٢١}$ ، ح (٣) = $\frac{٣}{٢١}$ ،

ح (٤) = $\frac{٤}{٢١}$ ، ح (٥) = $\frac{٥}{٢١}$ ، ح (٦) = $\frac{٦}{٢١}$

٣ـ نفرض أن ﻫ هي حادثة ظهور عدد زوجي :

$\therefore$ ﻫ = { ٢ ، ٤ ، ٦ }

وبالتالي فإن :

ح (ﻫ) = ح (٢) + ح (٤) + ح (٦)

= $\frac{٢}{٢١}$ + $\frac{٤}{٢١}$ + $\frac{٦}{٢١}$

$= \frac{١٢}{٢١}$

$= \frac{٤}{٧}$

٤ – نفرض أن ب هي حادثة ظهور عدد أكبر من ٤ :

∴ ب = { ٥ ، ٦ }

وبالتالي فإن :

ح (ب) = ح (٥) + ح (٦)

$= \frac{٥}{٢١} + \frac{٦}{٢١}$

$= \frac{١١}{٢١}$

ملاحظة (٦ - ٣):

غالباً ما نجد أن الخواص الطبيعية للتجربة تفرض تعيين أو تخصيص احتمالات متساوية لنتائج التجربة.

في مثل هذه الحالات إذا كانت ش تحتوي على ن عنصراً فإن :

ح (ل م) = $\frac{١}{ن}$ حيث م = ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ، ن

وإذا كانت هناك حادثة أ تحتوي على ك عنصراً فإن :

ح (أ) = $\frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ش}}$ = $\frac{\text{عدد الطرق التي يمكن أن تظهر بها أ}}{\text{عدد الطرق التي يمكن أن تظهر بها ش}}$

مثال (٦ – ١٢) :

ألقي حجر نرد مرة واحدة فما احتمال ظهور عدد زوجي ؟

الحـــل :

شـ = $\{$ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ $\}$

فإن كان حجر النرد متماثلاً من حيث الأبعاد والكثافة فإنه من المعقول أن نفرض تساوي احتمال ظهور أي وجه . وعلى ذلك :

ح (١) = ح (٢) = ح (٣) = ح (٤) = ح (٥) = ح (٦) = $\frac{١}{٦}$

فإن كانت أ حادثة ظهور عدد زوجي فإن :

أ = $\{$ ٢ ، ٤ ، ٦ $\}$

ويكون :

ح (أ) = $\frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر شـ}}$

= $\frac{٣}{٦}$

= $\frac{١}{٢}$

مثال (٦ - ١٣) :

ألقي حجرا نرد متمايزان مرة واحدة، فما احتمال الحصول على مجموع يساوي ٩ ؟

الحـل :

نعلم من المثال رقم (٣) أن عدد عناصر شـ = ٣٦ عنصراً ونفرض أن أ هي حادثة ظهور مجموع يساوي ٩

∴ أ = $\{$ (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٤) ، (٦ ، ٣) $\}$

∴ ح (أ) = $\frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر شـ}}$

$$= \frac{٤}{٣٦}$$

$$= \frac{١}{٩}$$

بعض قوانين الاختيار الهامة:

ولتعيين عدد عناصر ش أو عدد عناصر أي حادثة أ فإننا سنعتمد على بعض قوانين موضوع الاختيار، ونذكر منها على الأخص:

١- عدد الطرق التي يمكن بها اختيار ر من الأشياء من بين ن من هذه الأشياء هو:

$$^{ن}ق_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن - ر}}$$

حيث أن: $\underline{|ن} = ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢) \times .... \times ٣ \times ٢ \times ١$

مثال (٦ - ١٤):

إذا كان لدينا ٤ رجال، وأريد إرسال اثنين منهم في بعثة، فإنه يمكن اختيار أعضاء البعثة بعدد من الطرق $^{٤}ق_{٢}$ أي أن:

$$\text{عدد الطرق} = {}^{٤}ق_{٢} = \frac{\underline{|٤}}{\underline{|٢}\ \underline{|٤ - ٢}} = \frac{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٢ \times ١ \times ٢ \times ١} = ٦ \text{ طرق.}$$

مثال (٦ - ١٥):

صندوق به ٨ كرات متماثلة، سحبت منه ٣ كرات فما هو عدد الطرق التي يمكن بها إجراء هذه العملية.

الحـــــل :

عدد الطرق = $^{٨}ق_{٣}$ = $\frac{\underline{|٨}}{\underline{|٣}\quad \underline{|٥}}$ = ٥٦ طريقة .

٢- إذا أمكن إجراء عملية ما بطرق مختلفة عددها ل ، وأمكن إجراء عملية أخرى بطرق مختلفة عددها م ، فإنه يمكن إجراء العمليتين معاً بطرق عددها ل م .

مثال (٦ - ١٦) :

ما هو عدد الطرق التي يمكن بها تكوين بعثة مكونة من ٣ رجال وامرأتين من بين ٦ رجال ، ٥ نساء .

الحـــــل :

عدد طرق اختيار الرجال = $^{٦}ق_{٣}$ = $\frac{\underline{|٦}}{\underline{|٣}\quad \underline{|٣}}$ = $\frac{٦ \times ٥ \times ٤}{٣ \times ٢ \times ١}$ = ٢٠ طريقة .

عدد طرق اختيار النساء = $^{٥}ق_{٢}$ = $\frac{\underline{|٥}}{\underline{|٢}\quad \underline{|٣}}$ = $\frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١}$ = ١٠ طرق .

∴ عدد طرق تكوين البعثة = ٢٠ × ١٠ = ٢٠٠ طريقة .

مثال (٦ - ١٧) :

صندوق به ٥ كرات بيض ، ٤ كرات حمر ، سحبت منه كرتان معاً فما احتمال أن تكون :

أ- الكرتان بيضاوين .

ب- واحدة بيضاء والأخرى حمراء .

الحـــل :

عدد عناصر فراغ العينة $ش$ = عدد طرق سحب كرتين من الصندوق

$$= {}^{٩}ق_{٢} = \frac{\underline{|٩}}{\underline{|٢}\ \underline{|٧}} = \frac{٩ \times ٨}{٢ \times ١} = ٣٦$$ عنصراً .

أ- نفرض أن أ هي حادثة سحب كرتين بيضاوين .

∴ عدد عناصر أ هي عدد طرق سحب كرتين بيضاوين من الصندوق

$$= {}^{٥}ق_{٢} = \frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١} = ١٠$$ عناصر .

$$\therefore ح(أ) = \frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ش}} = \frac{١٠}{٣٦} = \frac{٥}{١٨}$$

ب- نفرض أن ب هي حادثة سحب كرتين واحدة بيضاء والأخرى حمراء :

∴ عدد عناصر ب = عدد طرق سحب كرة بيضاء × عدد طرق سحب كرة حمراء .

$$= {}^{٥}ق_{١} \times {}^{٤}ق_{١}$$

$$= ٥ \times ٤ = ٢٠$$

$$\therefore ح(ب) = \frac{٢٠}{٣٦} = \frac{٥}{٩}$$

مثال (٦ - ١٨) :

سحبت ورقتان عشوائياً من بين ١٠ ورقات مرقمة من ١ إلى ١٠ . أوجد احتمال أن يكون المجموع فردياً .

الحـــل :

عدد عناصر ش = عدد الطرق التي يمكن بها سحب ورقتين من بين ١٠ ورقات .

$$= {}^{١٠}ق_{٢} = \frac{١٠ \times ٩}{٢ \times ١} = ٤٥ \text{ عنصراً.}$$

ولكي يكون المجموع فردياً فلا بد أن تكون إحدى الورقتين فردية والأخرى زوجية :

عدد طرق سحب ورقة فردية = ${}^{٥}ق_{١} = ٥$

عدد طرق سحب ورقة زوجية = ${}^{٥}ق_{١} = ٥$

∴ عدد طرق سحب الورقتين معاً = $٥ \times ٥ = ٢٥$

فإذا كانت أ هي حادثة سحب ورقتين معاً مجموعهما فردي فإن :

$$ح(أ) = \frac{٢٥}{٤٥} = \frac{٥}{٩}$$

مثال (٦ - ١٩) :

سحبت ورقة من مجموعة أوراق اللعب ، فما احتمال أن تحمل الرقم ثلاثة أو صورة ؟

الحـــل :

نفرض أن ش فراغ العينة ، أ حادثة سحب ورقة تحمل الرقم ٣ ، ب حادثة سحب ورقة عليها صورة .

∴ أ $\cup$ ب هي حادثة سحب ورقة تحمل الرقم ثلاثة أو صورة .

عدد عناصر ش = ${}^{٥٢}ق_{١} = ٥٢$

عدد عناصر أ = ${}^{٤}ق_{١} = ٤$

عدد عناصر ب = ${}^{١٢}ق_{١} = ١٢$

$\therefore$ ح (ꟼ) = $\frac{٤}{٥٢}$ ، ح (ب) = $\frac{١٢}{٥٢}$

ولكن ꟼ ، ب حادثتان متنافيتان ، أي أن :

ꟼ $\cap$ ب = ϕ لذلك :

ح (ꟼ $\cup$ ب) = ح (ꟼ) + ح (ب)

= $\frac{٤}{٥٢}$ + $\frac{١٢}{٥٢}$

= $\frac{١٦}{٥٢}$ + $\frac{٤}{١٣}$

مثال (٦ – ٢٠) :

ألقي حجر نرد مرة واحدة فما احتمال أن يكون السطح الظاهر يقبل القسمة على ٣ أو ٢ ؟

الحــــل :

نفرض أن شـ هي فراغ العينة

ꟼ حادثة أن السطح العلوي يقبل القسمة على ٣

ب حادثة أن السطح العلوي يقبل القسمة على ٢

$\therefore$ ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } أي أن عدد عناصر ش = ٦

، ꟼ = { ٣ ، ٦ } أي أن عدد عناصر ꟼ = ٢

ب = { ٢ ، ٤ ، ٦ } أي أن عدد عناصر ب = ٣

، ꟼ $\cap$ ب = { ٦ } أي أن عدد عناصر ꟼ $\cap$ ب = ١

، $\therefore$ ح (ꟼ $\cup$ ب) = ح (ꟼ) + ح (ب) – ح (ꟼ $\cap$ ب) $\longleftarrow$ نظرية (٣) .

$= \frac{٢}{٦} + \frac{٣}{٦} + \frac{١}{٦}$

∴ ح (أ ∪ ب) $= \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

مثال (٦ - ٢١) :

ألقي حجرا نرد متمايزان مرة واحدة فما احتمال أن يكون مجموع النقط على السطح العلوي لهما ٤ أو ٩ ؟

الحـــل :

نفرض أن ش هي فراغ العينة

∴ عدد عناصر ش = ٣٦

ونفرض أن : أ هي حادثة أن يكون المجموع ٤

∴ أ = {(١,٣) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ١)}

أي أن عدد عناصر أ = ٣

ونفرض أن : ب هي حادثة أن يكون المجموع ٩

∴ ب = {(٣,٦) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٤) ، (٦ ، ٣)}

أي أن عدد عناصر ب = ٤

∵ أ ∩ ب = ϕ

∴ ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب)

$= \frac{٣}{٣٦} + \frac{٤}{٣٦}$

$= \frac{٧}{٣٦}$

٦ - ٦ الاحتمالات المشروطة:

في كثير من الحالات نحتاج إلى إيجاد احتمال وقوع حادثة أ بشرط وقوع الحادثة ب . ويسمى هذا الاحتمال بالاحتمال المشروط ، ونرمز له بالرمز ح (أ | ب) أي احتمال وقوع أ بشرط وقوع ب ، ويحدد هذا الاحتمال في التعريف التالي :

تعريف (٦ – ٧)

إذا كانت أ ، ب حادثتين في فراغ عينة وكان ح (ب) $\neq$ صفر

فإن :

$$\text{ح}(\text{أ} \mid \text{ب}) = \frac{\text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ح}(\text{ب})}$$

مثال (٦ – ٢٢) :

ألقي حجرا نرد متمايزان مرة واحدة ، فما احتمال ظهور مجموع يساوي ٨ إذا علم أن مجموع النقط على السطح العلوي زوجي ؟

الحـــل :

نفرض أن : ش فراغ العينة

∴ عدد عناصر ش = ٣٦ عنصراً

ونفرض أن : أ هي حادثة ظهور نقط مجموعها ٨

∴ أ = {(٢ ، ٦) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٣) ، (٦ ، ١)}

أي أن عدد عناصر أ = ٥

ونفرض أن : ب هي حادثة أن مجموع النقط زوجي

∴ عدد عناصر ب = ١٨ عنصراً

أي أن : أ $\cap$ ب هي مجموع النقط زوجي ويساوي ٨

$\therefore$ عدد عناصر أ $\cap$ ب = ٥

$\therefore$ ح (أ) = $\frac{٥}{٣٦}$ ، ح (ب) = $\frac{١٨}{٣٦}$ ، ح (أ $\cap$ ب) = $\frac{٥}{٣٦}$

$$\therefore \text{ح (أ | ب)} = \frac{\text{ح (أ} \cap \text{ب)}}{\text{ح (ب)}}$$

$$= \frac{٥}{٣٦} \div \frac{١٨}{٣٦} + \frac{٥}{١٨}$$

مثال (٦ - ٢٣) :

ألقي حجرا نرد مرة واحدة فإذا كان مجموع النقط ٦ فاحسب احتمال أن يكون أحد الحجرين فقط عليه الرقم ٢

الحــــل :

ش = فراغ العينة

$\therefore$ عدد عناصر ش ٣٦ عنصراً

أ = أحد الحجرين فقط عليه الرقم ٢ .

أ = {(٢، ١)، (٢، ٣)، (٢، ٤)، (٢، ٥)، (٢، ٦)، (١، ٢)، (٣، ٢)، (٤، ٢)، (٥، ٢)، (٦، ٢)}

أي أن : عدد عناصر أ = ١٠

ب = مجموع النقط على السطح العلوي٦ .

$\therefore$ ب = {(١، ٥)، (٢، ٤)، (٣، ٣)، (٤، ٢)، (٥، ١)}

أي أن : عدد عناصر ب = ٥

$$\text{أ} \cap \text{ب} = \{(٢ ، ٤) ، (٤ ، ٢)\}$$

أي أن : عدد عناصر أ ∩ ب = ٢

$$\text{ح}(\text{ب}) = \frac{٥}{٣٦} \text{ ، } \text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \frac{٢}{٣٦}$$

$$\text{ح}(\text{أ} | \text{ب}) = \frac{\text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ح}(\text{ب})}$$

$$= \frac{٢}{٣٦} \div \frac{٥}{٣٦} = \frac{٢}{٥}$$

قاعدة ضرب الاحتمالات:

من تعريف الاحتمال المشروط نلاحظ أن :

$$\boxed{\text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \text{ح}(\text{ب}) \text{ ح}(\text{أ} | \text{ب})}$$

وتسمى هذه بقاعدة ضرب الاحتمالات . ويمكن تعميمها لأكثر من حادثتين على النحو التالي :

$$\text{ح}(\text{أ}_١ \cap \text{أ}_٢ \cap \text{أ}_٣) = \text{ح}(\text{أ}_١) \text{ ح}(\text{أ}_٢ | \text{أ}_١) \text{ ح}(\text{أ}_٣ | \text{أ}_١ \cap \text{أ}_٢)$$

مثال (٦ – ٢٤) :

صندوق به ١٢ تفاحة منها ٤ تالفة ، اختير عشوائياً ثلاث تفاحات واحدة بعد الأخرى . احسب احتمال أن تكون جميعاً جيدة .

الحـــل :

نفرض أن : $\text{أ}_١$ = التفاحة الأولى جيدة .

$أ_2$ = التفاحة الثانية جيدة.

$أ_3$ = التفاحة الثالثة جيدة.

∴ ($أ_1 \cap أ_2 \cap أ_3$) = الثلاث تفاحات جيدة

وبما أن:

$$ح(أ_1 \cap أ_2 \cap أ_3) = ح(أ_1)\, ح(أ_2 | أ_1)\, ح(أ_3 | أ_1 \cap أ_2).$$

$$\therefore ح(أ_1 \cap أ_2 \cap أ_3) = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

٦ - ٧ الاحتمالات المستقلة:

من الواضح أن هناك فرقاً بين ح (أ) ، ح (أ | ب)

ولكن إذا حدث أن:

$$ح(أ) = ح(أ | ب)$$

فإن هذا يعني أن احتمال وقوع الحادثة أ لا يعتمد على وقوع أو عدم وقوع الحادثة ب، وفي هذه الحالة يقال إن أ ، ب حادثتان مستقلتان، ويكون:

$$ح(أ \cap ب) = ح(أ) \cdot ح(ب)$$

تعريف (٦ - ٨):

إذا كانت أ ، ب حادثتين في فراغ العينة، فيقال إن أ ، ب حادثتان مستقلتان إذا كان:

$$ح(أ \cap ب) = ح(أ) \cdot ح(ب)$$

مثال (٦ - ٢٥) :

ألقي حجرا نرد متمايزان مرة واحدة، فما احتمال ظهور ٤ على الحجر الأول، ٣ على الحجر الثاني؟

الحـــل :

نفرض أن : ﺃ حادثة ظهور ٤ على الحجر الأول

، ب حادثة ظهور ٣ على الحجر الثاني

واضح أن ﺃ ، ب حادثتان مستقلتان، وعليه :

ح (ﺃ ∩ ب) = ح (ﺃ) . ح (ب)

$$= \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦}$$

$$= \frac{١}{٣٦}$$

الخلاصة

١- التجربة العشوائية هي التجربة التي نعلم مسبقاً جميع نواتجها، وإن كنا لا نستطيع أن نتنبأ أياً من هذه النواتج سيتحقق.

٢- الحادثة هي أي مجموعة جزئية لفراغ العينة.

٣- لكل حادثة بسيطة ل م في ش يوجد ح (ل م) بحيث أن:

صفر $\leqslant$ ح (ل م) $\leqslant$ ١ ، $\sum_{١}^{ن}$ ح (ل م) = ١

٤- إذا كانت أ $\subset$ ب فإن ح (أ) $\leqslant$ ح (ب).

٥- إذا كانت أ ، ب $\subset$ ش فإن :

i - ح (أ $\cup$ ب) = ح (أ) + ح (ب) - ح (أ $\cap$ ب).

ii - ح (أ $\cup$ ب) = ح (أ) + ح (ب) إذا كان أ $\cap$ ب = ϕ

٦ - إذا كان أ ، ب $\subset$ ش ، ح (ب) $\neq$ صفر فإن:

$$ح (أ | ب) = \frac{ح (أ \cap ب)}{ح (ب)}$$

٧- إذا كانت أ $\subset$ ش فإن:

ح ($\bar{أ}$) = ١ - ح (أ)

٨- تكون أ ، ب حادثتين مستقلتين إذا كان:

ح (أ $\cap$ ب) = ح (أ) . ح (ب)

تمارين (٦ - ١)

١- أكمل ما يلي بحيث تكون العبارة صحيحة :

أ- فراغ العينة هو . . . .

ب - الحادثة في تجربة معينة هي . . . .

جـ- الحادثة البسيطة هي . . . . .

٢- أكتب فراغ العينة للتجربة الآتية :

اختيار عدد صحيح س بحيث يقبل س القسمة على ٣ ،

٣ $\leqslant$ س $\leqslant$ ١٥

٣- سحب إبراهيم ثلاث كرات واحدة بعد الأخرى من كيس به كرات متماثلة إلا من حيث اللون ، وهي ٤ كرات بيض ، ٣ حمر ، إذا كان إبراهيم لا يرى الكرة المسحوبة ، اكتب فراغ العينة .

٤- لأحمد الحق أن يختار حبتين من الفاكهة في مطعم واحدة بعد الأخرى ، وكان في المطعم برتقال وتفاح ، اكتب فراغ العينة وكلاً من الحوادث التالية :

$م_١$ أن يختار تفاحاً مرة واحدة على الأكثر .

$م_٢$ أن يختار برتقالاً أو تفاحاً مرتين .

$م_٣$ أن يختار برتقالاً مرة واحدة على الأقل .

٥ - في التمرين رقم (٢) اكتب الحوادث التالية :

أ- العدد يقبل القسمة على ٢ أو ٥ .

ب - العدد أقل من ١٣ ويقبل القسمة على ٣ .

جـ- العدد زوجي ويقبل القسمة على ٥ .

د- العدد فردي أكبر من ١٠ .

٦- يراد تكوين لجنة من المدرسين م ، ب ، جـ ، تتكون من عضوين فقط . أكبت فراغ العينة .

٧- من بين خمسة موظفين ﺃ ، ب ، جـ ، د ، هـ، نريد اختيار لجنة من ثلاثة أعضاء :

١- اكتب فراغ العينة الذي يعبر عن جميع اللجان الممكنة .

٢- اكتب الحادثة « ﺃ ، ب ليسا في اللجنة » .

٣- اكتب الحادثة « ب ليس في اللجنة » .

٤- اكتب الحادثة « ﺃ ،ب في اللجنة » .

٥- اكتب الحادثة « ﺃ أو ب في اللجنة » .

٨- صندوق به ٣ كرات حمر ، ٦ كرات زرق ، ٥ كرات بيض ، ٦ كرات خضر . سحب عبدالرحمن كرة واحدة من الصندوق بطريقة عشوائية . احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

أ) حمراء ب) بيضاء جـ) زرقاء د) خضراء

هـ) بيضاء أو حمراء و) زرقاء أو خضراء ز) خضراء أو بيضاء

ط) بيضاء أو زرقاء ف) بيضاء أو حمراء أو زرقاء ي) خضراء أو حمراء أو بيضاء .

٩- في تجربة الصندوق بالتمرين رقم (٨) احسب احتمال أن تكون الكرة :

أ- ليست بيضاء ب- ليست حمراء حـ- ليست زرقاء

د- ليست خضراء هـ) ليست خضراء ولا بيضاء .

و) ليست حمراء ولا زرقاء ز) ليست بيضاء ولا حمراء ولا خضراء .

١٠- إذا ألقيت زهرة نرد منتظمة ، احسب احتمالات الحوادث التالية :

أ- ظهور عدد فردي ب- ظهور عدد يقبل القسمة على ٣

جـ- ظهور عدد زوجي د- ظهور عدد سالب

هـ- ظهور عدد أقل من ٥ ز- ظهور عدد أكبر من ٤

١١- إذا سحبت ورقة من أوراق اللعب فأوجد ما يأتي :

أ- احتمال سحب ورقة حمراء . ب- احتمال سحب ورقة بها ٨ نقاط .

جـ- احتمال سحب ورقة عليها قلب . د- احتمال سحب ورقة عليها نقطة حمراء .

هـ - احتمال سحب ورقة عليها قلب وبها نقطة واحدة .

١٢- ألقيت ثلاث قطع نقود منتظمة ومتمايزة احسب ما يلي :

أ- احتمال ظهور صورة واحدة أو صورتين.

ب- احتمال ظهور صورة واحدة أو ثلاث صور.

جـ- احتمال ظهور صورة واحدة على الأقل.

د- احتمال ظهور صورة أو عدم ظهور كتابة.

١٣- اختير عدد من العشرين عدداً الصحيحة الموجبة الأولى بطريقة عشوائية. أحسب احتمال أن يكون العدد :

أ) زوجياً أو يقبل القسمة على ٣.

ب) فردياً أو يقبل القسمة على ٥

ح) يقبل القسمة على ٢ أو على ٣.

د- لا يقبل القسمة على ٢ أو لا يقبل القسمة على ٣.

هـ- لا يقبل القسمة على ٣ أو زوجياً.

١٤- في دراسة أجريت على مكتب بريد وجد أن احتمالات تسجيل الرسائل في ربع ساعة كالآتي :

عدد الرسائل	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	أكثر من ١١
الاحتمال	,٠٠١	,٠٠٤	,٠١٥	,٠١٢	,١٠٠	,١٠٦	,٠٨٢	,١٩	,٢	,١٤	,١	,٠٤	,٠١

احسب الاحتمالات الآتية :

أ- أن يسجل المكتب ٤ رسائل أو ٥ رسائل أو ١١ رسالة.

ب- أن يسجل المكتب ٧ رسائل على الأقل.

جـ- أن يسجل المكتب ٩ رسائل على الأكثر.

د- أن يسجل المكتب رسائل عددها س حيث ٣ < س < ١١.

١٥- في كلية العلوم ١٠٠ طالب منهم ٤٠ يدرسون الرياضيات، ٣٥ يدرسون الفيزياء، ٢٥ يدرسون الكيمياء، ١١ يدرسون رياضيات وفيزياء فقط، ٦ يدرسون كيمياء وفيزياء فقط، ٤ يدرسون رياضيات وكيمياء فقط، ٣ يدرسون المواد الثلاث، أختير طالب منهم عشوائياً. احسب احتمال أن يكون هذا الطالب من بين الذين يدرسون :

أ- الرياضيات   ب- الكيمياء   جـ- الفيزياء

د- الرياضيات أو الكيمياء   هـ- الرياضيات أو الفيزياء.

و- الفيزياء أو الكيمياء.

١٦- في التمرين رقم (١٥) احسب احتمال أن يكون الطالب من بين الذين:

أ- يدرسون الرياضيات فقط.   ب- يدرسون الفيزياء والكيمياء.

جـ- يدرسون كيمياء فقط.   د- لا يدرسون الرياضيات ولا الكيمياء.

هـ- لا يدرسون الرياضيات ويدرسون الكيمياء.

١٧- صندوق به ٣ كرات بيض، ٧ كرات حمر. سحبت منه كرتان عشوائياً، احسب احتمال:

أ- أن تكون الكرتان بيضاوين.

ب- أن تكون الكرتان حمراوين.

جـ- أن تكون إحدى الكرتين بيضاء.

١٨- في موقف سيارات توجد ٧ أماكن على هيئة دائرة لوقوف السيارات. فإذا وقفت سيارتان عشوائياً في مكانين من هذه الدائرة، فاحسب احتمال أن تكون السيارتان متجاورتين، وإذا كانت الأماكن على استقامة واحدة، فما احتمال أن تكون السيارتان متجاورتين؟

١٩- سحبت ورقة من مجموعة أوراق اللعب، أوجد احتمال أن تكون عليها نقطة واحدة أو صورة ولد. ثم أوجد احتمال أن تكون عليها نقطة واحدة أو قلب.

٢٠- رميت قطعة نقود مرتين فإذا كانت $أ_1$ حادثة أن يظهر في الرمية الثانية كتابة، $أ_2$ حادثة ظهور نفس الشيء في الرميتين. احسب:

أ- ح ($أ_1 \cap أ_2$)   ب- ح ($أ_2 | أ_1$)

جـ- ح ($أ_1 | أ_2$)   د- هل $أ_1$، $أ_2$ حادثتان مستقلتان؟

علّل إجابتك.

٢١- عشرة مصابيح منها ٣ تالفة. اختير منها مصباحان واحد بعد الآخر، فما احتمال:

أ- أن المصباحين تالفان.

ب- أن المصباحين سَلِيمان.

جـ - أن أحدهما سليم والآخر تالف.

٢٢- في تجربة رمي ثلاثة قروش متمايزة، احسب احتمالات الحوادث التالية :

$أ_١$ حادثة ظهور ثلاث صور، $أ_٢$ حادثة ظهور صورة واحدة على الأقل، $أ_٣$ حادثة ظهور صورتين على الأكثر :

ثم احسب كلاً مما يلي :

١- ح ($أ_١$ | $أ_٢$) ٢- ح ($أ_١$ | $أ_٣$)

٣- ح ($أ_٢$ | $أ_٣$) ٤ - ح ($أ_٣$ | $أ_٢$)

٢٣- في التمرين رقم (٢٢) حدد ما إذا كانت $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$ حوادث مستقلة بعضها عن بعض :

٢٤- في التمرين رقم (٢٢) احسب الاحتمالات الآتية :

١- ظهور صورة على كل من القروش الثلاثة.

٢- ظهور صورة على قرش واحد على الأكثر.

٣- ظهور صورة على قرش واحد على الأقل.

٢٥ - يختار مدير أحد المطاعم يومين من أيام الأسبوع عشوائياً يقدم فيها سمكاً، وثلاثة أيام يقدم فيها فاكهة. احسب الاحتمالات الآتية :

١- أن يقدم سمكاً وفاكهة.

٢- أن لا يقدم سمكاً ولا فاكهة.

٢٦- إذا كانت أ ، ب حادثتين مستقلتين، فأثبت أن :

١- $\bar{أ}$ ، $\bar{ب}$ حادثتان مستقلتان.

٢- أ ، $\bar{ب}$ حادثتان مستقلتان.

الباب السابع

التوزيعات الاحتمالية

٧ - ١ المتغير العشوائي:

يرافق نتائج التجربة العشوائية مقدار يسمى المتغير العشوائي، وهذا المقدار يأخذ قيّماً مختلفة حسب نتيجة التجربة العشوائية.

مثال (٧ - ١): إلقاء زهرتي نرد مرة واحدة.

التجربة العشوائية هنا هي إلقاء الزهرتين، ونتيجة التجربة هي النقاط التي تظهر على السطح العلوي للزهرتين.

المقدار الذي يرافق نتائج هذه التجربة يمكن أن يكون مجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي للزهرتين.

المقدار الذي يرافق نتائج هذه التجربة يمكن أن يكون مجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي للزهرتين، وهذا المقدار يأخذ القيم ٢، ٣، ٤، ...، ١٢. وعلى ذلك فإن مجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي للزهرتين متغير عشوائي. متغير لأنه يأخذ قيماً مختلفة حسب نتيجة التجربة، وعشوائي لأنه يرافق نتائج تجربة عشوائية.

مثال (٧ - ٢) اختيار طالب من طلاب الجامعة.

التجربة العشوائية هي اختيار طالب، ونتيجة التجربة أحد طلاب الجامعة، والمقدار الذي يرافق نتائج هذه التجربة يمكن أن يكون طول الطالب أو دخل أسرته أو عدد أفرادها ... إلخ. فإذا ركزنا دراستنا على طول الطالب فإن هذا المقدار يأخذ قيماً مختلفة حسب طول الطالب الذي اخترناه. وربما يأخذ أي قيمة ١٦٥سم أو ١٦٦سم أو أي قيمة بينهما. وعلى ذلك فإن طول الطالب متغير عشوائي لأنه يأخذ قيماً مختلفة حسب نتيجة التجربة العشوائية.

أ- المتغير العشوائي المنفصل:

يقال إن المتغير العشوائي منفصل إذا أخذ قيماً منفصلة عن بعضها البعض، أي يوجد بينهما ثغرات.

مثال (٧ - ٣): عدد أفراد الأسرة متغير منفصل لأنه يأخذ القيم ٢، ٣، ٤، ... وهذه القيم يوجد بينها ثغرات. فمثلاً لا يوجد أسرة عدد أفرادها ٤ $\frac{١}{٣}$ أفراد.

مثال (٧ – ٤): مجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي عند إلقاء زهرتي نرد مرة واحدة متغير منفصل.

ب- المتغير العشوائي المتصل:

يقال إن المتغير العشوائي متصل إذا أمكن أن يأخذ جميع القيم التي تقع في نطاق تغيره.

مثال (٧ – ٥): طول الطالب متغير متصل لأنه يأخذ أي قيمة في نطاق تغير الطول. فإذا كانت أصغر وأكبر قيمة للطول هما ١٥٠ سم، ٢٠٠سم على التوالي، فطول الطالب يمكن أن يكون أي قيمة بين هاتين القيمتين فربما يكون ١٦٥سم أو ١٦٦ سم أو أي قيمة بينهما حسب دقة القياس.

٧ - ٢ التوزيع الاحتمالي المنفصل:

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل س يمثل بداية د (س) تسمى الدالة الاحتمالية، وتعطي احتمالات قيم س المختلفة في صورة جدول أو صيغة رياضية تبين القيم المختلفة التي يأخذها المتغير العشوائي س واحتمالات هذه القيم.

مثال (٧ – ٦):

الجدول الآتي يبين قسم متغير عشوائي س ودالته الاحتمالية د (س):

س	٢	٤	٥	٨
د (س)	٠,١	٠,٣	٠,٤	٠,٢

مثال (٧ – ٧):

الدالة الآتية تبين التوزيع الإجمالي لمتغير عشوائي س.

$$د = {}^{٤}ق_{س} \left(\frac{١}{٣}\right)^{س} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤-س}$$

حيث س = ٠، ١، ٢، ٣، ٤

وعموماً:

إذا كانت س متغيراً عشوائياً يأخذ القيم:

$س = س_1 ، س_2 ، ...... ، س_ن$

باحتمالات:

$د(س) = د(س_1) ، د(س_2) ، ..... ، د(س_ن)$

بشرط أن: (i) $د(س_ر) \geqslant$ صفر لجميع قيم س

(ii) $\sum د(س_ر) = 1$

فإنه يقال إن س يتبع توزيعاً احتمالياً منفصلاً دالته الاحتمالية د (س).

٧ - ٣: توزيع ذي الحدين

إذا كانت هناك تجربة عشوائية لها نتيجتان فقط هما ظهور حدث معين أو عدم ظهوره (مثل: نجاح الطالب أو فشله، المصباح الكهربائي جيد أو تالف، وصول طائرة في موعدها أو عدم وصولها، إصابة طائرة لهدف للعدو أو عدم إصابتها له، ظهور الصورة عند إلقاء قطعة نقود أو عدم ظهورها، ... إلخ) وكان احتمال ظهور هذا الحدث في أي محاولة هو ح، وعلى ذلك فإن احتمال عدم ظهوره هو ل= ١ − ح. فإذا تكررت هذه التجربة أو المحاولة ن مرة، فإن احتمال ظهور هذا الحدث س مرة من بين الـ ن من هذه المحاولات هو:

$$\boxed{ح(س) = {}^{ن}ق_{س} = ح^{س}\ ل^{ن-س}}$$

حيث تأخذ س القيم ٠، ١، ٢، ٣، ...، ن

وأن:

$ح(٠) + ح(١) + ح(٢) + ... + ح(ن) = ١$

وتوزيع الاحتمالات هذا على قيم المتغير س المختلفة يسمى «توزيع ذي الحدين» ويمكن استنتاج هذا التوزيع من الطرق السابقة.

مثال (٧ − ٨): ألقيت قطعة نقود ٤ مرات. فما هو احتمال ظهور الصورة ٣ مرات.

الحـــل :

عدد التجارب أو المحاولات ن = ٤

احتمال ظهور الصورة في أي مرة ح = $\frac{١}{٢}$

احتمال عدم ظهور الصورة في أي مرة ل = ١ - ح = $\frac{١}{٢}$

ويفرض أن س عدد الصور التي تظهر على السطح العلوي :

∴ ح (س) = ^{٤}ق$_{س}$ $(\frac{١}{٢})^{س}$ $(\frac{١}{٢})^{٤-س}$

احتمال ظهور الصورة ٣ مرات أي :

ح (س = ٣) = ^{٤}ق$_{٣}$ $(\frac{١}{٢})^{٣}$ $(\frac{١}{٢})^{١}$

= $\frac{٤}{١٦}$

= $\frac{١}{٤}$

مثال (٧ - ٩) : اشترى شخص صندوقاً به ٥ بطيخات . فإذا كان احتمال أن يكون أي منها تالفاً هو ٠,٢ احسب احتمال أن تكون :

أ) ٢ تالفة .

ب) ٢ على الأكثر تالفة .

جـ) جميعها جيدة .

الحـــل :

عدد المحاولات = عدد البطيخات = ن = ٥

احتمال أن يكون أي منها تالفاً ح = ٠,٢

احتمال أن يكون أي منها جيداً ل = ٠,٨

نفرض أن س هو عدد البطيخات التالفة .

∴ ح (س) = ^{٥}ق$_{س}$ (٠,٢)^{س} (٠,٨)$^{٥-س}$

أ) احتمال أن تكون بطيختان تالفتين :

ح (س = ٢) = ^{٥}ق$_{٢}$ (٠,٢)^{٢} (٠,٨)^{٣}

= ٠,٢٠٤٨

ب) احتمال أن تكون بطيختان على الأكثر تالفتين = ح (س $\leqslant$ ٢)

= ح (س = ٠) + ح (س = ١) + ح (س= ٢)

= ^{٥}ق$_{٠}$ (٠,٢) ^{٠} (٠,٨)^{٥} + ^{٥}ق$_{١}$ (٠,٢)^{١} (٠,٨)^{٤} + ^{٥}ق$_{٢}$ (٠,٢)^{٢} (٠,٨)^{٣}

= ٠,٣٢٧٦٨ + ٠,٤٠٩٦٠ + ٠,٢٠٤٨٠

= ٠,٩٤٢٠٨

جـ) احتمال أن تكون جميعها جيدة = ح (س= ٠)

= ^{٥}ق$_{٠}$ (٠,٢)^{٠} (٠,٨)^{٥}

= ٠,٣٢٧٦٨

مثال (٧ – ١٠) :

إذا كان ١٠٪ من إنتاج إحدى آلات المسامير تالفاً ، وسحبنا ٣ مسامير من إنتاج هذه الآلة ، فما احتمال أن يكون بينها :

أ) مسماران تالفان.

ب) كلها تالفة.

جـ) أقل من مسمارين تالفين.

الحـــل :

عدد المسامير ن = ٣ .

احتمال أن يكون أي مسمار تالفاً ح = ٠,١

احتمال أن يكون أي مسمار غير تالف ل = ٠,٩

نفرض أن س هي عدد المسامير التالفة :

∴ ح (س) = ^{٣}ق$_{س}$ (٠,١)^{س} (٠,٩)$^{٣-س}$

أ) احتمال أن يكون مسماران تالفين = ح (س= ٢) :

ح (س = ٢) = ^{٣}ق$_{٢}$ (٠,١)^{٢} (٠,٩)^{١}

= ٠,٠٢٧

ب) احتمال أن تكون المسامير كلها تالفة = ح (س = ٣) :

ح (س = ٣)= ^{٣}ق $_{٣}$ = (٠,١)^{٣}(٠,٩)^{٠}

= ٠,٠٠١

جـ) احتمال أقل من مسمارين تالفين = ح (س < ٢)

= ح (س = ٠) + ح (س = ١)

= ^{٣}ق $_{٠}$ (٠,١)^{٠}(٠,٩)^{٣} + ^{٣}ق $_{١}$ (٠,١)^{١}(٠,٩)^{٢}

= ٠,٧٢٩ + ٠,٢٤٣

= ٠,٩٧٢

مثال (٧ - ١١) :

في مصنع ما لقطع غيار السيارات تبين أن كل ٤٠٠٠ قطعة غيار منتجة يكون من بينها ٤٠٠ قطعة غيار غير صالحة للاستعمال . فإذا سحبت عينة مكونة من ٤ قطع غيار من إنتاج المصنع . فما هو احتمال أن يكون من بينها ٣ قطع غيار جيدة ؟

الحـل :

عدد قطع الغيار ن = ٤

احتمال أن تكون أي قطع غيار جيدة ح = $\frac{٣٦٠٠}{٤٠٠٠}$ = ٠,٩

احتمال أن تكون أي قطعة غيار غير جيدة ل = ١ - ٠,٩ = ٠,١

نفرض أن س هي عدد قطع الغيار الجيدة

∴ ح (س) = ^{٤}ق $_{س}$ = (٠,٩)^{س} (٠,١)$^{٤-س}$

احتمال أن تكون ٣ قطع غيار جيدة = ح (س = ٣) .

∴ ح (س = ٣) = ^{٤}ق $_{٣}$ = (٠,٩)^{٣}(٠,١)^{١}

= ٤ × ٠,٧٢٩ × ٠,١

= ٠,٢٩١٦

مثال (٧ - ١٢) :

قدرت شركة للطيران أن احتمال وصول الطائرة التي تقوم من لندن إلى مطار جدة في ميعادها هو ٠,٧ ، فإذا قامت ٤ طائرات للشركة من مطار لندن متجهة إلى مطار جدة فاحسب الاحتمالات الآتية :

أ) احتمال وصول طائرة واحدة فقط في ميعادها .

ب) احتمال وصول ٣ طائرات في ميعادها .

جـ) احتمال وصول طائرة واحدة على الأقل في ميعادها .

د) احتمال وصول ٣ طائرات على الأقل في ميعادها .

الحل :

عدد الطائرات ن = ٤

احتمال وصول أي طائرة في موعدها ح = ٠,٧

احتمال عدم وصول أي طائرة في موعدها ل = ١ - ٠,٧ = ٠,٣

نفرض أن س هي عدد الطائرات التي تصل في ميعادها

$\therefore$ ح (س) = ^{ن}ق$_{س}$ $(٠,٧)^{س}$ $(٠,٣)^{ن - س}$

أ) احتمال وصول طائرة واحدة في ميعادها = ح (س = ١)

= ^{٤}ق$_{١}$ $(٠,٧)^{١}$ $(٠,٣)^{٣}$

= ٤ × ٠,٧ × ٠,٠٢٧

= ٠,٠٧٥٦

ب) احتمال وصول ٣ طائرات في ميعادها = ح (س = ٣)

= ^{٤}ق$_{٣}$ $(٠,٧)^{٣}$ $(٠,٣)^{١}$

= ٤ × ٠,٣٤٣ × ٠,٣

= ٠,٤١١٦

جـ) احتمال وصول طائرة واحدة على الأقل في ميعادها = ح (س $\geqslant$ ١)

= ح (س = ١) + ح (س = ٢) + ح (س = ٣) + ح (س = ٤)

= ١ - ح (س = ٠)

= ١- ^{٤}ق$_{٠}$ (٠,٧)^{٠} (٠,٣)^{٤}

= ١ - ١ × ١ × ٠,٠٠٨١

= ١ - ٠,٠٠٨١

= ٠,٩٩١٩

د) احتمال وصول ٣ طائرات على الأقل في ميعادها = ح (س ⩾ ٣)

= ح (س = ٣) + ح (س = ٤)

= ^{٤}ق$_{٣}$ (٠,٧)^{٣} (٠,٣)^{١} + ^{٤}ق$_{٤}$ (٠,٧)^{٤} (٠,٣)^{٠}

= ٠,٤١١٦ + ٠,٢٤٠١

= ٠,٦٥١٧

مثال (٧ - ١٣):

إذا كان احتمال إصابة أي طائرة لأحد أهداف العدو هو ٠,٨ ، وإذا أغارت على خمس طائرات على هذا الهدف، احسب احتمال إصابة الهدف بطائرة واحدة على الأقل من الطائرات المغيرة.

الحل:

عدد الطائرات المغيرة ن = ٥

احتمال إصابة الهدف بأي طائرة مغيرة ح = ٠,٨

احتمال عدم إصابة الهدف بأي طائرة مغيرة ل = ١ - ٠,٨ = ٠,٢

نفرض أن س عدد مرات إصابة الهدف.

∴ ح (س) = ^{٥}ق$_{س}$ (٠,٨)^{س} (٠,٢)$^{٥ - س}$

احتمال إصابة الهدف بطائرة واحدة على الأقل = ح (س ⩾ ١)

= ح (س = ١) + ح (س = ٢) + ح (س = ٣) + ح (س = ٤) + ح (س = ٥)

= ١ - ح (س = صفر).

$= ١ - {}^{٥}ق_{٠} \ (٠,٨)^{٠} \ (٠,٢)^{٥}$

$= ١ - ١ \times ١ \times ٠,٠٠٠٣٢$

$= ١ - ٠,٠٠٠٣٢$

$= ٠,٩٩٩٦٨$

٧ - ٤ التوزيع الاحتمالي المتصل

إذا كانت س متغيراً عشوائياً متصلاً وكانت هناك دالة د (س) تحقق الشروط الآتية :

(١) د (س) $\geqslant$ صفر لجميع قيم س

(٢) المساحة تحت منحنى هذه الدالة = ١

فإنه يقال إن المتغير العشوائي س يتبع توزيعاً احتمالياً متصلاً كثافته الاحتمالية هي د (س) .

وفي هذه الحالة يكون احتمال وقوع س في مدى معين يساوي المساحة الواقعة فوق هذا المدى وتحت منحنى الدالة د (س) .

مثال (٧ - ١٤) :

أثبت أن الدالة الآتية هي دالة كثافة احتمالية :

د (س) = $\frac{١}{٨}$ س حيث ٠ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٤

ثم احسب :

أ) ح (١ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٣)

ب) ح (س $\leqslant$ ١)

الحــل :

نلاحظ أن :

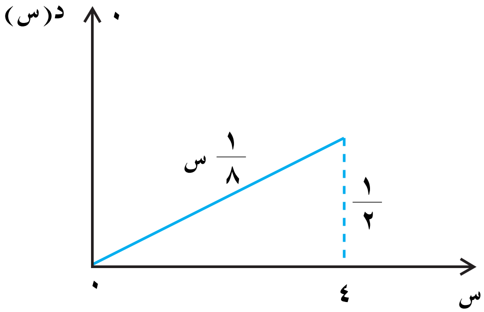
(١) الدالة د (س) = $\frac{١}{٨}$ س موجبة لجميع قيم س الواقعة في الفترة (٠ ، ٤) كما هو واضح من التمثيل البياني لها .

(٢) المساحة الواقعة تحت منحنى الدالة تساوي مساحة مثلث قاعدته ٤ وارتفاعه $\frac{١}{٢}$ وتساوي واحداً.

∴ فإن الدالة د (س) = $\frac{١}{٨}$ س

حيث ٠ ⩽ س ⩽ ٤

هي دالة كثافة احتمالية.

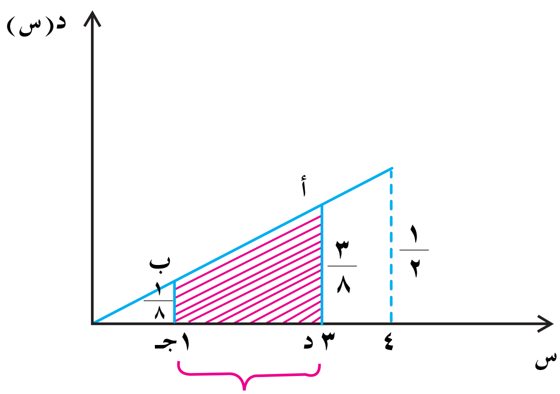


أ) ح (١ ⩽ س ⩽ ٣) = المساحة المظللة في الشكل التالي

= مساحة شبه المنحرف أ ب جـ د

= $\frac{١}{٢}$ [$\frac{٣}{٨}$ + $\frac{١}{٨}$] × ٢

= $\frac{١}{٢}$

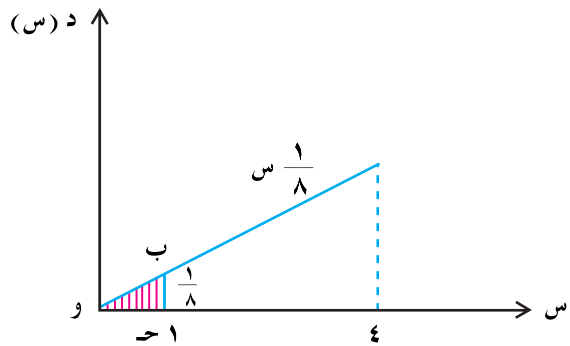


ب) ح (س $\geqslant$ ١) = المساحة المظللة في الشكل التالي

= مساحة المثلث و ب حـ

$= \frac{١}{٢} \times ١ \times \frac{١}{٨}$

$= \frac{١}{١٦}$



٧ - ٥ التوزيع الطبيعي

بينا في مقرر الإحصاء الوصفي أن المنحنى الطبيعي يعتبر من أهم المنحنيات التكرارية في الإحصاء لأنه يمثل كثيراً من الظواهر التي تقابلنا في الحياة العملية مثل الأطوال والأوزان والدرجات التي يحصل عليها الطلاب وغيرها من الظواهر المتصلة.

ومنحنى التوزيع الطبيعي يشبه الناقوس من حيث الشكل ومن خصائصه أنه متماثل حول العمود الذي يمر بقمة هذا المنحنى لذلك فهو يقسمه إلى قسمين متساويين تماماً. كما أن هذا التوزيع يتحدد بمعرفة كل من وسطه الحسابي ($\bar{س}$) وانحرافه المعياري (ع). حيث $\bar{س}$ هي النقطة التي تتمركز حولها الغالبية العظمى من مفردات التوزيع، ع هي مقياس يبين تشتت أو تباعد المفردات عن بعضها البعض (راجع البابين الثالث والرابع من مقرر الإحصاء الوصفي).

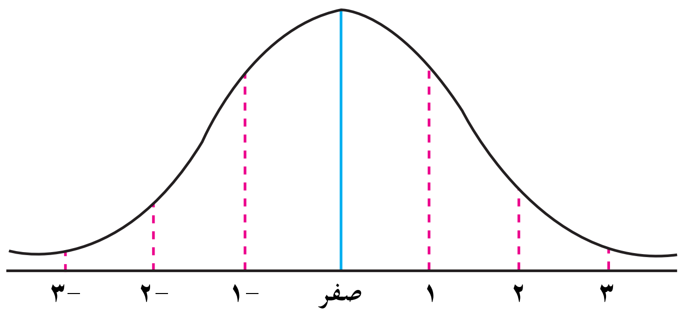
ومن خصائص التوزيع الطبيعي أيضاً، أن جميع مفرداته تقريباً تنحصر بين $\bar{س}$ −٣ ع، $\bar{س}$ + ٣ ع.

فإذا كانت هناك ظاهرة ما (نرمز لقيمها بالرمز س) تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه $\bar{س}$ وانحرافه المعياري ع، فإنه يمكن حساب احتمال وقوع س في أي مدى معين نريده.

ولحساب مثل هذه الاحتمالات لابد أن نتعرض للتوزيع الطبيعي القياسي.

التوزيع الطبيعي القياسي:

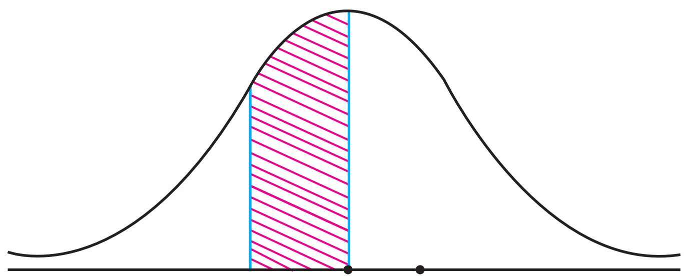
هذا التوزيع له نفس خصائص أي توزيع طبيعي، إلا أن وسطه الحسابي سَ = صفر وانحرافه المعياري ع = ١



فإذا كانت ص ترمز لقيم متغير يتبع التوزيع الطبيعي القياسي، فإن الغالبية العظمى لقيم ص تقع بين -٣ ، + ٣ . أو بمعنى آخر فإنه نادراً ما نجد قيمة للمتغير ص تقع خارج هذا المدى. أي أن أعلى قيمة يمكن أن يأخذها المتغير ص هي تقريباً ٣ وأصغر قيمة له هي تقريباً -٣ .

وهناك جداول تعطي احتمالات وقوع المتغير ص في مدى معين. فمثلاً يمكن بواسطة هذه الجداول حساب احتمال وقوع ص بين ١ ، ٢ وتكتب ح (١ ⩽ ص ⩽ ٢).

وهذه الجداول (وهي موجودة في نهاية هذا الباب) تعطي احتمالات وقوع ص بين صفر وأي قيمة أخرى م أي يعطي ح (٠ ⩽ ص ⩽ م).



فإذا رسمنا منحني متماثلاً وسطه صفر، وأخذنا نقطة ا على المحور الأفقي فيكون ح (صفر < ص < ا) هي المساحة المظللة في الشكل. ويمكن الحصول على هذه المساحة (الاحتمال) من الجدول بعد معرفة قيمة ا.

ويلاحظ أن الجدول يعطي المساحة بين نقطة الأصل وقيم ا الموجبة. كما نجد أن ا تبدأ من القيمة صفر وتزداد بمقدار ٠,٠١ حتى تصل إلى ٣,٠٩ وهي أعلى قيمة يأخذها المتغير ص. ونظراً لأن المنحنى متماثل تماماً حول العمود النازل من القمة على قاعدة المنحنى (عند النقطة صفر وهي تساوي سَ) فيمكن استخدام الجدول لإيجاد المساحة المحصورة بين صفر وقيم ا السالبة، كما يتضح من الأمثلة التالية:

مثال (٧ – ١٥):

إذا كان ص متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي القياسي (سَ = ٠ ، ع = ١) فأوجد:

أ) ح (٠ ≥ ص ≥ ١,٥٤) ب) ح (ص ≥ ١,٢٥).

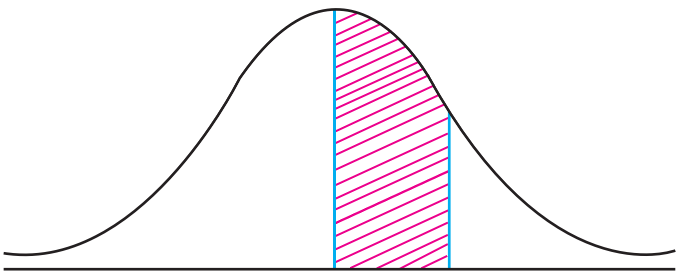
جـ) ح (١ ≥ ص ≥ ٢) د) ح (–١,٨ ≥ ص ≥ صفر).

هـ) ح (ص ≥ –١,٢) و) ح (–٢ ≥ ص ≥ –١)

ز) ح (–١ ≥ ص < ١,٢٨)

الحـــــل :

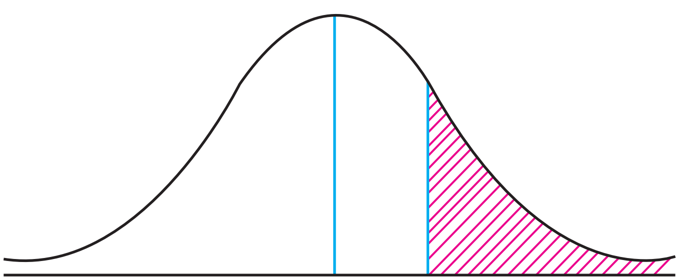
أ) نرسم شكلاً يوضح توزيعاً طبيعياً قياسياً ، ونحدد النقطة ١,٥٤ على المحور الأفقي ، فيكون الاحتمال المطلوب = المساحة المظللة في الشكل .



ويمكن الحصول على هذه المساحة من الجدول مباشرة بالبحث عن القيمة التي تناظر ١,٥ في العمود الأول وأسفل ٠,٠٤ وعلى ذلك يكون :

ح (٠ ⩽ ص ⩽ ١,٥٤) = ٠,٤٣٨٢

ب) نرسم شكلاً يوضح توزيعاً طبيعياً ، ونحدد النقطة ١,٢٥ على المحور الأفقي . فيكون الاحتمال المطلوب = المساحة المظللة في الشكل .



ونلاحظ أن الجدول لا يعطي هذه المساحة مباشرة، ولكن يمكن الحصول عليها بملاحظة الآتي :

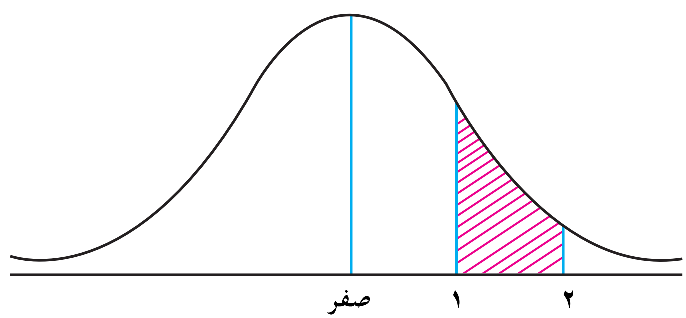
ح (ص ≥ ١,٢٥) = ٠,٥ − ح (٠ ≤ ص ≤ ١,٢٥)

والجدول يعطي قيمة ح (٠ ≤ ص ≤ ١,٢٥) مباشرة. وبالتعوض بقيمتها نحصل على الاحتمال المطلوب. أي أن :

ح (ص ≥ ١,٢٥) = ٠,٥٠٠٠ − ٠,٣٩٤٤

= ٠,١٠٥٦

جـ) نرسم شكلاً يوضح توزيعاً طبيعياً، ونحدد النقط ١ ، ٢ على المحور الأفقي. فيكون الاحتمال المطلوب هو المساحة المظللة.



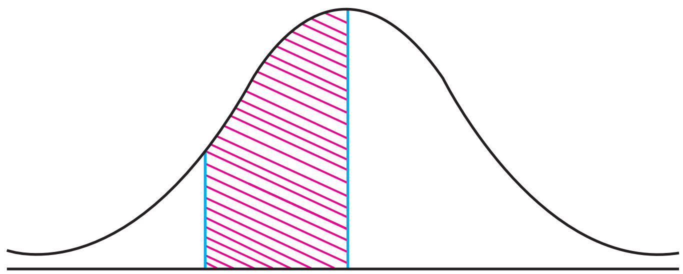
ولكن الجدول لا يعطي هذه المساحة مباشرة، ولكن يمكن الحصول عليها بملاحظة الآتي :

ح (١ > ص ≤ ٢) = ح (٠ ≤ ص ≤ ٢) − ح (٠ ≤ ص ≤ ١)

= ٠,٤٧٧٢ − ٠,٣٤١٣ (من الجدول مباشرة)

= ٠,١٣٥٩

د) نرسم شكلاً يوضح توزيعاً طبيعياً متماثلاً ونحدد النقطة −١,٨ على المحور الأفقي، فيكون الاحتمال المطلوب = المساحة المظللة في الشكل :

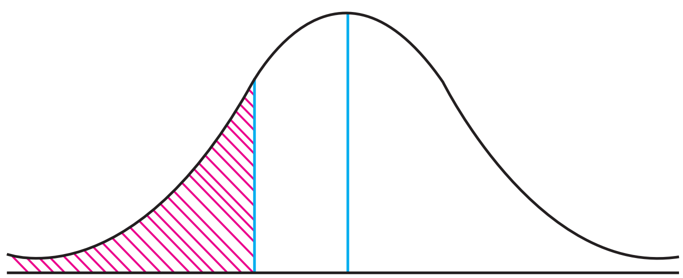


ولكن الجدول لا يعطي المساحة للقيم السالبة للمتغير . ونظراً لتماثل المنحنى فإن :

ح (-١,٨ ⩽ ص ⩽ صفر) = ح (صفر ⩽ ص ⩽ ١,٨)

= ٠,٤٦٤١ من الجدول مباشرة .

هـ) نرسم شكلاً يوضح توزيعاً طبيعياً متماثلاً ، ونحدد النقطة -١,٢ على المحور الأفقي . فيكون الاحتمال المطلوب يساوي المساحة المظللة في الشكل :



ولكن الجدول لا يعطي المساحة للقيم السالبة للمتغير ، ونظراً لتماثل المنحنى فإنه :

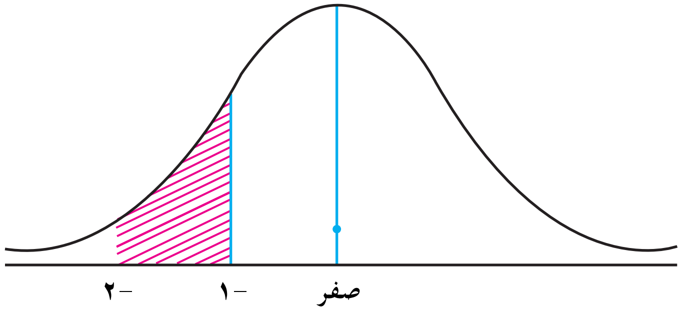
ح (ص ⩽ -١,٢) = ح (ص ⩾ ١,٢)

= ٠,٥ - ح (صفر ⩽ ص ⩽ ١,٢)

= ٠,٥ - ٠,٣٨٤٩ (من الجدول)

= ٠,١١٥١

د) نرسم شكلاً يوضح توزيعاً طبيعياً متماثلاً ، ونحدد النقط -١ ، -٢ على المحور الأفقي . فيكون الاحتمال المطلوب = المساحة المظللة في الشكل :



ولكن الجدول لا يعطي المساحة للقيم السالبة للمتغير . ونظراً لتماثل المنحنى فإن :

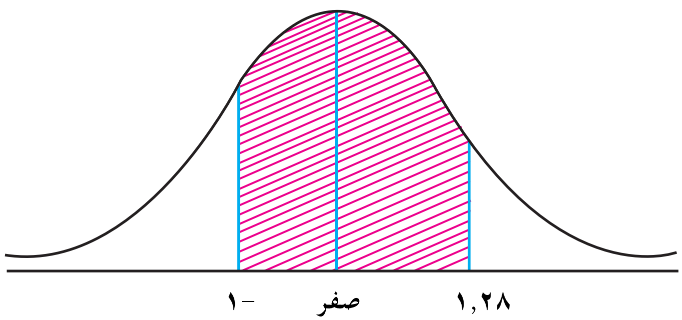
ح (−٢ ⩽ ص ⩽ −١) = ح (١ ⩽ ص ⩽ ٢)

= ح (٠ ⩽ ص ⩽ ٢) − ح (٠ ⩽ ص ⩽ ١)

= ٠,٤٧٧٢ − ٠,٣٤١٣

= ٠,١٣٥٩

ز) نرسم شكلاً يوضح توزيعاً طبيعياً متماثلاً، ونحدد النقط −١ ، ١,٢٨ على المحور الأفقي. فيكون الاحتمال المطلوب يساوي المساحة المظللة في الشكل :



وهذه المساحة تساوي:

= ح (−١ ≤ ص ≤ صفر) + ح (صفر ≤ ص < ١,٢٨)

= ح (صفر ≤ ص ≤ ١) + ح (صفر ≤ ص < ١,٢٨)

= ٠,٣٤١٣ + ٠,٣٩٩٧

= ٠,٧٤١٠

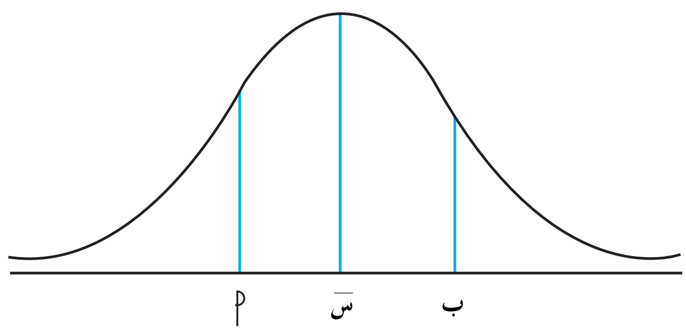
حساب الاحتمالات في حالة التوزيع الطبيعي العادي:

إذا كانت س تتبع توزيعاً طبيعياً عادياً وسطه $\bar{س}$ وانحرافه المعياري ع، وأردنا حساب أي احتمال حول المتغير س، فإننا نحوله أولاً إلى التوزيع الطبيعي القياسي وذلك بوضع

$$ص = \frac{س - \bar{س}}{ع}$$

حيث أن الجداول التي تعطي المساحة هي الجداول الخاصة بالتوزيع القياسي فقط. فلحساب ح (أ ≤ س ≤ ب) مثلاً فإن هذا الاحتمال يساوي:

$$ح \left(\frac{أ - \bar{س}}{ع} \leq ص \leq \frac{ب - \bar{س}}{ع} \right)$$



والأمثلة الآتية توضح طريقة الحل :

مثال (٧ - ١٦) :

إذا كان أطوال طلاب الجامعة يتبع توزيعاً طبيعياً وسطه = ١٦٨ سم وانحرافه المعياري = ٦ سم ، واخترنا عشوائياً أحد الطلاب ، ما احتمال أن يكون طوله :

أ) أكبر من ١٨٤ سم .

ب) أقل من ١٥٦ سم .

جـ) ينحصر بين ١٦٥ ، ١٧٤ سم .

الحـــــل :

بفرض أن س ترمز لأطوال الطلاب :

∴ س تتبع توزيعاً طبيعياً عادياً وسطه ١٦٨ سم وانحرافه المعياري ٦ سم .

وبوضع ص = $\frac{\text{س} - ١٦٨}{٦}$ يمكن الحصول على الاحتمالات المطلوبة كما يلي :

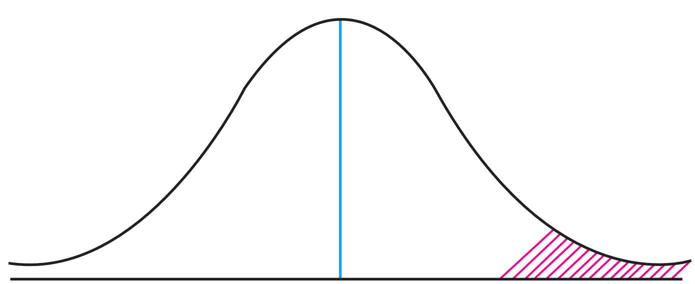
أ) ح (س ⩾ ١٨٤) :

عندما س = ١٨٤

∴ ص = $\frac{١٨٤ - ١٦٨}{٦}$

= $\frac{١٦}{٦}$

= ٢,٦٧



∴ ح (س ⩽ ١٨٤) = ح (ص ⩽ ٢,٦٧)

= ٠,٥ − ح (٠ ⩽ ص ⩽ ٢,٦٧)

= ٠,٥ − ٠,٤٩٦٢

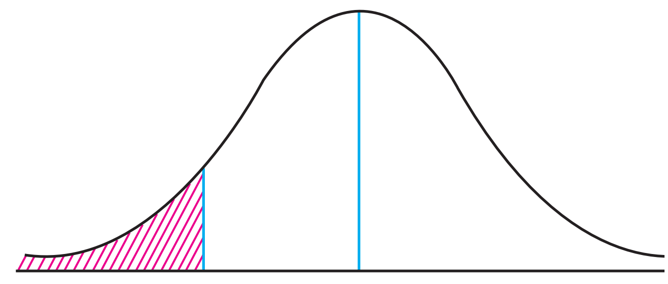
= ٠,٠٠٣٨

ب) ح (س ⩾ ١٥٦) :

عندما س = ١٥٦

∴ ص = $\frac{١٥٦ - ١٦٨}{٦}$

= $\frac{١٢-}{٦}$ = ٢−



∴ ح (س ⩾ ١٥٦) = ح (ص ⩾ ٢−)

= ٠,٥ − ح (٠ ⩽ ص ⩽ ٢)

= ٠,٥ − ٠,٤٧٧٢

= ٠,٠٢٢٨

ج = ح (١٦٥ ⩽ س ⩽ ١٧٤) :

عندما س = ١٦٥

$$\text{ص} = \frac{١٦٥ - ١٦٨}{٦}$$

$$= \frac{-٣}{٦}$$

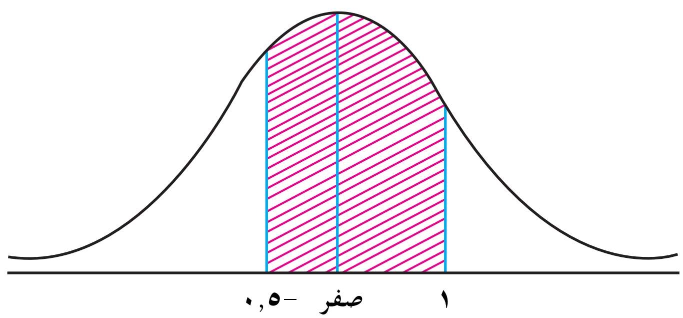
$$= -٠,٥$$

وعندما س = ١٧٤

$$\therefore \text{ص} = \frac{١٧٤ - ١٦٨}{٦}$$

$$= \frac{٦}{٦}$$

$$= ١$$



∴ ح (١٦٥ ≤ س ≤ ١٧٤) = ح (−٠,٥ ≤ ص ≤ ١)

= ح (−٠,٥ ≤ ص ≤ صفر) + ح (٠ ≤ ص ≤ ١)

= ح (صفر ≤ ص ≤ ٠,٥) + ح (٠ ≤ ص ≤ ١)

= ٠,١٩١٥ + ٠,٣٤١٣

= ٠,٥٣٢٨

مثال (٧ – ١٧):

إذا كان دخل ٨٠٠ أسرة في مدينة جدة يتبع توزيعاً طبيعياً وسطه ١٨٠٠

ريال وانحرافه المعياري ٣٠٠ ريال. فأوجد:

أ) احتمال الحصول على دخل أكبر من ١٥٠٠ ريال.

ب) احتمال الحصول على دخل أكبر من ٢٤٠٠ ريال.

جـ) احتمال الحصول على دخل ينحصر بين ١٦٥٠ ، ٢٢٥٠ ريالاً.

د) عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠٠ ريال.

الحـــــل:

بفرض أن س ترمز لدخول الأسر:

∴ س تتبع توزيعاً طبيعياً عادياً وسطه ١٨٠٠ ريال وانحرافه المعياري ٣٠٠ ريال.

ويوضح ص = $\frac{\text{س} - ١٨٠٠}{٣٠}$ يمكن إيجاد الاحتمالات المطلوبة كما يلي:

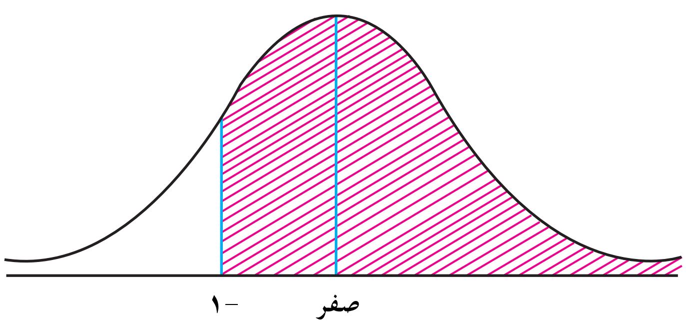
أ) <u>ح (س ⩾ ١٥٠٠)</u> :

عندما س = ١٥٠٠

$$\therefore \text{ص} = \frac{١٥٠٠ - ١٨٠٠}{٣٠٠}$$

$$= \frac{-٣٠٠}{٣٠٠}$$

$$= -١$$



∴ ح (س ≥ ١٥٠٠) = ح (ص ≥ -١)

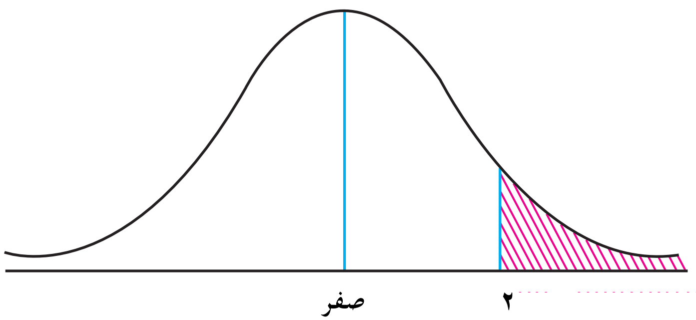
= ٠,٥ + ح (-١ ≤ ص ≤ صفر)

= ٠,٥ + ح (٠ ≤ ص ≤ ١)

= ٠,٥ + ٠,٣٤١٣

= ٠,٨٤١٣

ب) <u>ح (س ≥ ٢٤٠٠)</u> :



عندما س = ٢٤٠٠

∴ ص = $\frac{٢٤٠٠ - ١٨٠٠}{٣٠٠}$

= $\frac{٦٠٠}{٣٠٠}$

= ٢

∴ ح (س ≥ ٢٤٠٠) = ح (ص ≥ ٢)

= ٠,٥ − ح (٠ ≤ ص ≤ ٢)

= ٠,٥ − ٠,٤٧٧٢

= ٠,٠٢٢٨

جـ) ح (١٦٥٠ ≤ س ≤ ٢٢٥٠)

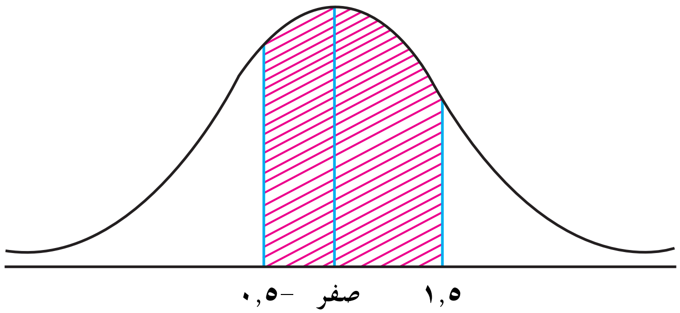
عندما س = ١٦٥٠

∴ ص = $\frac{١٦٥٠ - ١٨٠٠}{٣٠٠}$

= $\frac{-١٥٠}{٣٠٠}$

= -٠,٥

وعندما س = ٢٢٥٠



∴ ح (١٦٥٠ ⩽ س ⩽ ٢٢٥٠) = ح (-٠,٥ ⩽ ص ⩽ ١,٥)

= ح (-٠,٥ ⩽ ص ⩽ ٠) + ح (٠ ⩽ ص ⩽ ١,٥)

= ح (٠ ⩽ ص ⩽ ٠,٥) + ح (٠ ⩽ ص ⩽ ١,٥)

= ٠,١٩١٥ + ٠,٤٣٣٢

= ٠,٦٢٤٧

د) عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠٠ ريال :

لإيجاد عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠٠ ريال، نوجد احتمال الحصول على دخل أكبر من ١٥٠٠ ريال ونضربه في عدد الأسر فيحصل على المطلوب.

وحيث أن :

ح (س > ١٥٠٠) = ٠,٨٤١٣ من المطلوب (أ)

∴ عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠٠ ريال

= ٠,٨٤١٣ × ٨٠٠

= ٦٧٣,٠٤

= ٦٧٣ أسرة.

الخـــــلاصة

١- المتغير العشوائي هو مقدار يرافق نتائج التجربة العشوائية ويأخذ قيماً مختلفة حسب نتيجة التجربة.

٢- يقال إن المتغير العشوائي متغير منفصل إذا أخذ قيماً منفصلة عن بعضها البعض. ويقال إنه متغير متصل إذا أمكن أن يأخذ جميع القيم التي تقع في نطاق تغيره.

٣- التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل س يمثل بدالة تعطي احتمالات قيم س المختلفة في صورة جدول أو صيغة رياضية.

٤- توزيع ذي الحدين توزيع منفصل ويمثل بالدالة التالية:

$$ح(س) = {}^{ن}ق_{س} \, ح^{س} \, ل^{ن-س}$$

٥- يقال إن المتغير العشوائي س يتبع توزيعاً احتمالياً متصلاً إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية د(س) تحقق الشروط الآتية:

أ- د(س) $\geqslant$ صفر لجميع قيم س.

ب- المساحة تحت منحنى هذه الدالة = ١ .

٦- التوزيع الطبيعي س أهم أمثلة التوزيعات المتصلة ومن خصائصه أنه متماثل حول العمود الذي يمر بقمته.

٧- التوزيع الطبيعي القياسي له نفس خصائص التوزيع الطبيعي إلا أن وسطه الحسابي يساوي صفراً، وانحرافه المعياري يساوي ١ .

تمارين (٧ - ١)

[١] اختير ٤ أشخاص عشوائياً من مجموعة مكونة من ٥ نساء، ٤ أطفال، أوجد احتمال أن يكون من بينهم طفلان.

[٢] رميت ٨ قطع من العملة في وقت واحد. أوجد احتمال ظهور الصور في ٦ قطع على الأقل.

[٣] إذا كان احتمال أن يفوز فريق كرة قدم في مباراة هو $\frac{٢}{٣}$. فما هو احتمال أن يفوز هذا الفريق في ٤ مباريات على الأقل إذا لعب ٦ مباريات؟

[٤] في عائلة بها ٦ أطفال، إذا كان احتمال ولادة مولود ذكر ٠,٥٢ فما هو احتمال وجود ولد واحد على الأقل في العائلة.

[٥] في مصنع للمصابيح الكهربائية، تبين أن من بين كل ١٠٠٠ مصباح منتجة يوجد ١٠٠ مصباح غير صالحة للاستعمال. سحبت عشوائياً عينة من المصابيح مكونة من ١٠ مصابيح. أحسب الاحتمالات:

أ) أن تكون جميع المصابيح المسحوبة صالحة للاستعمال.

ب) أن تكون جميع المصابيح المسحوبة غير صالحة للاستعمال.

جـ) أن يكون من بين المصابيح المسحوبة مصباح واحد على الأقل صالح للاستعمال.

[٦] قدرت شركة للملاحة أن احتمال وصول الباخرة التي تقوم من ميناء الإسكندرية إلى لبنان في ميعادها هو ٠,١ فإذا قامت خمس بواخر من ميناء الإسكندرية متجهة إلى لبنان فاحسب الاحتمالات الآتية:

أ) احتمال وصول باخرة واحدة فقط في ميعادها.

ب) احتمال وصول باخرة واحدة على الأقل في ميعادها.

جـ) احتمال وصول باخرة واحدة على الأكثر في ميعادها.

د) احتمال وصول البواخر كلها في ميعادها.

[٧] اشترى شخص صندوقاً به ثلاث بطيخات، فإذا كان احتمال أن تكون أي منها تالفة هو ٠,٣ فاحسب احتمال أن تكون:

أ) جميعها جيدة.

ب) واحدة تالفة .

[٨] إذا كان متوسط أطوال مجموعة كبيرة من الطلاب = ١٦٠ سم وانحرافه المعياري ٥ سم، أوجد الاحتمالات الآتية :

أ) الحصول على طالب طوله أكبر من ١٧٥ سم .

ب) الحصول على طالب طوله أقل من ١٦٢ سم .

جـ) الحصول على طالب طوله ينحصر بين ١٥٧,٥ ، ١٦٧,٥ سم .

[٩] تقدم ٣٠٠ شاب إلى إدارة التجنيد . فإذا كانت أطوالهم تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه = ١٧٠سم، وانحرافه المعياري = ٨ سم . أوجد عدد الأشخاص المقبولين للتجنيد إذا كان الحد الأدنى للطول المطلوب هو ١٥٦سم .

[١٠] إذا كان دخل ٦٠٠ أسرة في مدينة ما يتبع توزيعاً طبيعياً وسطه ٣٦٠٠ ريال وانحرافه المعياري ٦٠٠ ريال فأوجد :

أ) احتمال الحصول على دخل أكبر من ٤٨٠٠ ريال .

ب) احتمال الحصول على دخل يقل عن ٥١٠٠ ريال .

جـ) عدد الأسر التي يقل دخلها عن ٢٤٠٠ ريال .

د) عدد الأسر التي ينحصر دخلها بين ٢٤٠٠ ريال، ٤٨٠٠ ريال .

جدول التوزيع الطبيعي القياسي

ص	صفر	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
صفر	صفر	,٠٠٤٠	,٠٠٨٠	,٠١٢٠	,٠١٦٠	,٠١٩٩	,٠٢٣٩	,٠٢٧٩	,٠٣١٩	,٠٣٥٩
٠,١	,٠٣٩٨	,٠٤٣٨	,٠٤٧٨	,٠٥١٧	,٠٥٥٧	,٠٥٩٦	,٠٦٣٦	,٠٦٧٥	,٠٧١٤	,٠٧٥٣
٠,٢	,٠٧٩٣	,٠٨٢٢	,٠٨٧١	,٠٩١٠	,٠٩٤٨	,٠٩٨٧	,١٠٢٦	,١٠٦٤	,١١٠٣	,١١٤١
٠,٣	,١١٧٩	,١٢١٧	,١٢٥٥	,١٢٩٣	,١٣٣١	,١٣٦٨	,١٤٠٦	,١٤٤٣	,١٤٨٠	,١٥١٧
٠,٤	,١٥٥٤	,١٥٩١	,١٦٢٨	,١٦٦٤	,١٧٠٠	,١٧٣٦	,١٧٧٢	,١٨٠٨	,١٨٤٤	,١٨٧٩
٠,٥	,١٩١٥	,١٩٥٠	,١٩٨٥	,٢٠١٩	,٢٠٥٤	,٢٠٨٨	,٢١٢٣	,٢١٥٧	,٢١٩٠	,٢٢٢٤
٠,٦	,٢٢٥٧	,٢٢٩١	,٢٣٢٤	,٢٣٥٧	,٢٣٨٩	,٢٤٢٢	,٢٤٥٤	,٢٤٨٦	,٢٥١٧	,٢٥٤٩
٠,٧	,٢٥٨٠	,٢٦١١	,٢٦٤٢	,٢٦٧٣	,٢٧٠٤	,٢٧٣٤	,٢٧٦٤	,٢٧٩٤	,٢٨٢٣	,٢٨٥٢
٠,٨	,٢٨٨١	,٢٩١٠	,٢٩٣٩	,٢٩٧٦	,٢٩٩٥	,٣٠٢٣	,٣٠٥١	,٣٠٧٨	,٣١٠٦	,٣١٣٣
٠,٩	,٣١٥٩	,٣١٨٦	,٣٢١٢	,٣٢٣٨	,٣٢٦٤	,٣٢٨٩	,٣٣١٥	,٣٣٤٠	,٣٣٦٥	,٣٣٨٩
١,٠	,٣٤١٣	,٣٤٣٨	,٣٤٦١	,٣٤٨٥	,٣٥٠٨	,٣٥٣١	,٣٥٥٤	,٣٥٧٧	,٣٥٩٩	,٣٦٢١
١,١	,٣٦٤٣	,٣٦٦٥	,٣٦٨٦	,٣٧٠٨	,٣٧٢٩	,٣٧٤٩	,٣٧٧٠	,٣٧٩٠	,٣٨١٠	,٣٨٣٠
١,٢	,٣٨٤٩	,٣٨٦٩	,٣٨٨٨	,٣٩٠٧	,٣٩٢٥	,٣٩٤٤	,٣٩٦٢	,٣٩٨٠	,٣٩٩٧	,٤٠١٥
١,٣	,٤٠٣٢	,٤٠٤٩	,٤٠٦٦	,٤٠٨٢	,٤٠٩٩	,٤١١٥	,٤١٣١	,٤١٤٧	,٤١٦٢	,٤١٧٧
١,٤	,٤١٩٢	,٤٢٠٧	,٤٢٢٢	,٤٢٣٦	,٤٢٥١	,٤٢٦٥	,٤٢٧٩	,٤٢٩٢	,٤٣٠٦	,٤٣١٩
١,٥	,٤٣٣٢	,٤٣٤٥	,٤٣٥٧	,٤٣٧٠	,٤٣٨٢	,٤٢٩٤	,٤٤٠٦	,٤٤١٨	,٤٤٢٩	,٤٤٤١
١,٦	,٤٤٥٢	,٤٤٦٣	,٤٤٧٤	,٤٤٨٤	,٤٤٩٥	,٤٥٠٥	,٤٥١٥	,٤٥٢٥	,٤٥٣٥	,٤٥٤٥
١,٧	,٤٥٥٤	,٤٥٦٤	,٤٥٧٣	,٤٥٨٢	,٤٥٩١	,٤٥٩٩	,٤٦٠٨	,٤٦١٦	,٤٦٢٥	,٤٦٣٣
١,٨	,٤٦٤١	,٤٦٤٩	,٤٦٥٦	,٤٦٦٤	,٤٦٧١	,٤٦٧٨	,٤٦٨٦	,٤٦٩٣	,٤٦٩٩	,٤٧٠٦
١,٩	,٤٧٣١	,٤٧١٩	,٤٧٢٦	,٤٧٣٢	,٤٧٣٨	,٤٧٤٤	,٤٧٥٠	,٤٧٥٦	,٤٧٦١	,٤٧٧٦
٢,٠	,٤٧٧٢	,٤٧٧٨	,٤٧٨٣	,٤٧٨٨	,٤٧٩٣	,٤٧٩٨	,٤٨٠٣	,٤٨٠٨	,٤٨١٢	,٤٨١٧
٢,١	,٤٨٢١	,٤٨٢٦	,٤٨٣٠	,٤٨٣٤	,٤٨٣٨	,٤٨٤٢	,٤٨٤٦	,٤٨٥٠	,٤٨٥٤	,٤٨٥٧
٢,٢	,٤٨٦١	,٤٨٦٤	,٤٨٦٨	,٤٨٧١	,٤٨٧٥	,٤٨٧٨	,٤٨٨١	,٤٨٨٤	,٤٨٨١	,٤٨٩٠
٢,٣	,٤٨٩٣	,٤٨٩٦	,٤٨٩٨	,٤٩٠١	,٤٩٠٤	,٤٩٠٦	,٤٩٠٩	,٤٩١١	,٤٩١٠	,٤٩١٦
٢,٤	,٤٩١٨	,٤٩٢٠	,٤٩٢٢	,٤٩٢٥	,٤٩٢٧	,٤٩٢٩	,٤٩٣١	,٤٩٣٢	,٤٩٣٤	,٤٩٣٦
٢,٥	,٤٩٣٨	,٤٩٤٠	,٤٩٤١	,٤٩٤٣	,٤٩٤٥	,٤٩٤٦	,٤٩٤٨	,٤٩٤٩	,٤٩٥١	,٤٩٥٢
٢,٦	,٤٩٥٣	,٤٩٥٥	,٤٩٥٦	,٤٩٥٧	,٤٩٥٩	,٤٩٦٠	,٤٩٦١	,٤٩٦٢	,٤٩٦٣	,٤٩٦٤
٢,٧	,٤٩٦٥	,٤٩٦٦	,٤٩٦٧	,٤٩٦٨	,٤٩٦٩	,٤٩٧٠	,٤٩٧١	,٤٩٧٢	,٤٩٧٣	,٤٩٧٤
٢,٨	,٤٩٧٤	,٤٩٧٥	,٤٩٧٦	,٤٩٧٧	,٤٩٧٧	,٤٩٧٨	,٤٩٧٩	,٤٩٧٩	,٤٩٨٠	,٤٩٨١
٢,٩	,٤٩٨١	,٤٩٨٢	,٤٩٨٢	,٤٩٨٣	,٤٩٨٤	,٤٩٨٤	,٤٩٨٥	,٤٩٨٥	,٤٩٨٦	,٤٩٨٦
٣,٠	,٤٩٨٧	,٤٩٨٧	,٤٩٨٧	,٤٩٨٨	,٤٩٨٨	,٤٩٨٩	,٤٩٨٩	,٤٩٨٩	,٤٩٩٠	,٤٩٩٠

شركة المطابع الأهلية للأوفست المحدودة
National Offset Printing Press Ltd. Co.
الرياض - المملكة العربية السعودية